قسم الرياضيات والإعلام الآلي
جامعة أم البواقي
جانفي 2025

التصحيح النموذجي لامتحان مادة التحليل الدالي I

أولا: الفهم العام: (4,5)

القضية 01: خاطئة، ليس بالضرورة أن يكون فضاء الدوال المحدودة فضاء تام إلا أن يكون فضاء الوصول F فضاء تاما. (1)

القضية 02: خاطئة، نقص الشرط: كون A تحقق خاصية تساوي الاستمرار (0,75)

القضية 03: خاطئة: الثنوي الطبولوجي لـ E محتوى في الثنوي الجبري لـ E. 0,75

القضية 04: خاطئة: مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة القابلة للقلب هي مجموعة مفتوحة. 0,75

القضية 05 خاطئة: يكون ρ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي A إذا وفقط إذا كان المؤثر $(A-\rho I)^{-1}$ غير موجود أو إذا كان هذا المؤثر موجود ولكنه غير معرف على فضاء البدء بأكمله.

القضية 06:

التمرين الأول: 12

بيان أن A متراص نسبيا يستلزم أن A يحقق خاصية تساوي الاستمرار.

ليكن $\varepsilon>0$ و $A\in\mathcal{C}(X,E)$ متراص نسبيا وعليه A شبه متراص وعليه توجد $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ بحيث $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} B(f_i,\varepsilon)$ 0,5 0,5

1 من

بما أن العائلة $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ هي عائلة منتهية من دوال مستمرة فهي

متساوية الاستمرار في x، وبالتالي (0,25)

$$\exists \alpha>0, \forall j=\overline{1,m} : \forall x' \in X : d(x,x')<\alpha \Rightarrow \|f_j(x)-f_j(x')\|<\varepsilon$$ (0,5)

ومن أجل كل f من A لدينا:

$$\exists j_0 \in \overline{1,m} : |||f-f_{j_0}||| < \varepsilon$$ (0,25)

وعليه من أجل كل x و x' بحيث $d(x,x')<\alpha$ لدينا:

$$\|f(x)-f(x')\| \le \underbrace{\|f(x)-f_{j_0}(x)\|}_{(1)} + \underbrace{\|f_{j_0}(x)-f_{j_0}(x')\|}_{(2)} + \underbrace{\|f_{j_0}(x')-f(x')\|}_{(3)}$$ (0,25)

$$\le \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

(1) و(3) من كون $|||f-f_{j_0}|||<\varepsilon$ و(2) من كون $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ متساوية الاستمرار (0,25)

وعليه

$$\forall \varepsilon>0, \forall x\in E, \exists\alpha>0, \forall x'\in E, \forall f\in A : d(x,x')<\alpha \Rightarrow \|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$$ (0,25)

وعليه A متساوية الاستمرار على E.

II الشرط الكافي (0,5) في فضاء بناخ: $\frac{4}{4}$

لتكن $\forall n\ge1 : X_n = \{x\in E ; \forall i\in I : \|f_i x\| \le n\}$ (0,25)

X_n مجموعات مغلقة وتحقق $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ وحسب مبرهنة بير (0,1)

لدينا: ضمان وجود n_0 من $\mathbb{N}$ بحيث $\operatorname{Int} X_{n_0} \neq \emptyset$ (0,25) (0,25)

وبالتالي يوجد $x_0\in X_{n_0}$ و $r>0$ بحيث $B(x_0,r)\subset X_{n_0}$ (0,1)

إذن

$$\|f_i(x_0+rz)\| \le n_0, \forall i\in I, \forall z\in B(0,1).$$ (0,25)

$$\|f_i\| \le \frac{1}{r}[n_0+\|f_i x_0\|], \forall i\in I$$ (0,25)

وعليه

و.هـ.م $\sup_{i\in I}\|f_i\| \le \sup_{i\in I}\left(\frac{1}{r}(n_0+\|f_i x_0\|)\right)$ (0,25) 2ن

III - الشرط الإضافي : F فضاء بناخ.

الاختبار :

لتكن $(f_n)_n$ متتالية كوشية من الفضاء $B(E,F)$ مرفقا بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$

إذن لدينا :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n,m\geq n_0 : \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon \quad (*)$$

ومنه

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n,m\geq n_0 \ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \ \forall x\in E$$

نلاحظ أن المتتالية $(f_n(x))$ هي متتالية كوشية في F وبما أن F فضاء بناخ فهي متتالية متقاربة نحو الدالة التي نرمز لها بالرمز f ونكتب

$$\forall x\in E: \lim_{m\to+\infty} f_m(x)=f(x).$$

وعليه من $(*)$ نستنتج بجعل m يؤول إلى $+\infty$

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\geq n_0 \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \ \forall x\in E \quad (**)$$

وعليه

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\geq n_0 \ \|f_n-f\|<\varepsilon$$

أي أن (f_n) متقاربة

من $(**)$ لدينا : $\|f\|\leq \varepsilon+\|f_n\|<M$

وعليه f محدودة وبالتالي $f\in B(E,F)$ ومنه

$(B(E,F),\|\cdot\|_\infty)$ هو فضاء بناخ.

التمرين الثاني: (4pts)

$$T:(C[1,2],\mathbb{R}) \to L^1([1,2],\mathbb{R})$$

$$Tf(x) = x\int_1^2 f(t)\,dt$$

1- بيان أن T مؤثر محدود.

$$\|Tf\|_{L^1} = \left\| x\int_1^2 f(t)\,dt\right\|_{L^1}$$

$$= \int_1^2 \left|x\int_1^2 f(t)\,dt\right| dx = \int_1^2 x\,dx \cdot \left|\int_1^2 f(t)\,dt\right| \quad 0{,}5$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \times \left|\int_1^2 f(t)\,dt\right|$$

$$0{,}5 \quad \leq \frac{3}{2}\int_1^2 |f(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{3}{2}\sup_{t\in[1,2]}|f(t)| \quad 0{,}5$$

$$= \frac{3}{2}\|f\|$$

$$\sup_{\|f\|=1}\|Tf\| \leq \frac{3}{2}$$

وعليه

أي $\boxed{\|T\| \leq \frac{3}{2}}$ $0{,}5$ —— (1)

ومنه T مؤثر محدود.

2- حساب $\|T\|_2$ حيث $g(t)=1$: $\forall t\in[1,2]$

$$\|Tg\| = \left\| x\int_1^2 g(t)\,dt\right\|_{L^1} = \left\| x\int_1^2 dt\right\|_{L^1} = \|x\|_{L^1} \quad 0{,}5$$

$$= \int_1^2 |x|\,dx = \frac{3}{2} \quad 0{,}5$$

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1}\|Tf\| \geq \|Tg\| = \frac{3}{2} \quad \text{—— (2)}$$

من (1) و(2) ينتج: $0{,}5$ $\boxed{\|T\| = \frac{3}{2}}$ $0{,}5$

4ن