L'arbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi university
Department of mathematics

Teacher**:** *Y. SOULA* Module: *Algebra* 1
University year: $2024-2025$ Date: $19/01/2025$, Time: $1h30m$

Exam

Exercise 1. (7 *points*)

1) Give negation of the following propositions:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x > x.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \ 2x > x.$

c) $\exists n \in \mathbb{N}, \quad 5n + 11 = 3n + 14.$

d) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} < \varepsilon)$

2) In the first three cases, indicate which one is true.

Exercise 2. (6 *points*)

On the set $\mathbb{R}$, we define a relation $\Re$ as follows

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \Re y \Leftrightarrow e^x \leq e^y$$

Is the relation $\Re$ reflexive? symmetric? anti-symmetric? transitive?

Exercise 3. (7 *points*)

We equip $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ with two laws defined by:

$$\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \quad \text{and} \\ (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + x'y) \end{cases}$$

1) Show that $(A, +)$ is a commutative group.

2)

a) Show that the law $\star$ is commutative.

b) Show that $\star$ is associative

c) Determine the neutral element of A for the law $\star$.

d) Show that $(A, +, \star)$ is a commutative ring.

Good luck

جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي.

قسم الرياضيات

الأستاذة: ي. مولة — مقياس: جبر 1

السنة الجامعية: 2024 - 2025 — التاريخ: 2025/01/19

المدة: ساعة ونصف.

إختبار.

التمرين 1: (7 نقاط).

1) أعطي نفي القضايا التالية:

أ) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x > x$

ب) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow 2x > x$

ج) $\exists n \in \mathbb{N},\ 5n + 11 = 3n + 14$

د) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} < \varepsilon$

2) في الحالات الثلاث الأولى، أشر (بين) إلى أي منها هو الصحيح.

التمرين 2: (6 نقاط)

على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ التالية:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x \mathcal{R} y \iff e^x \leq e^y$$

هل العلاقة $\mathcal{R}$ إنعكاسية، تناظرية، ضد تناظرية متعدية ؟

التمرين 3: (7 نقاط)

نزود $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بقانونين $+$ و $*$ المعرفين كما يلي:

$$\begin{cases} (x,y) + (x',y') = (x+x',\ y+y') \\ \text{and} \\ (x,y) * (x',y') = (xx',\ xy' + x'y) \end{cases}$$

1) برهن أن: $(A, +)$ هي زمرة تبديلية.

2) أ) برهن أن القانون $*$ تبديلي.

ب) برهن أن القانون $*$ تجميعي.

ج) حدد العنصر الحيادي لـ A بالنسبة لقانون $*$.

د) برهن أن $(A, +, *)$ هي حلقة تبديلية.

بالتوفيق.