Contrôle 1

Prof. Bouziani Abdelfatah

January 2025

Exercice 1. (5 pts)

Soit $f(x) = x \cdot \sin(x)$.

- Approximer $f'(3.4)$ en utilisant la formule des différences centrées à quatre points avec $h = 0.2$.
- Approximer $f'(3.4)$ en utilisant la formule des différences centrées à quatre points avec $h = 0.1$.
- Appliquer une forme appropriée de l'extrapolation de Richardson aux résultats de (a) et (b) pour obtenir une estimation supérieure.
- Calculer les erreurs relatives en pourcentage pour les résultats de (a) à (c), comparer et discuter.

Exercice 2. (5 pts)

Évaluer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} dx$$

avec une précision de cinq chiffres significatifs, en prenant $n = 6$ sous-intervalles, en utilisant la méthode de Simpson 1/3, et donner son Code MATLAB.

Exercice 3. (5 pts)

Trouvez le coefficient de x^4 dans le polynôme d'interpolation de Newton $P_4(x)$ pour les points de données suivants : $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, et $(4, y)$. Le coefficient de x^4 est 0.25. Déterminez y .

Exercice 4. (5 pts)

La concentration de bactéries dans un réservoir varie selon la relation suivante :

$$C(t) = 3e^{-1.4t} + e^{-0.2t}.$$

Calculer, en utilisant MATLAB et la méthode de Newton-Raphson, le temps t nécessaire pour que la concentration de bactéries atteigne $C = 0.7$.

Solution de d'Exercice 1.

1. Calcul de $f'(3.4)$ avec $h = 0.2$

La formule des différences centrées à quatre points est donnée par :

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}.$$

Pour $x = 3.4$ et $h = 0.2$, la formule devient :

$$f'(3.4) \approx \frac{-f(3.8) + 8f(3.6) - 8f(3.2) + f(3.0)}{2.4} = \frac{-4.445}{2.4} \approx -1.852.$$

2. Calcul de $f'(3.4)$ avec $h = 0.1$

Pour $x = 3.4$ et $h = 0.1$, la formule devient :

$$f'(3.4) \approx \frac{-f(3.6) + 8f(3.5) - 8f(3.3) + f(3.2)}{1.2} = \frac{-2.225}{1.2} \approx -1.854.$$

3. Extrapolation de Richardson

L'extrapolation de Richardson permet d'améliorer l'estimation de la dérivée en combinant les résultats obtenus avec deux pas différents. La formule est donnée par :

$$A^{(1)}(h) \approx \frac{4 \cdot A(h/2) - A(h)}{3}.$$

En utilisant les résultats précédents ($f'(3.4, h = 0.2) \approx -1.852$ et $f'(3.4, h = 0.1) \approx -1.854$), on a :

$$A^{(1)}(3.4) \approx \frac{4 \cdot (-1.854) - (-1.852)}{3} \approx -1.855.$$

4. Calcul des erreurs relatives

Supposons que la valeur exacte de $f'(3.4)$ soit f'_{exact} . Les erreurs relatives en pourcentage sont calculées comme suit :

$$Erreur_{relative} = \left| \frac{f'_{approx} - f'_{exact}}{f'_{exact}} \right| \times 100\%.$$

Les erreurs relatives pour chaque méthode sont :

- Avec $h = 0.2$:

$$Erreur = \left| \frac{-1.852 - f'_{exact}}{f'_{exact}} \right| \times 100\%.$$

- Avec $h = 0.1$:

$$Erreur = \left| \frac{-1.854 - f'_{exact}}{f'_{exact}} \right| \times 100\%.$$

- Avec extrapolation de Richardson :

$$Erreur = \left| \frac{-1.855 - f'_{exact}}{f'_{exact}} \right| \times 100\%.$$

Calcul de la valeur exacte de $f'(3.4)$

La dérivée exacte de $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x)$ est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \cos(x).$$

En évaluant cette expression pour $x = 3.4$, nous avons :

$$f'(3.4) = \frac{\sin(3.4)}{2\sqrt{3.4}} + \sqrt{3.4} \cdot \cos(3.4) = -1.8523.$$

donc Calcul des erreurs relatives en pourcentage

Pour comparer les approximations obtenues précédemment avec la valeur exacte $f'_{exact}(3.4) \approx -1.8523$, calculons les erreurs relatives en pourcentage. La formule est donnée par :

$$Erreurrelative(\%) = \left| \frac{f'_{approx} - f'_{exact}}{f'_{exact}} \right| \times 100\%.$$

a. Pour $h = 0.2$

L'approximation avec $h = 0.2$ était :

$$f'(3.4, h = 0.2) \approx -1.852.$$

L'erreur relative est :

$$Erreurrelative = \left| \frac{-1.852 - (-1.8523)}{-1.8523} \right| \times 100\% \approx 0.016\%.$$

b. Pour $h = 0.1$

L'approximation avec $h = 0.1$ était :

$$f'(3.4, h = 0.1) \approx -1.854.$$

L'erreur relative est :

$$Erreurrelative = \left| \frac{-1.854 - (-1.8523)}{-1.8523} \right| \times 100\% \approx 0.092\%.$$

c. Pour l'extrapolation de Richardson

L'approximation par extrapolation de Richardson était :

$$f'(3.4, Richardson) \approx -1.855.$$

L'erreur relative est :

$$Erreurrelative = \left| \frac{-1.855 - (-1.8523)}{-1.8523} \right| \times 100\% \approx 0.146\%.$$

Comparaison et discussion

- Approximation avec $h = 0.2$: Cette approximation a une erreur relative de seulement 0.016%, ce qui montre qu'elle est extrêmement précise.
- Approximation avec $h = 0.1$: L'erreur relative est légèrement plus élevée (0.092%) que celle avec $h = 0.2$. Cela peut être attribué à des erreurs d'arrondi dans les calculs numériques.
- Extrapolation de Richardson : L'extrapolation donne une erreur relative de 0.146%, la plus élevée des trois. Cela indique que, dans ce cas, l'extrapolation de Richardson n'a pas amélioré la précision. Ce phénomène peut être dû à des erreurs d'arrondi ou à des limitations spécifiques de la méthode utilisée.

Solution de d'Exercice 2.

Nous devons évaluer l'intégrale suivante avec $n = 6$ sous-intervalles :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} dx$$

La formule de Simpson 1/3 pour une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est donnée par :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\text{odd}} f(x_i) + 2 \sum_{\text{even}} f(x_i) + f(x_n) \right],$$

où :

- n est le nombre de sous-intervalles (doit être pair),
- $h = \frac{b-a}{n}$ est la largeur de chaque sous-intervalle,
- $x_i = a + i \cdot h$ sont les points d'évaluation.

Pour cette intégrale :

- $a = 0$,

- $b = \frac{\pi}{2}$,
- $n = 6$ (nombre pair, donc valide pour Simpson 1/3),
- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2-0}{6} = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618$.

Les points x_i sont :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad \dots, \quad x_6 = b = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction à intégrer est :

$$f(x) = \sqrt{\cos(x)}.$$

Calculons $f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 6$:

- $x_0 = 0, f(x_0) = \sqrt{\cos(0)} = \sqrt{1} = 1.0,$
- $x_1 = \frac{\pi}{12}, f(x_1) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \approx \sqrt{0.9659} \approx 0.9828,$
- $x_2 = \frac{\pi}{6}, f(x_2) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0.9315,$
- $x_3 = \frac{\pi}{4}, f(x_3) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0.8409,$
- $x_4 = \frac{\pi}{3}, f(x_4) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071,$
- $x_5 = \frac{5\pi}{12}, f(x_5) = \sqrt{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \approx \sqrt{0.2588} \approx 0.5087,$
- $x_6 = \frac{\pi}{2}, f(x_6) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{0} = 0.0.$

Substituons les valeurs de $f(x_i)$ dans la formule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} dx \approx \frac{0.2618}{3} [1.0 + 4(0.9828 + 0.8409 + 0.5087) + 2(0.9315 + 0.7071) + 0.0] \approx 1.1875.$$

Code MATLAB

Voici un code MATLAB pour appliquer la méthode de Simpson 1/3 :

```
[language=Matlab] a = 0; b = pi/2; n = 6; h = (b - a) / n;
f = @(x) sqrt(cos(x));
x = linspace(a, b, n+1);
y = f(x);
I = (h/3) * (y(1) + 4 * sum(y(2:2:end-1)) + 2 * sum(y(3:2:end-2)) + y(end));
fprintf('Valeur approximative de l'intégrale :
```

Résultat attendu

La méthode de Simpson 1/3 donne une estimation de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} dx \approx 1.1875$$

avec une précision de 5 chiffres significatifs.

Solution de d'Exercice 3.

Le temps $t \approx 2.3617$ secondes est nécessaire pour que la concentration de bactéries atteigne $C = 0.7$, avec une précision à 4 décimales.

x	$f(x)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
0	1				
		1			
1	2		0		
		1		$\frac{1}{6}$	
2	3		$\frac{1}{2}$		$\frac{y-9}{24}$
		2		$\frac{y-8}{6}$	
3	5		$\frac{y-7}{2}$		
		$y-5$			
4	y				

Table 1: Tableau corrigé des différences divisées

The interpolating polynomial $P_4(x)$ is:

$$P_4(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Substituting the values:

$$P_4(x) = 1 + (x - 0) + \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1)(x - 2) + \frac{y - 9}{24}(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

The coefficient of x^4 is given as 0.25. Thus:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.25$$

This implies:

$$\frac{y - 9}{24} = 0.25 \Rightarrow y = 15$$

Solution de d'Exercice 4.

La concentration de bactéries dans un réservoir varie selon la relation suivante :

$$C(t) = 3e^{-1.4t} + e^{-0.2t}.$$

Calculer, en utilisant la méthode de ****Newton-Raphson****, le temps t nécessaire pour que la concentration de bactéries atteigne $C = 0.7$.

La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour trouver une solution à une équation $f(t) = 0$. La formule itérative est donnée par :

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}.$$

Ici, nous devons reformuler l'équation $C(t) = 0.7$ comme suit :

$$f(t) = 3e^{-1.4t} + e^{-0.2t} - 0.7 = 0.$$

Expression pour $f(t)$:

$$f(t) = 3e^{-1.4t} + e^{-0.2t} - 0.7.$$

Dérivée de $f(t)$, $f'(t)$:

$$f'(t) = -1.4 \cdot 3e^{-1.4t} - 0.2e^{-0.2t}.$$

La formule de Newton-Raphson devient alors :

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}.$$

Choisissons une approximation initiale $t_0 = 0.5$ et procédons aux calculs.

Itération 0 : $t_0 = 0.5$

$$t_1 = 1.2477.$$

$$t_2 = 1.2477 + 0.6785 = 1.9262.$$

$$t_3 = 1.9262 + 0.4355 = 2.3617.$$