

correction d'examen

Master 2. systèmes dynamique 2024/2025

Exercice 1 6pts

$$1- \begin{cases} \dot{x} = \mu(1-y^2)x - y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (1,5)$$

2. Points d'équilibre est $(0,0)$ 1,5

$$3- \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

La fonction caractéristique est

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \quad (0,5)$$

alors $\Delta = \mu^2 - 4$

si $\mu = 0$ $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$
points centre 0,5

si $0 < \mu < 2$, $\lambda_1 = \frac{\mu + i\sqrt{4-\mu^2}}{2}$

$$\lambda_2 = \frac{\mu - i\sqrt{4-\mu^2}}{2}$$

pts Foyer instable 0,5

si $\mu \geq 2$ alors $\lambda_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} > 0$
 $\lambda_2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} > 0$

pts noeud instable 0,5

Exercice 2 6pts

1. les points d'équilibre sont $\{(n\pi, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$ 1,5

2. Fonction de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{g}{\ell} (1 - \cos x) + \frac{1}{2} y^2$$

a) $V(0, 0) = 0$ 0,5

b) $V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$ 0,5

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} V(x, y) = +\infty$ 0,5

d) stabilité de $(0, 0)$

$$\dot{V}(x, y) = -\frac{k}{m} y^2 \leq 0 \quad (0,5)$$

alors le système est 0,5
asymptotiquement
stable au $(0, 0)$

3. si $k=0$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

l'équation caractéristique est $\lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0$ 0,5

0,5 $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{\ell}}$
centre 0,5

Exercice 3 . 8pts

1- points fixes et

$$x^* = r+1, \quad x^* = 0 \quad (0,25+0,25)$$

$$f'(x) = r^2 + 2(1-r)x$$

$$f'(0) = r^2 \text{ car } r > 1 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow r^2 > 1 \Rightarrow |f'(0)| > 1$$

alors $x^* = 0$ est instable $(0,25)$

$$f'(r+1) = 2 - r^2 \Rightarrow |f'(r+1)| < 1 \quad (0,25)$$

$x^* = r+1$ est stable si $1 < r < \sqrt{3}$

et instable si $r > \sqrt{3}$ $(0,25)$

$$\text{si } r = \sqrt{3} \Rightarrow |f'(\sqrt{3}+1)| = 1 \quad (0,25)$$

le point $x^* = \sqrt{3} + 1$ est indifférent

2- k est petit entier satisfaisant

$$(1,5) \quad f^k(x) = x, \quad f^k = f \circ f \circ \dots \circ f : k \text{ fois}$$

$$3- \quad g(x) = x[(1-r)^3 x^3 + 2\lambda(\lambda-1)^2 x^2 + (1-\lambda^3)x + \lambda^2 - 1]$$

$$g(1) = g(0) = 0 \text{ alors}$$

$$g(x) = x(x-1) \left[(1-r)^3 x^2 + (1-r)(1+r^2)x + 1+r^2 \right] \quad (1,5)$$

$$= 0$$

$$\Delta = (1-r)^2 (r^2+1) (r^2-3)$$

$$x_1 = \frac{-1-r^2 + \sqrt{(r^2+1)(r^2-3)}}{2(r-1)} \quad (0,5)$$

$$x_2 = \frac{-1-r^2 - \sqrt{(r^2+1)(r^2-3)}}{2(r-1)} \quad (0,5)$$

$$\text{si } r = \sqrt{3}$$

$$(0,5) \quad x_3 = -1 - \sqrt{3}$$

$$5- \text{ si } 1 < r < \sqrt{3}$$

existe 2 points
périodique d'ordre 2

$$(0,5) \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1$$

$$\text{si } r = \sqrt{3}$$

existe trois points
périodique d'ordre 2

$$(0,5) \quad x_3 = -1 - \sqrt{3}$$

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 1$$

$$\text{si } r > \sqrt{3}$$

(0,5) existe 4 points
périodique
d'ordre 2 sont
 $\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$