

Examen Final : Complément de la Théorie des Probabilités

Exercice 01 :

Soit (X, Y) vecteur de variables aléatoires absolument continues de densité de probabilité conjointe

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

- (1) Tracer le support de vecteur (X, Y) .
- (2) Déterminer la valeur de la constante k .
- (3) Déterminer la fonction de répartition conjointe F de ce couple, en déduire
 - (a) Les fonctions de répartition marginales F_X et F_Y de X et Y respectivement.
 - (b) Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
 - (c) Les lois marginales de X et de Y .
- (4) Déterminer les lois conditionnelles de $X|Y = y$ et de $Y|X = x$.
- (5) Démontrer que

$$E(Y|X = x) = \frac{1}{3} (1 + x + \sqrt{x}), \quad x \in [0, 1],$$

et puis déterminer la distribution de la variable $Z = E(Y|X = x)$.

- (6) Calculer $E[E(Y|X)]$ par deux méthodes.
- (7) Calculer la fonction caractéristique de la variable Y .

Exercice 02 :

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_2)$, considérons le vecteur

$$Y = (X_1 + 2, X_1 + 2X_2).$$

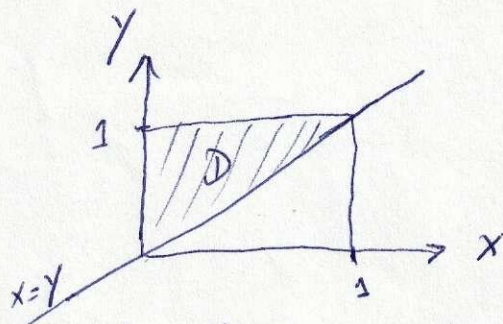
- (1) Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, et un vecteur $B \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$Y = AX + B.$$
- (2) Montrer que le vecteur Y est gaussien.
- (3) Calculer la moyenne μ_Y et la matrice de covariance Σ_Y du vecteur Y , en déduire la densité de probabilité du vecteur Y .
- (4) Déterminer la distribution de la loi conditionnelle $Y/X = x$.

Correction Interrogation II -

Exo1 (15pts)

1)



(0,5pt)

$$2) \iint_{\mathbb{D}^2} f(x,y) dx dy = 1 \Leftrightarrow k \int_0^1 \left[\int_x^1 y^{-1/2} dy \right] x^{-1/2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k \int_0^1 \left[\frac{1}{-1/2+1} y^{-1/2+1} \right]_x^1 x^{-1/2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k \int_0^1 2(1 - \sqrt{x}) x^{-1/2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k \int_0^1 (x^{-1/2} - 1) dx = 2k \left[2\sqrt{x} - x \right]_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = 1/2$$

(01pt)

* si $x < y$ $F_{x,y}(x,y) = 0$ (0,5pt)

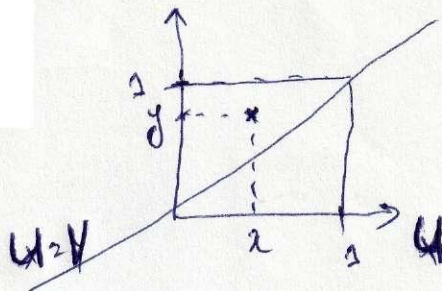
* si $0 \leq x \leq y < 1$

$$F_{x,y}(x,y) = \int_{-x}^x \int_{-y}^y f(u,v) du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \left[\int_u^y f(u,v) dv \right] du = \frac{1}{2} \int_0^x \left[\int_u^y v^{-1/2} dv \right] u^{-1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \left[2\sqrt{v} \right]_u^y u^{-1/2} du = \int_0^x (\sqrt{y} - \sqrt{u}) u^{-1/2} du$$

$$= \int_0^x (\sqrt{y} u^{-1/2} - 1) du = \left[\sqrt{y} 2\sqrt{u} - u \right]_0^x = 2\sqrt{xy} - x \quad (0,5pt)$$

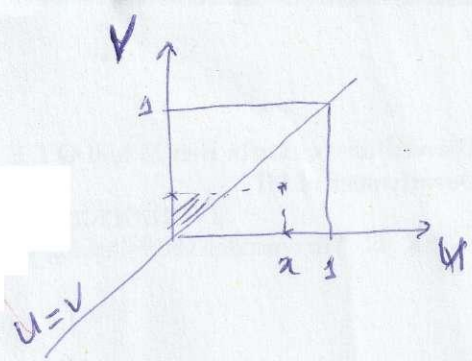


* si $0 \leq y \leq x$ et $y \leq 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y \left[\int_0^x f(u,v) du \right] dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^y \left[\int_0^x u^{-1/2} du \right] dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^y \left[2\sqrt{u} \right]_0^x v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \int_0^y 2\sqrt{x} v^{-1/2} dv = y \quad (0.5pt)$$



* si $0 \leq x \leq 1 < y$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \left[\int_u^1 f(u,v) dv \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \left[\int_u^1 \frac{1}{\sqrt{v}} dv \right] \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^x \left[2\sqrt{v} \right]_u^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x 2(1 - \sqrt{u}) \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - 1 \right) du = \left[2\sqrt{u} - u \right]_0^x$$

$$F_{X,Y}(x,y) = 2\sqrt{x} - x$$

(0.5pt)

* si $x \geq 1$ ou $y \geq 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = 1$$

(0.5pt)

Alors

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ ou } y < 0 \\ 2\sqrt{xy} - x & \text{si } 0 \leq x \leq y < 1 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq x \text{ et } y \leq 1 \\ 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 < y \\ 1 & \text{si } x \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

a) On peut déduire les fonctions de répartition marginales comme suit :

$$F_x(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (01\text{pt})$$

et

$$F_y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases} \quad (01\text{pt})$$

b) L'indépendance :

si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ on a $F_x(x) = 0$ ou $F_y(y) = 0$ donc

$$F_x(x) F_y(y) = 0 = F_{x,y}(x,y)$$

si $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, on a $F_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 2\sqrt{xy} - x & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ y & \text{si } 0 \leq y < x \leq 1 \end{cases}$

mais $F_x(x) = 2\sqrt{x} - x$ et $F_y(y) = y$, donc (01pt)

$$F_x(x) F_y(y) = 2\sqrt{x} \cdot y - xy \neq F_{x,y}(x,y) \Rightarrow X, Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$

c) Les densités marginales : on a $f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$ et $f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y)$

Donc $f_x(x) = \frac{d}{dx} (2\sqrt{x} - x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ si $0 < x \leq 1$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (01\text{pt})$$

et $f_Y(y) = \frac{d}{dy} y = 1$ si $0 < y \leq 1$

done

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (01\text{pt})$$

$$4) f_{X/Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \text{ si } 0 \leq x \leq y < 1 \quad (0,5\text{pt})$$

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2(1-\sqrt{x})\sqrt{y}} \quad 0 \leq x \leq y < 1$$

$$5) E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x}(y) dy = \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} \int_x^1 \frac{y}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} \int_x^1 \sqrt{y} dy = \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} \right]_x^1$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{3(1-\sqrt{x})} = \frac{1+x-\cancel{x}-x\sqrt{x}}{3(1-\sqrt{x})} = \frac{1}{3} (1+x+\sqrt{x}) \quad (01\text{pt})$$

b) On a: $E(Y|X=x) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x} + x) = Z$, on pose
 $g(t) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x} + x)$. Cette fonction est croissante sur $[0,1]$

Alors on a $f_Z(z) = -[g^{-1}(z)]' f_Y(g^{-1}(z))$. $\frac{1}{3} \leq z \leq 1$ --- (1)

Calcul de $g^{-1}(z)$, on a

$$\frac{1}{3}(1 + \sqrt{x} + x) = z \Rightarrow 1 + \sqrt{x} + x = 3z \text{ - donc}$$

donc $x + \sqrt{x} + 1 - 3z = 0$, on pose $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$.

$$t^2 + t + 1 - 3z = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 + 12z = 12z - 3 = 3(4z - 1) \geq 0$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{3(4z-1)}}{2} \leq 0 \text{ impossible}$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{3(4z-1)}}{2} \geq 0$$

$$t_2 = \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3(4z-1)} - 1}{2} \Rightarrow x = g^{-1}(z) = 3z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4z-1}$$

et d'après l'égalité (1), on obtient $f_Z(z)$. (01pt)

* On a $E(Y/x)$ est une v.a comme la v.a X

$$E[E(Y/x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y/x) f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (1 + \sqrt{x} + x) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - x \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx = \frac{1}{3} \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

(01pt)

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

D'autre côté $E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1/2$

(01pt)

$$2) f_y(y) = 1 \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\Phi_y(t) = E(e^{ity}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \cdot f_y(y) dy$$

$$= \int_0^1 e^{ity} dy = \frac{1}{it} e^{ity} \Big|_0^1 = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

(01pt)



Exo2

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5+0,5)

2) Soit $a = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, On a

$$a Y^t = (a, b) \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = ax_1 + 2a + bx_1 + 2bx_2 \\ = (a+b)x_1 + 2bx_2 + 2a$$

et comme $X = (X_1, X_2)$ est un vecteur gaussien alors Y est un vecteur gaussien (01pt)

3) On a : $X \sim \mathcal{N}(0, I_2) \Rightarrow \mu_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $Y = AX + B \Rightarrow \mu_Y = A\mu_X + B = B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5pt)

et $\Sigma_Y = A \Sigma_X A^t = AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (0,5pt)

et On a

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{y_1 - \mu_{y_1}}{\sigma_{y_1}} \right)^2 - 2\rho \frac{(y_1 - \mu_{y_1})(y_2 - \mu_{y_2})}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} + \left(\frac{y_2 - \mu_{y_2}}{\sigma_{y_2}} \right)^2 \right] \right\}$$

On : $y_1 = x_1 + 2$, $y_2 = x_1 + 2x_2$

$\sigma_{y_1}^2 = 1 \Rightarrow \sigma_{y_1} = 1$, $\mu_{y_1} = 2$

$\sigma_{y_2}^2 = 5 \Rightarrow \sigma_{y_2} = \sqrt{5}$, $\mu_{y_2} = 0$

$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 1$ et $\rho = \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{1-\rho^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

4) $f_{Y/X_2}(\frac{y}{x_2}) = \frac{f_Y(y_1, y_2)}{f_X(x_1, x_2)}$ ou

$$f_X(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) \right\}$$

car $X \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ (01pt)