

Université Larbi ben M'hidi Oum EL Bouaghi
Département de Mathématiques et informatique
Examen : Systèmes dynamiques et introduction au chaos

Mastre 2. Option : mathématiques appliquées. Durée : 1h :30m. le 14/01/2025

Exercice 0.1

Soit l'équation différentielle de Van der Pol suivante :

$$\ddot{y}(t) + \mu(y^2(t) - 1)\dot{y}(t) + y(t) = 0 \quad \text{où} \quad \mu \geq 0 \quad (1)$$

- 1) Transformer l'équation (1) en système d'équation différentielle d'ordre 1.
- 2) Déterminer les points d'équilibres du système utilisé.
- 3) Déterminer linéarisation du système aux points d'équilibres et étudier la stabilité de point d'équilibre $(0,0)$.

Exercice 0.2

Soit le système de pendule suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{k}{m} y \end{cases} \quad \text{où} \quad g, m, k, l > 0. \quad (2)$$

- 1) Déterminer les points d'équilibres du système (2).
- 2) Vérifiez que la fonction $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x)$ est une fonction de Lyapunov et étudier la stabilité de point d'équilibre $(0,0)$ utilisez la fonction V .
- 3) Si $k = 0$, étudier la stabilité au $(0,0)$ utilisez la linéarisation de système (2).

Exercice 0.3

Soit le système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n) = r^2 x_n + (1 - r)x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

où $x_n \in \mathbb{R}$ et $r > 1$ est un paramètre réel.

- 1) Déterminer les points fixes du système (3) et étudier la stabilité des points fixes.
- 2) Donner la condition qui déterminer les points périodiques d'ordre k (k -cycle).
- 3) Déterminer la fonction g telle que

$$g(x) = f^2(x) - x \quad \text{où} \quad f^2 = f \circ f. \quad (4)$$

- 4) Si $x = 1$ une solution particulière de (4) montrer que les points périodiques d'ordre 2 sont déterminés par l'équation suivante

$$(1 - r)^2 x^2 + (1 - r)(1 + r^2)x + 1 + r^2 = 0$$

- 5) Déterminer la condition sur r pour l'existence des points périodiques d'ordre 2.

Bon courage Dr. Djeddi Kamel.