RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ D'OUM EL BOUAGHI

FACULTÉ DE SCIENCES EXACTES SCIENCES DE NATURE ET DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Notes de cours et exercices

Enseignant : Mohamed Saadi

Compléments sur l'intégration et les espaces de Lebesgue

Année universitaire 2023/2024

Table des matières

I Notes de cours **4**

1 Rappels et compléments sur la mesure et l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ **8**

1.1 Définitions 8

1.2 Définition et propriétés élémentaires de l'espace $\mathcal{L}^1$ 10

1.3 Lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue 12

2 La mesure et L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ **13**

2.1 Produit fini d'espaces mesurés 13

2.1.1 Mesure produit 13

2.1.2 Mesrue de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ 14

2.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ 15

2.2.1 Définitions et propriétés élémentaires 15

2.2.2 Théorème de convergence dominée 19

2.2.3 Intégrale dépendant d'un paramètre 20

2.3 Théorème de Fubini-Tonelli et théorème de Fubini 22

2.4 Formule de changement de variables 23

2.4.1 Théorème de changement de variables 23

2.4.2 Exemples de changement de variables 24

3 Espaces L^p 28

3.1 Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 28

3.1.1 Quelques rappels 28

3.1.2 Espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$ 29

3.1.3 Espaces $L_p(\Omega)$ 34

3.2 Convergence dans les espaces L^p 35

3.3 Complétude des espaces L^p 36

3.4 Produit de convolution 39

3.5 Sous-espaces denses dans $L_p(\Omega)$ 43

3.5.1 L'espace des fonctions étagées 43

3.5.2 L'espace des fonctions continues à support compact 45

3.5.3 L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact 46

3.6 Réflexivité, Séparabilité, dual de L^p 50

3.6.1 Quelques rappels et définitions 50

3.6.2 Réflexivité de L^p 52

3.6.3 Séparabilité de L^p 55

3.6.4 Dual de L^p 56

II Exercixes résolus 58

Introduction

Ce polycopié de cours est destiné principalement aux étudiants de première année master mathématiques appliquées.

Cette ressource pédagogique a été conçue pour offrir une exploration approfondie des concepts essentiels en mathématiques liés à l'intégration et les espaces de Lebesgue.

En parcourant les sections de ce polycopié, on découvrira une palette de sujets fondamentaux. On commencera par revisiter les notions fondamentales sur la mesure et l'intégrale de Lebesgue en dimonsion un, en fournissant des définitions claires et des éléments complémentaires pour asseoir une base solide. On établira également un pont entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue, ce qui permettra de mieux comprendre leur relation.

Par la suite, on plongera dans l'étude de l'intégration en dimension $n \geq 2$, en abordant des concepts tels l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, le théorème de convergence dominée, les intégrales paramétriques, le théorème de Fubini-Tonelli, et les formules de changement de variables.

La suite de la partie de cours de ce polycopié se concentrera sur les espaces L^p, où on étudiera leur définition et leurs propriétés, notamment en ce qui concerne les inégalités classiques et la convergence dans ces espaces. On aura également l'occasion d'explorer des sujets plus avancés tels que la complétude des espaces L^p et les sous-espaces denses dans L^p...

On encourage également à explorer les exercices résolus qui font l'objet de la deuxième partie de ce manuscrit.

Première partie

Notes de cours

Notations, rappels et conventions

On commence par quelques notations, rappels et convensions concernant la théorie de mesure.

• On utilisra la convsion $0 \times \infty = 0$.

• E désigne un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

• $\mathbb{1}_A$ désinge la fonction indicatrice de l'ensemble A définie par $\mathbb{1}_A := \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & sinon. \end{cases}$

• Une classe $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ est appelée algèbre si $E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est stable par réunion et par passage au complémentaire.

• Une classe $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ est appelée **tribu** (ou $\sigma-$algèbre) si $E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

• Un élément d'une tribu $\mathcal{E}$ est dit $\mathcal{E}-$ mesureble ou mesurable par rapport à $\mathcal{E}$ ou mesurable s'il n'ya pas de risque de confusion.

• L'espace $(E, \mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ une tribu est appelé espace mesurable.

• La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est la plus petite tribu conenant $\mathcal{A}$.

• La tribu borélienne sur un espace topologique E notée $\mathcal{B}(E)$ est la tribu engendrée par les ouverts de cette espace, les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont les boréliens de E.

• La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par la classe des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, ses émléments appelées partie boréliennes, ou les boréliens.

• Une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $[0, +\infty]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

— $\mu(\phi) = 0$.

— (la $\sigma-$additivité) $\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mu(A_n)\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ deux à deux disjoints.

• Si μ est une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ alors $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

• Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Un sous-ensemble N de E est dit négligeable s'il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

• Dire qu'une propriété P a lieu presque partout (p. p.) sur un ensemble mesurable A (de mesure strictement positive) signifie que l'ensemble $\{x \in A : P \text{ n'a pas lieu}\}$ est négligeable.

• Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ pour toute $A \in \mathcal{F}$.

• Une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite borélienne (i.e. $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

• Soit $B \subset \mathbb{R}^n$. La tribu borélienne induite par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sur B est $\mathcal{B}(B) := \{B \cap A \;\; avec \;\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.

• Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note

— $C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, continue\}$.

— Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, de \;\; classe \;\; C^k\}$.

— $\mathcal{M}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, mesurable\}$.

On rappelle que $C(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$.

• Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite étagée s'il existe des réelles $y_1, y_2, ..., y_n$ et des sous-ensembles de Ω mesurables $A_1, A_2, ..., A_N$ deux à deux disjoints (avec $N \in \mathbb{N}$) tels que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. Si les A_i sont des intervalles de $\mathbb{R}$ alors f est dite en escalier.

Chapitre 1

Rappels et compléments sur la mesure et l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, on travaille dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1.1 Définitions

Théorème 1.1 (et définition de la mesure de Lebesgue)

Il existe une mesure λ_1 et une seule sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie $\lambda_1(A) = +\infty$ si A est un intvalle non borné de $\mathbb{R}$ et $\lambda_1(A) = b - a$ si $A \in \Big\{[a,b],]a,b[,]a,b], [a,b[\Big\}$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$. λ_1 est appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On vérifie facilement que si A est un ensemble de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable alors A est borélien et $\lambda_1(A) = 0$, en particulier $\lambda_1(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1 (Invariance par translation de $\boldsymbol{\lambda_1}$)

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda_1(B + a) = \lambda_1(B)$, avec $B + a = \{x + a : x \in B\}$.

Définition 1.1 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive)

Soit f une fonction étagée positive. L'intégrale de Lebesgue de la fonction f est définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_1(A_i).$$

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive est un élément de $[0, +\infty]$. Elle est finie si est seulment si la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ est finie.

Définition 1.2 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive)

Soient $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. L'intégrale de Lebesgue de la fonction f est

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 = \sup_{\varphi} \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda_1 : \varphi \text{ étagée positive et } \varphi \leq f \Big\}.$$

Proposition 1.2

Soient $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Si $f \leq g p.p.$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 \leq \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_1$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable alors la fonction $|f|$ est mesurable et son intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est bien définie mais peut être égale à $+\infty$.

Définition 1.3

Une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda_1 < +\infty$.

Pour définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable de signe quelconque, on utilise l'égalité $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ := max(f, 0)$ et $f^- := max(-f, 0)$.

Les fonctions f_+ est f_- sont majorées par $|f|$ donc si f est intégrable alors f_+ est f_- sont intégrables.

Définition 1.4 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable de signe quelconque)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. L'intégrale de Lebesgue de la fonction* f *est*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda_1 - \int_{\mathbb{R}} f^- d\lambda_1 \tag{1.1}$$

Définition 1.5 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$)

Soient f *une fonction mesurable et* B *un sous-ensemble mesurable de* $\mathbb{R}$*. L'intégrale de Lebesgue de la fonction* f *sur* B *est*

$$\int_B f d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_B d\lambda_1.$$

1.2 Définition et propriétés élémentaires de l'espace $\mathcal{L}^1$

Dans ce paragraphe B désigne un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.

Définition 1.6

On dit qu'une fonction f *est intégrable au sens de Lebesgue sur* B *si* $\displaystyle\int_B |f| d\lambda_1 < +\infty$.

On note $\mathcal{L}^1(B)$ *l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur* B.

Théorème 1.2 (de convergence monotone de Beppo Levi)

Soit $f_j, j \geq 1$ *une suite croissante (i.e.* $f_j \leq f_{j+1}$*) de fonctions mesurables sur* B *à valeurs dans* $[0, +\infty]$*(On pose* $f(x) = \lim_j f_j(x), x \in B$*, la limite est dans* $[0, +\infty]$*). Alors,* $\displaystyle\int_B f d\lambda_1 = \lim_j \int_B f_j d\lambda_1$.

Proposition 1.3

$\mathcal{L}^1(B)$ *est un espace vectoriel et* $f \longmapsto \displaystyle\int_B f d\lambda_1$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{L}^1(B)$.

Proposition 1.4

1) *Soit* $f_j, j \geq 1$ *une suite de fonctions mesurables sur* B *à valeurs dans* $[0, +\infty]$*, alors*

$$\int_B \sum_{j=1}^{\infty} f_n d\lambda_1 = \sum_{j=1} \int_B f_j d\lambda_1.$$

2) *Soit* $B_i, i = 1, 2, ...$ *des sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *mesurables et disjoints, et* f *une fonction mesurable positive, alors*

$$\int_{\bigcup_{i\geq 1} B_i} f d\lambda_1 = \sum_{i\geq 1}^{\infty} \int_{B_i} f d\lambda_1$$

Proposition 1.5

— *Si* $\lambda_1(B) = 0$ *alors* $\int_B f d\lambda_1 = 0$ *pour toute fonction mesurable* f.

— *Si* f *et* g *sont deux fonctions mesurables telle que* $f = g$ *p.p. sur* B *alors* $\int_B f d\lambda_1 = \int_B g d\lambda_1$ *en particulier si* $f = 0$ *p.p. sur* B *alors* $\int_B f d\lambda_1 = 0$.

— *Si* f *est une fonction mesurable positive sur* B *et* $\int_B f d\lambda_1 = 0$ *alors* $f = 0$ *p.p. sur* B.

Proposition 1.6

Soit $f \in \mathcal{L}^1(B)$ *alors :*

1. f *est finie p. p. sur* B.
2. $\left| \int_B f d\lambda_1 \right| \leq \int_B |f| d\lambda_1$.

Proposition 1.7

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(B)$ *telles que* $f \geq g$ *p.p. sur* B *alors :*

$$\int_B f d\lambda_1 \geq \int_B g d\lambda_1.$$

Proposition 1.8

Soient $g \in \mathcal{L}^1(B)$ *et* $f \in \mathcal{B}(B)$ *telles que* $|f| \leq g$ *p.p. sur* B *alors* $f \in \mathcal{L}^1(B)$ *et*

$$\left| \int_B f d\lambda_1 \right| \leq \int_B g d\lambda_1.$$

1.3 Lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Proposition 1.9

Si $-\infty < a < b < \infty$ et f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann alors $f \in \mathcal{L}^1(]a, b[)$ et $\underbrace{\int_{]a,b[} f d\lambda_1}_{Lebesgue} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{Riemann}$.

Dans les deux propositions suivantes, on suppose que f est bornée sur l'intervalle $]-\infty, b[, b \in \mathbb{R}$ $\Big($ ou bien $]a, +\infty, [, a \in \mathbb{R}\Big)$ ou f est non bornée sur $]a, b[, a, b \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale généralisée.

Proposition 1.10

Si $-\infty < a < b \leq \infty$ et f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ pour tout $c \in]a, b[$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(]a, b[)$ si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absulement convergente, dans ce cas, $\underbrace{\int_{]a,b[} f d\lambda_1}_{Lebesgue} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{Riemann}$.

Proposition 1.11

Si $-\infty \leq a < b < \infty$ et f est intégrable au sens de Riemann sur $[c, b]$ pour tout $c \in]a, b[$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(]a, b[)$ si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absulement convergente, de plus, $\underbrace{\int_{]a,b[} f d\lambda_1}_{Lebesgue} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{Riemann}$.

Proposition 1.12

Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ n'est que semi-convergente alors $f \notin \mathcal{L}^1(]a, b[)$.

Chapitre 2

La mesure et L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Dans la suite de ce cours, Ω désigne un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Produit fini d'espaces mesurés

2.1.1 Mesure produit

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés, on s'intérèsse à l'espace produit

$$E \times F := \{(x, y) : x \in E \text{ } et \text{ } y \in F\}.$$

On appelle pavé un élément de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$.

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les pavés de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ i.e. $\mathbb{P} := \{A \times B : A \in \mathcal{E} \text{ } et \text{ } B \in \mathcal{F}\}$.

Définition 2.1 (tribu produit)

La tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est la tribu de $E \times F$ engedrée par les pavés i.e. $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\mathbb{P})$.

Définition 2.2

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit que la mesure* μ *est* $\sigma-$*finie s'il existe une suite* $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{E}$ *telle que* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *et* $\mu(A_i) < \infty, \forall i \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.1

La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est* $\sigma-$*finie, on prend par exemple* $A_i =]-i, i[, i \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.1 (et définition de mesure produit)

Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *et* $(F, \mathcal{F}, \nu)$ *deux espaces mesurés tels que* μ *et* ν *sont* $\sigma-$*finies. Alors il existe une et une seule mesure sur* $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$*(appelée mesure produit) notée* $\mu \otimes \nu$ *telle que*

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \forall (A, B) \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}.$$

2.1.2 Mesrue de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$

On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la tribu engendrée par les ouverts de cette espace.

Proposition 2.2

La tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ *notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *est la tribu engendrée par les pavés de* $\mathbb{R}^n$ *c'est-à-dire les ensembles de la forme* $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$*, où* $I_j, 1 \leq j \leq n$ *sont des intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$*. Autrement dit la tribu borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *coïncide avec la tribu produit* $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{n\otimes} := \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes ... \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n\ fois}$.

Définition 2.3

La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *est*

$$\lambda_n = \underbrace{\lambda_1 \otimes \lambda_1 \otimes ... \otimes \lambda_1}_{n\ fois}.$$

Proposition 2.3

Pour tout pavé $P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda_n(P) = \lambda_1(I_1)\lambda_1(I_2)...\lambda_1(I_n).$$

2.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Dans cette section on travaille dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est étagée si elle est de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{2.1}$$

où, $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, ..., N$.

La représentation (2.1) est **normale** si les A_i sont deux à deux disjoints, elle est **canonique** si les A_i sont deux à deux disjoints et non vides et si les a_i sont non nuls.

Une fonction étagée admet une représentation canonique unique modulo une permutation des termes de la somme.

2.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.4 (Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$)

— *Si f est une fonction étagée positive de représentation canonique $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors l'intégrale de Lebesgue de f sur $\mathbb{R}^n$ est $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n := \sum_{i=1}^{N} a_i \lambda_n(A_i)$.*

— *Si $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable, alors l'intégrale de Lebesgue de f sur $\mathbb{R}^n$ est*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n := sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\lambda_n : \varphi \text{ étagée positive et } \varphi \leq f \Big\}$$

— *Une fonction mesurable* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est dite intégrable sur* $\mathbb{R}^n$ *si* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n < +\infty$.

— *Si* $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ *est une fonction mesurable intégrable sur* $\mathbb{R}^n$ *alors l'intégrale de Lebesgue de* f *sur* $\mathbb{R}^n$ *est* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n := \int_{\mathbb{R}^n} f_+ d\lambda_n - \int_{\mathbb{R}^n} f_- d\lambda_n$.

— *Soient* $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *et* $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *une fonction mesurable, alors* f *a une intégrale de Lebesqgue si et seulement si* $f\mathbb{1}_\Omega$ *en a une, et dans ce cas on pose* $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_n := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega f d\lambda_n$. $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_n$ *est appellée l'intégralle de Lebesgue de* f *sur* Ω.

Convension

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_n$ existe. S'il n'y a pas de risque de confusion, on utilise les notations suivantes;

- $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ désigne $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_n$.
- $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx_1 dx_2 ... dx_n$ désigne $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_n$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ on écrit $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)dxdy$ au lieu de $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)d(x,y)$ qui désigne $\displaystyle\int_\Omega f d\lambda_2$.

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ désigne $\displaystyle\int_{[a,b]} f d\lambda_1$.

Définition 2.5

Soitent $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurables.*

— *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ *existe alors* $\displaystyle\int_\Omega \alpha f(x)dx$ *existe et* $\displaystyle\int_\Omega \alpha f(x)dx = \alpha \int_\Omega f(x)dx$.

— *Si* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_\Omega g(x)dx$ *existent et* $f \leq g$ *p.p sur* Ω *alors* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx$.

— *Si* $f = g$ *p.p. sur* Ω *et* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ *exite alors* $\displaystyle\int_\Omega g(x)dx$ *existe et* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx$, *en particulier, si* $f = 0$ *p.p. sur* Ω *alors* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 0$.

— *Si* f *est positive et* $\int_\Omega f(x)dx = 0$ *alors* $f = 0$ *p.p. sur* Ω.
— *Si* Ω *est négligeable alors* $\int_\Omega h(x)dx = 0$ *pour toute fonnction mesurable* h.

Définition 2.6

Soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurable. On dit que* f *est intégrable au sens de Lebesgue sur* Ω *(ou seulement intégrable sur* Ω*) si* $\int_\Omega |f(x)|dx$ *est finie. On pose* $\mathcal{L}^1(\Omega) := \{f$ *mesurable* $: \int_\Omega |f(x)|dx < \infty\}$.

Proposition 2.4

Soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurable. Les propositions suivantes sont équivalantes.*

1. f *est intégrable sur* Ω.
2. f_+ *et* f_- *sont intégrables sur* Ω.
3. $|f|$ *est intégrable sur* Ω.

Proposition 2.5 (théorème de convergence monotone)

Soit $(f_j)_j$ *une suite de fonctions mesurables croissante p.p et positives p.p. On pose*

$$f(x) := \begin{cases} \lim_j f_j(x), \text{si cette limite existe,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

alors $\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

Exemple 2.2

On considère dans l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ *la suite* $f_j = \mathbb{1}_{[0,j]}$, $j \in \mathbb{N}^*$. *La suite* (f_j) *est monotone croissante vers* $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$. *On a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_j \int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx = \lim_j j = +\infty.$$

Proposition 2.6

Soit $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurables ont des intégrales. Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_\Omega (f + \alpha g)(x)dx = \int_\Omega f(x)dx + \alpha \int_\Omega g(x)dx,$$

si $f + \alpha g$ *et* $\int_\Omega f(x)dx + \alpha \int_\Omega g(x)dx$ *sont bien définies .*

Proposition 2.7

Soit $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurables.*

1. *Si* $\int_\Omega f(x)dx$ *existe alors* $\int_\Omega |f(x)|dx$ *existe et* $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$.
2. *Si* $|f| < g$ *p.p. sur* Ω *et* g *est intégrable sur* Ω *alors* f *est intégrable sur* Ω.
3. *Si* $\int_\Omega f(x)dx$, $\int_\Omega g(x)dx$ *et* $\int_\Omega (f+g)(x)dx$ *existent alors*
$$\left| \int_\Omega (f+g)(x)dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|dx + \int_\Omega |g(x)|dx.$$

Proposition 2.8

Soit $(f_j)_{j \geq 1}$ *une suite des fonctions positives mesurables définies sur* Ω. *Alors, les intégrales de lebesgue sur* Ω *de* $f, f_j, j \in \mathbb{N}^*$ *exitent et*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^\infty f_j \Big)(x)dx = \sum_{j=1}^\infty \int_\Omega f_j(x)dx.$$

Proposition 2.9

Soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction telle que* $\int_\Omega f(x)dx$ *existe.*

— *On suppose que* $f \geq 0$ *p.p. sur* Ω. *Si* A *un sous-ensemble mesurable de* Ω *alors* $\int_A f(x)dx$ *existe et* $\int_A f(x)dx \leq \int_\Omega f(x)dx$.

— *Si* $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} A_j$, *avec* A_j *sont mesurables et deux à deux disjoints alors* $\int_\Omega f(x)dx = \sum_{j \geq 1} \int_{A_j} f(x)dx$.

— *Si* $A_j \nearrow \Omega$ *avec* A_j *sont mesurables alors* $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = \lim_j \int_{A_j} f(x)dx$.

2.2.2 Théorème de convergence dominée

Proposition 2.10 (lemme de Fatou)

Soient $(f_j)_{j\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables et positives p.p. sur* Ω *et* $f = \liminf_j f_j$ *alors*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_j \int_\Omega f_j(x)dx.$$

Corollaire 2.1

Soit $(f_j)_{j\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* Ω, *qui converge simplement vers* f *et telle que la suite des intégrales* $\displaystyle\int f_j dx$ *est majorée par* M *alors*

$$\int_\Omega f dx \leq M.$$

Proposition 2.11

[thérème de convergence dominée]Soient $(f_j)_{j\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables sur* Ω *telle que*

— *il existe une fonction* g *intégrable sur* Ω *telle que* $|f_j| \leq g$ *p.p. sur* Ω *pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$.

— *il existe une fonction mesurable* f *telle que* $f_j \to f$ *p.p. sur* Ω. *Alors*

1. f *est intégrable sur* Ω.
2. $\displaystyle\int_\Omega |f_j(x) - f(x)|dx \to 0$.
3. $\displaystyle\lim_j \int_\Omega f_j(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$.

Exemple 2.3

Etudions la limite quand j *tend vers l'infini de* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^j(x)dx$. *On a pour* $x \in [0, \pi/4[$: $|\tan(x)| < 1$, *donc* $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \tan^j(x) = 0$. *Et on a* $|\tan^j(x)| \leq 1 = g(x)$, *avec* g *intégrable* *sur* $[0, \pi/4[$. *Donc, par convergence dominée on a*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^j(x)dx = \int_0^{\pi/4} 0dx = 0.$$

2.2.3 Intégrale dépendant d'un paramètre

Proposition 2.12 (Continuité sous l'intégrale)

Soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ *une fonction de* $I \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}$ *(où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*).*

On suppose que

— *Pour tout* $t \in I$; $x \mapsto f(t,x)$ *est intégrable sur* Ω.

— *Pour presque tout* $x \in \Omega$; $t \mapsto f(t,x)$ *est continue sur* I.

— *Il existe une fonction* g *intégrable, telle que pour tout* $t \in I$ *et pour presque tout* $x \in \Omega$

$$|f(t,x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int_\Omega f(t,x)dx$$

est bien définie pour tout $t \in I$, *et est continue sur* I.

Proposition 2.13 (dérivation sous l'intégrale)

Soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ *une fonction de* $I \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}$ *(où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*).*

On suppose que

— *Pour tout* $t \in I$; $x \mapsto f(t,x)$ *est intégrable sur* Ω.

— *Pour presque tout* $x \in \Omega$; $t \mapsto f(t,x)$ *est dérivable sur* I *de dérivée notée* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

— *Il existe une fonction* g *intégrable sur* Ω, *telle que pour tout* $t \in I$ *et pour presque tout* $x \in \Omega$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int_{\Omega} f(t,x)dx$$

est dérivable sur I, et pour tout $t \in I$ on a

$$F'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

Exemple 2.4

Soit F la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(x^2+1)}dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}+e^{-itx}}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx. \end{aligned}$$

On peut calculer la dérnière intégrale (exercice d'analyse complexe) et on trouvera $F'(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$. Mais $F(0) = 0$ alors $F(t) = \mathrm{sgn}(t)\frac{\pi}{2}(1 - e^{-|t|})$.

Proposition 2.14 (Intégration d'une série)

Soit $(f_j)_{j\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_j(x)|dx < \infty$. Alors,

— *La série $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)d\lambda_n$ converge p.p. sur Ω.*

— *La fonction $f(x) := \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \text{ si la serie converge,} \\ 0, sinon \end{cases}$ est intégrable sur Ω et*

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_j(x)dx < \infty.$$

2.3 Théorème de Fubini-Tonelli et théorème de Fubini

Théorème 2.1 (Fubini-Tonelli pour fonctions positives)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors

$$\int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \Big) dx = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx \Big) dy = \int_{\Omega_1 \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Remarque 2.1

Les hypothèses du théorème précédent n'assure pas l'intégrabilité de F, donc on peut avoir $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy = +\infty$.

Théorème 2.2 (Tonelli)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty, \qquad \textit{pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy \Big) dx < \infty$$

Alors, $F \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 2.3 (Fubini)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

On suppose que $F \in \mathcal{L}_1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$la\ fonction\ y \mapsto F(x,y)\ est\ dans\ \mathcal{L}^1(\Omega_2) \quad et\ la\ \ fonction\ x \mapsto \int_{\Omega_2} F(x,y)dy\ \ est\ \ dans\ \ \mathcal{L}^1(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$la\ fonction\ y \mapsto F(x,y)\ est\ dans\ \mathcal{L}^1(\Omega_1) \quad et\ la\ \ fonction\ y \mapsto \int_{\Omega_1} F(x,y)dx\ \ est\ \ dans\ \ \mathcal{L}^1(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\Big)dx = \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx\Big)dy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

2.4 Formule de changement de variables

2.4.1 Théorème de changement de variables

Définition 2.7

Soient $F = (F_1, F_2, ..., F_n) : \Omega \to \Omega'$ *une fonction différentiable, avec* Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$. *Le Jacobien de* F *noté* J_F *est le déterminant de la matrice Jacobienne de* F *définie par*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(y) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(y) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(y) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(y) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(y) \end{pmatrix}, \quad pour\ tout\ y \in \Omega.$$

Définition 2.8

Soient $F : \Omega \to \Omega'$ *une fonction, avec* Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$. *La fonction* f *est un* C^1*-difféomorphisme si elle est bijective de classe* C^1 *dont la bijection réciproque est aussi de classe* C^1.

Théorème 2.4 (de changement de variables)

Soient Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *un* C^1*- diffeomorphisme de* Ω *sur* Ω'.

— *Pour tout $B \subset \Omega$ tel que $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ on a*

$$\lambda_n(\varphi(B)) = \int_B |(J_\varphi(x))|dx,$$

— *Soit $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ mesurable. Alors, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega')$ si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et dans ce cas*

$$\int_{\Omega'} f(x)dx = \int_\Omega f \circ \varphi(y)|J_\varphi(y)|dy.$$

2.4.2 Exemples de changement de variables

Translation

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, alors la fonction $\varphi_a : x \mapsto x - a$ est un C^1-difféomorphisme de Ω dans $\Omega' = \Omega - a = \{x - a : x \in \Omega\}$ et $J_{\varphi_a}(y) = 1, \forall y \in \mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega')$ si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x - a)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_{\Omega'} f(x)dx = \int_\Omega f(y - a)dy$.

Homothétie

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $\psi_b : x \mapsto bx$ est un C^1-diffeomorphisme de Ω dans $\Omega'' = b\Omega = \{bx : x \in \Omega\}$ et $J_{\psi_b}(y) = |b|^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega'' \to \mathbb{R}$ mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega'')$ si et seulement si la fonction $x \mapsto f(bx)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_{\Omega''} f(x)dx = |b|^n \int_\Omega f(by)dy$.

Cordonnées polaires

Dans $\mathbb{R}^2$ on passe de cordonnées cartésienne (x, y) aux cordonnées polaires (r, θ) en utilisant le changement de variable $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta), r \in]0, +\infty[, \theta \in$

$]0, 2\pi[$.

φ est un C^1-difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2\backslash([0, +\infty[\times\{0\})$, avec

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est dans $\mathcal{L}^1(]0, +\infty[\times]0, 2\pi[)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Exemple 2.5

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. *On a* φ *est un* C^1*-difféomorphisme de* $]0, 1[\times]0, 2\pi[$ *dans* $B \setminus ([0, 1[\times\{0\})$ *et*

$$\int_B dxdy = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 rdr\Big)d\theta = \pi.$$

Cordonées sphérique

Dans $\mathbb{R}^3$ on passe de cordonnées cartésienne (x, y, z) au cordonnées sphérique (r, θ) en utilisant le changement de variable

$$(x, y) = \psi(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta).$$

ψ est un C^1-difféomorphisme de D $:=]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Big(((0, 0) \times \mathbb{R}) \cup (]0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})\Big)$ avec

$$J_\psi = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\cos\theta.$$

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si

$(r, \theta, \varphi) \mapsto f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{D})$ et

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y)dxdydz = \int_{\mathrm{D}} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)r^2\cos\theta drd\theta d\varphi.$$

Exemple 2.6

Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. *On a* ψ *est un* C^1*-difféomorphisme de* $]0,1[\times]-\pi/2,\pi/2[\times]0,2\pi[$ *dans* $B \setminus \Big(((0,0)\times\mathbb{R}) \cup (]0,1[\times\{0\}\times\mathbb{R})\Big)$ *et*

$$\int_B dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1 r^2dr\Big)\cos\theta d\theta\Big)d\varphi = \frac{4}{3}\pi.$$

Coordonnées sphériques généralisées

Dans $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ on passe de cordonnées cartésienne $(x_1, x_2, ..., x_n)$ au cordonnées sphérique generalisées $(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ en utilisant le changement de variable $(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi_n(r, \theta_1, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$, avec

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1\cos\theta_2...\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_2 = \cos\theta_1\cos\theta_2...\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ x_3 = \cos\theta_1\cos\theta_2...\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \\ x_4 = \cos\theta_1\cos\theta_2...\cos\theta_{n-4}\sin\theta_{n-3} \\ ... = ... \\ x_{n-1} = r\cos\theta_1\sin\theta_1 \\ x_n = r\sin\theta_n, \end{cases}$$

ψ_n est un C^1-difféomorphisme de $\mathrm{D}_n :=]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[^{n-2}\times]0,2\pi[$ dans

$$\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n-2}(\mathbb{R}^{n-j}\times\{0\}\times\mathbb{R}^{j-1}) \cup ([0,+\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R}^{n-2})\Big),$$

avec

$$J_{\psi_n} = (-1)^{n(n+2)/2+1} r^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 ... \cos\theta_{n-2}.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \circ \psi_n \in \mathcal{L}^1(\mathrm{D}_n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = \int_{\mathrm{D}} f \circ \psi_n r^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 ... \cos\theta_{n-2} dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1}.$$

Chapitre 3

Espaces L^p

Dans ce chapitre p désigne un élément de $[1, +\infty]$.

3.1 Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

On rappelle que si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $1 \leq p < +\infty$ alors $|f|^p \in \mathcal{M}(\Omega)$.

3.1.1 Quelques rappels

Définition 3.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si est seulemnt si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1] : \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Exemple 3.1

— *La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

— *Si $p \in [1, +\infty[$ alors la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$.*

Lemme 3.1

Si $p \in [1, +\infty[$ et $a, b \geq 0$ alors $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Preuve. La fonction $x \mapsto x^p$ est convexe, donc $(ta + (1-t)b)^p \leq ta^p + (1-t)b^p$ pour tout $t \in [0,1]$. On prend $t = 1/2$ on trouve

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2},$$

d'où l'inégalité cherchée. Remarquons que pour $p = 1$ on a une égalité. $\square$

3.1.2 Espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Définition 3.2

Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose $\mathcal{L}_p(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$.

Un élément de $\mathcal{L}_p(\Omega)$ est dit fonction de puissance p-ième intégrable.

Définition 3.3

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ est dite essentiellment bornée sur Ω s'il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$.

On note $\mathcal{L}_\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentielment bornées sur Ω.

Proposition 3.1

$\mathcal{L}_p(\Omega)$ est un espace vectoriel pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Preuve. Il s'agit de montrer que $\mathcal{L}_p(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies de Ω dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que $af \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ pour tout $(a, p, f) \in \mathbb{R} \times [1, \infty] \times \mathcal{L}_p(\Omega)$. Montrons que $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ dès que $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$.

- Supposons que $1 \leq p < \infty$ et $f, g \in L_p(\Omega)$. Alors, d'après le Lemme 3.1

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p), p.p.x \in \Omega.$$

Par intégration sur Ω on déduit que $f+g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$,

donc $\mathcal{L}_p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

- Soit $f, g \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ alors il existent $C, C' \in \mathbb{R}$ tels que

$$|f(x)| \leq C \quad et \quad |g(x)| \leq C' \quad p.p \;\; tout \; x \in \Omega,$$

alors

$$|f(x)+g(x)| \leq C + C' \quad p.p \;\; tout \; x \in \Omega,$$

donc $f+g \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ et $\mathcal{L}_\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel.

$\square$

Notation :

Pour toute élément de $\mathcal{M}(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{p,\Omega} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & si \;\; 1 \leq p < \infty, \\ \sup ess_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq C \;\; p.p.x \in \Omega\}, & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Avec la convension $\inf(\phi) = +\infty$.

Remarque 3.1

Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $p \in [1, +\infty]$, alors

— $f \in \mathcal{L}_p(\Omega) \Leftrightarrow \|f\|_{p,\Omega} < \infty$.

— $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty,\Omega}$ *p.p.* $x \in \Omega$.

Définition 3.4

L'éxposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$ est $p' := \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & si \;\; 1 < p < \infty, \\ \infty \quad si \;\; p = 1, \\ 1 \quad si \;\; p = \infty. \end{cases}$

Remarque 3.2

Pour tout $p \in [1, +\infty]$ on a

— $p' \in [1, +\infty]$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*(avec la convention* $\frac{1}{\infty} = 0$*)*

— $p \in]1, +\infty[\Rightarrow p' \in]1, +\infty[$.

— $p' = p \Leftrightarrow p = 2$.

— p *est l'éxposant conjugué de* p'.

Lemme 3.2 (inégalité de Young)

Soit $p \in]1, +\infty[$*. Pour tous* $a, b \geq 0$ *on a*

$$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{3.1}$$

Preuve. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $]-\infty, +\infty[$, alors pour tous $A, B > 0$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$e^{tA+(1-t)B} \leq te^A + (1-t)e^B.$$

Pour $t = 1/p, A = \ln a^p, B = \ln b^{p'}$ on trouve (3.1). □

Proposition 3.2 (inégalité de Hölder)

Soit $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$*, alors*

$$\|fg\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}, \quad \textit{avec la convention} \quad (0)(\infty) = 0.$$

Preuve.

— On commence par le cas où l'un des deux quantités $\|f\|_{p,\Omega}$ et $\|g\|_{p',\Omega}$ au moins est infini ou nulle.

Si ($\|f\|_{p,\Omega} = 0$ ou $\|g\|_{p',\Omega} = 0$) alors $fg = 0$ p.p. sur Ω et

$$\|fg\|_{1,\Omega} = 0 \leq \|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}.$$

Si ($\|f\|_{p,\Omega} = \infty$ et $\|g\|_{p',\Omega} \in]0, +\infty[$) ou ($\|f\|_{p,\Omega} \in]0, +\infty[$ et $\|g\|_{p',\Omega} = \infty$) ou ($\|f\|_{p,\Omega} = \infty$ et $\|g\|_{p',\Omega} = \infty$) alors

$$\|fg\|_{1,\Omega} \leq \infty = \|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}.$$

— Supposons maintenant $0 < \|f\|_{p,\Omega}, \|g\|_{p'\Omega} < \infty$.

• Si $p = 1$ alors $p' = \infty$. On a

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\|g\|_{\infty,\Omega} \quad p.p. x \in \Omega,$$

en intégrant sur Ω on trouve

$$\|fg\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{1,\Omega}\|g\|_{\infty,\Omega} = \|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{p',\Omega}.$$

• De la même façons on traite le cas $p = \infty$.

• Supposons maintenant $p \in]1, +\infty[$. En appliquant l'inégalité de Young avec $a = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_{p,\Omega}}$ et $b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_{p',\Omega}}$ on trouve

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}} \leq \frac{1}{p} \times \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{p,\Omega}^p} + \frac{1}{p'} \times \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p',\Omega}^{p'}} \quad p.p. \;\; x \in \Omega.$$

En intégrant sur Ω on trouve

$$\frac{\|fg\|_{1,\Omega}}{\|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

d'où l'inégalité cherchée, car $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.1

Si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}_{p'}(\Omega)$ alors $fg \in L_1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} \times \|g\|_{p',\Omega}.$$

Proposition 3.3 (inégalité de Minkowski)

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ *alors*

$$\|f+g\|_{p,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} + \|g\|_{p,\Omega}.$$

Preuve. Si $f+g=0$ p. p. sur Ω alors l'inégalité est clairement vérifiée.

On suppose dans la suite de la preuve que $f+g \neq 0$ p.p. sur Ω. Si $p \in \{1, \infty\}$ alors l'inégalité de Minkowski est un résultat direct de l'inégalité $|a+b| \leq |a|+|b|, a, b \in \mathbb{R}$.

Supposons que $p \in]1, \infty[$, alors p. p. $x \in \Omega$ on trouve

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \leq |f(x)|\times|f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)|\times|f(x)+g(x)|^{p-1}.$$

Par intégration sur Ω et application de l'inégalité de Hölder on trouve

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \leq \Big(\|f\|_{p,\Omega} + \|g\|_{p,\Omega}\Big)\||f+g|^{p-1}\|_{p',\Omega},$$

autrement dit

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \leq \Big(\|f\|_{p,\Omega} + \|g\|_{p,\Omega}\Big)\Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{1-1/p}.$$

Si $\Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{1-1/p} = \infty\infty$ alors l'inégalité est vérifiée donc la preuve est téminée, sinon, la démonstration se termine dès qu'on divise les deux membres de la dernère inégalité par $\Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{1-1/p}$. $\square$

Proposition 3.4

L'application $f \mapsto \|f\|_{p,\Omega}$ *définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}_p(\Omega)$.

Preuve. Voir Exercice 20. $\square$

3.1.3 Espaces $L_p(\Omega)$

On a $\|f\|_{p,\Omega} = 0$ implique seulement que $f = 0$ p.p. sur Ω ceci ne ségnifie pas en générale que $f = 0$ sur Ω donc $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}_p(\Omega)$. Pour remédier à ce problème, on identifie les fonctions de $\mathcal{L}_p(\Omega)$ qui sont égales p.p. sur Ω.

Exercice

On définit sur $\mathcal{L}_p(\Omega)$ la relation $\sim$ par $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivlence.

2) Montrer que l'addition et la multiplication par un scalaire dans $\mathcal{L}_p(\Omega)$ sont compatibles avec la relation $\sim$ autrement dit, pour tous $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ et tout $a \in \mathbb{R}$ on a

- si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.
- si $f_1 \sim g_1$ alors $af_1 \sim ag_1$.

Définition 3.5

Soit $p \in [1, +\infty]$. $L^p(\Omega)$ est l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions f modulo la relation $\sim$, autrement dit $L_p(\Omega) := \mathcal{L}_p(\Omega)/\sim$.

Si on pose $[f] := \{g \in \mathcal{L}_p(\Omega) : g = f p.p.\ sur\ \Omega\}$ alors $L_p(\Omega) = \{[f], f \in \mathcal{L}_p(\Omega)\}$.

Les opérations de l'espace véctoriel $L_p(\Omega)$ sont $[f] + [g] = [f + g]$ et $c[f] = [cf]$ pour tout $([f], [g], a) \in Ł_p(\Omega) \times L_p(\Omega) \times \mathbb{R}$.

−————————— **Convension** —————————

Dans la suite, on va écrire f pour désigner la classe $[f] \in L_p(\Omega)$ de l'élément $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, c'est-à-dire, on va traiter les éléments de $L_p(\Omega)$ comme des fonctions appartennant à $\mathcal{L}_p(\Omega)$ en identifiant les fonctions égales preque partout sur Ω (les fonctions de

$\mathcal{L}_p(\Omega)$ qui sont égales presque partout sur Ω représentent le même élément de $L_p(\Omega)$).

Proposition 3.5

L'application $\|f\|_{L_p(\Omega)} := \|f\|_{p,\Omega}$ *définit une norme sur* $L_p(\Omega)$.

Preuve. Exercice. $\square$

Proposition 3.6

— *Si* Ω *est de mesure finie. Alors*

$1 \leq p \leq q \leq +\infty \Rightarrow L_\infty(\Omega) \subseteq L_q(\Omega) \subseteq L_p(\Omega)$.

— *Si la mesure de* Ω *n'est pas finie alors les espaces* $L_p(\Omega), L_q(\Omega)$ *(avec* $p \neq q$*) sont généralement incomparables c-à-dire* $L_p(\Omega) \backslash L_q(\Omega) \neq \phi$ *et* $L_q(\Omega) \backslash L_p(\Omega) \neq \phi$.

Preuve. Voir les exercires 22 et 23. $\square$

3.2 Convergence dans les espaces L^p

Une suite (f_j) d'éléments de $L_p(\Omega)$ est dite convergente vers $f \in L_p(\Omega)$ si

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{p,\Omega} = 0,$$

on écrit dans ce cas $f_j \to f$ dans $L_p(\Omega)$.

Une suite (f_j) d'éléments de $L_p(\Omega)$ est dite de Cauchy dans $L_p(\Omega)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $||f_j - f_k||_{p,\Omega} \leq \varepsilon$ pour tous $j, k > N$.

Théorème 3.1 (de la convergence dominée dans $L_p(\Omega)$)

Soit $1 \leq p < +\infty$. *Soient* $(f_j)_j$ *une suite d'éléments de* $L_p(\Omega)$ *et* $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ *telle que*

— *$f_j \to f$ p.p. sur Ω,*

— *il existe $g \in L_p(\Omega)$ telle que $|f_j(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et tout $j \in \mathbb{N}$.*

Alors, $f \in L_p(\Omega)$ et $f_j \to f$ dans $L_p(\Omega)$, autrement dit $\|f - f_j\|_{p,\Omega} = 0$.

Preuve. On a $|f_j(x) \leq g(x)|$ p.p. $x \in \Omega$ et tout $j \in \mathbb{N}$, par passage à la limite et comme $f_j(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$, on trouve $|f(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$, d'où l'appartenence de f à $L_p(\Omega)$.

On a pour tout $j \in \mathbb{N}$: $f, f_j \in L_p(\Omega)$ donc $|f_j - f|^p \in L^1(\Omega)$ puisque $\displaystyle\int_\Omega |f_j(x) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-1}\Big(\int_\Omega |f_j(x)|^p dx + \int_\Omega |f(x)|^p dx\Big) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

On a

$|f_j - f|^p \to 0$ p.p. sur Ω et $|f_j(x) - f(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f_j(x)|^p + |f(x)|^p) \leq (2(g(x))^p$ p.p. $x \in \Omega$ et tout $j \in \mathbb{N}$.

Puisque $(2g)^p \in L_1(\Omega)$, le théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}_1(\Omega)$(Proposition 2.11) nous donne $\displaystyle\int_\Omega |f_j(x) - f(x)|^p dx \to 0$ c-à-dire $\|f - f_j\|_{p,\Omega} \to 0$. □

3.3 Complétude des espaces L^p

Théorème 3.2 (Riesz-Fischer)

$L_p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Preuve.

— Cas $p = \infty$. Soit (f_j) une suite de Cauchy dans $L_\infty(\Omega)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall j \geq N_k, \forall m \geq 0 : \|f_{j+m} - f_j\|_{\infty,\Omega} \leq \frac{1}{k},$$

par suite, il existe un ensemble $E_k \subset \Omega$ négligeable tel que

$$\forall j \geq N_k, \forall m \geq 0, \forall x \in \Omega \setminus E_k : |f_{j+m}(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k},$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega \setminus E$ (avec $E = \cup_k E_k$ est négligeable), la suite $(f_j(x))_j$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers un réel $f(x)$. De plus, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \notin E, \forall j \geq N_k : |f(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

La fonction f ainsi définie est dans L^∞, et pour tout $j \geq N_k$, on a $\|f_j - f\|_{\infty,\Omega} \leq \frac{1}{k}$, ce qui signifie que f_j converge vers f.

— Cas $1 \leq p < +\infty$. Soit (f_j) une suite de cauchy dans $L^p(\Omega)$. Comme toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, il nous suffit alors d'extraire de (f_j) une sous-suite convergente.

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout j :

$$\|f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)}\|_{p,\Omega} \leq \frac{1}{2^j}.$$

On pose maintenant pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|.$$

Alors $g_j \in L^p(\Omega)$ (somme finie de fonctions de $L_p(\Omega)$) et par l'inégalité de Minkowski on obtient :

$$\|g_j\|_{p,\Omega} \leq \sum_{k=1}^{j} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_{p,\Omega} \leq \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

ce qui implique que (g_j) est croissante et bornée en norme $L^p(\Omega)$, donc par le théorème de la convergence monotone, il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que $g_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} g$

presque partout. Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$ on a : pour tout $j \geq 2$ et pour tout $m \geq 0$

$$\begin{aligned} |f_{\varphi(j+m)}(x) - f_{\varphi(j)}(x)| &= |f_{\varphi(j+m)}(x) - \sum_{k=1}^{m-1} f_{\varphi(j+k)}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} f_{\varphi(j+k)}(x) - f_{\varphi(j)}(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |f_{\varphi(j+k)}(x) - f_{\varphi(j+k-1)}(x)| \\ &= g_{j+m}(x) - g_{j-1}(x) \leq g(x) - g_{j-1}(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Alors la suite $(f_{\varphi(j)})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel $f(x)$. Puisque pour presque tout $x \in \Omega$ on a $|f(x) - f_{\varphi(j)}(x)| \leq g(x)$ (pour $j \geq 2$), la fonction f est dans $L_p(\Omega)$. Enfin, les $f_{\varphi(j)}$ sont dans $L_p(\Omega)$ et on a $|f_{\varphi(j)}(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, mais $|f| + |g| \in L_p(\Omega)$, donc par convergence dominée on obtient $f_{\varphi(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$.

La suite (f_j) de Cauchy admet donc une valeur d'adérence f dans $L_p(\Omega)$ donc converge vers cette limite.

□

En particumier on a le corollaire suivant concernant le cas $p = 2$.

Corollaire 3.2

$L_2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 3.3 (réciproque partielle du théorème de la convergence dominée)

Soient (f_j) une suite de $L_p(\Omega)$ et $f \in L_p(\Omega)$, tels que $\|f_j - f\|_{p,\Omega} \to 0$. Alors il existe une sous-suite (f_{j_k}) extraite de (f_j) telle que

- *$f_{j_k}(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$.*
- *Il existe $h \in L_p(\Omega)$ telle que $|f_{j_k}| \leq h$ p.p. sur Ω, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Presque analogue à la preuve du théorème précedent. □

3.4 Produit de convolution

Définition 3.6

Le produit de convolution de deux fonctions f et g (s'il existe) est la fonction qu'on note par $f * g$, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Proposition 3.7 (Inégalité de Young pour convolution)

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$||f * g||_{r,\mathbb{R}^n} \leq ||f||_{p,\mathbb{R}^n} ||g||_{q,\mathbb{R}^n}.$$

Preuve. Posons $h(x) := f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Nous divisons la preuve en trois étapes selon les valeurs de r.

Etape 1. $r = \infty$ donc, $1/p + 1/q = 1$. D'après l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$|h(x)| \;\; \leq \;\; \|f(x - .)\|_{p,\mathbb{R}^n} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}. \tag{3.2}$$

Effectuons le changement de variable $y = x - z$, nous obtenons

$$\|f(x - .)\|^p_{p,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)^p dz = \|f\|^p_{p,\mathbb{R}^n},$$

cette dernière égalité et l'inégalité (3.2) impliquent

$$\|h(x)\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{p,\mathbb{R}^n} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}.$$

*E*tape 2. $r = 1$, donc $p = q = 1$. Nous avons

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dxdy.$$

Par le théorème de Fubini $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dxdy = \|f\|_{1,\mathbb{R}^n}\|g\|_{1,\mathbb{R}^n}$, donc

$$\|h(x)\|_{1,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{1,\mathbb{R}^n}\|g\|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

*E*tape 3. $1 < r < \infty$, donc p et q sont aussi finis et vérifient $p, q \leq r$. Posons

$$\varphi_x(y) := |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r} \quad \text{et} \quad \psi_x(y) := |f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r},$$

donc

$$|f(x-y)g(y)| = \varphi_x(y)\psi_x(y).$$

Remarquons que $(\varphi_x(y))^r = |f(x-y)|^p|g(y)|^q$, donc d'après le raisonnement de l'étape .2, nous avons

$$\|\varphi^r\|_{1,\mathbb{R}^n} \leq \|f^p\|_{1,\mathbb{R}^n}\|g^p\|_{1,\mathbb{R}^n},$$

d'où l'appartenance de φ à $L_r(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, le théorème de Fubini nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x(y)|^r dxdy \quad = \quad \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}\|g\|_{q,\mathbb{R}^n}. \tag{3.3}$$

Maintenant, on montre que $\psi_x(.) \in L_{r'}(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$|\psi_x(y)|^{r'} := |f(x-y)|^{pr'(1/p-1/r)}|g(y)|^{qr'(1/q-1/r)} = |f(x-y)|^{p/s}|g(y)|^{q/t},$$

s et t sont donnés par $\dfrac{1}{s} := r'\Big(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}\Big), \dfrac{1}{t} := r'\Big(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\Big)$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_x(y)|^{r'}dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p/s}|g(y)|^{q/t}dy = f^{p/s} * g^{q/t}(x).$$

On a $f^{p/s} \in L_s(\mathbb{R}^n), g^{q/t} \in L_t(\mathbb{R}^n)$ et $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = r'\Big(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\Big) = r'\Big(1 - \dfrac{1}{r}\Big) = 1$. Donc l'étape.1 nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_x(y)|^{r'} dy \leq \|f^{p/s}\|_{s,\mathbb{R}^n} \|g^{q/t}\|_{t,\mathbb{R}^n} \quad = \quad \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}^{p/s} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}^{q/t}. \tag{3.4}$$

Rappelons que $h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x(y)\psi_x(y)dy$, d'après l'inégalité de Hölder et (3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x(y)\psi_x(y)|dy \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x(y)|^r dy\Big)^{1/r} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_x(y)dy|^{r'}\Big)^{1/r'} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x(y)|^r dy\Big)^{1/r} \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}^{p/sr'} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}^{q/tr'}. \end{aligned}$$

donc la formule (3.3) nous permit d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r dx &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x(y)|^r dxdy\Big) \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}^{rp/sr'} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}^{rq/tr'} \\ &\leq \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}^{p+rp/sr'} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}^{q+rq/tr'}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|h\|_{r,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}^{p(1/r+1/sr')} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}^{q(1/r+q/tr')}.$$

Enfin, nous avons

$$p\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{sr'}\Big) = p\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\Big(\frac{r'}{p} - \frac{r'}{r}\Big)\Big) = 1,$$

de même

$$q\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{tr'}\Big) = 1.$$

Donc

$$\|h\|_{r,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{p,\mathbb{R}^n} \|g\|_{q,\mathbb{R}^n}.$$

□

Proposition 3.8 (Commutativité de convolution)

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$. *Si* $f * g(x)$ *existe alors* $g * f(x)$ *existe et* $f * g(x) = g * f(x)$.

Convolution et support

Le support d'une fonction continue est $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Si on travaille avec des fonction définies presque partout cette définition ne convient plus.

Proposition 3.9

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Soient* $(\omega_i)_{i\in I} \subset \Omega$ *une fammilles d'ouverts tels que* $f(x) = 0 \quad p.p\ x \in \omega_i$ *pour tout* $i \in I$. *Alors,* $f(x) = 0 \quad p.p. x \in \omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$.

Définition 3.7

Pour les données de la proposition précédente, le support de f *est* $Supp \;\; f = \Omega \backslash \omega$.

Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f = g \;\; p.p. x \in \Omega$ alors $Supp \;\; f = Supp \;\; g$ donc on peut parler du support de $f \in L_p(\Omega)$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue alors cette définition coïcide avec la définition usuelle du support d'une fonction continue.

Proposition 3.10

Soit $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $f \star g$ *existe alors*

$$Supp(f \star g) \subset \overline{(Supp \;\; f + Supp \;\; g)},$$

où $Supp \;\; f + Supp \;\; g = \{x + y : x \in Supp \;\; f \;\; et \;\; y \in Supp \;\; g\}$.

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f \star g(x)$ est défini, on pose

$$A(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : (x - y) \in Supp \;\; f \;\; et \;\; y \in Supp \;\; g\}.$$

Si $y \notin A(x)$ alors $f(x-y)g(y) = 0$, donc

$$f \star g(x) = \in_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{A(x)} f(x-y)g(y)dy.$$

Si $x \notin Supp \quad f + Supp \quad g$ alors il n'existe auqu'un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - y \in Supp \quad f$ et $y \in Supp \quad g$, sinon $x = x - y + y \in Supp \quad f + Supp \quad g$.

Pour tout $x \notin Supp \quad f + Supp \quad g$

$$f \star g(x) = \int_{\phi} f(x-y)g(y)dy = 0.$$

Donc $f \star g(x) = 0$ pour tout $x \in$ intérieur $(Supp \quad f + Supp \quad g)^c = \left(\overline{Supp \quad f + Supp \quad g}\right)^c$ ce qui donne

$$Supp(f \star g) \subset \overline{(Supp \quad f + Supp \quad g)}.$$

□

Remarque 3.3

Si f et g sont à support compacts alors $f \star g$ est à supprt compact.

3.5 Sous-espaces denses dans $L_p(\Omega)$

3.5.1 L'espace des fonctions étagées

On rappele qu'une fonction étagée $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ admet une répresentation de la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j},$$

où $N \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R}^*$ et $A_j \in \mathcal{B}(\Omega)$ disjoints , $j = 1, 2, ..., N$.

On note $\mathcal{E}s(\Omega)$ l'ensembe des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ étagées telles que $\lambda_n\{x : \varphi(x) \neq 0\} < \infty$.

Lemme 3.3

Si $1 \leq p < \infty$ *alors* $\varphi \in \mathcal{E}s(\Omega)$ *si et seulement si* $\varphi \in L_p(\Omega)$.

Preuve. Voir l'exercice 25 $\square$

Théorème 3.4

Si $1 \leq p < \infty$ *alors* $\mathcal{E}s(\Omega)$ *est un sous-espace vectoriel dense dans* $L_p(\Omega)$.

Preuve. Il est clair que $\mathcal{E}s(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $L_p(\Omega)$.

Soit $f \in L_p(\Omega)$.

Supposons que f est positive. Il existe alors une suite croissante de fonctions étagées $\varphi_j : \Omega \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vert f p.p. sur Ω telles que $0 \leq \varphi_j \leq f, \forall j \in \mathbb{N}$.

On a $\varphi_j \in L_p(\Omega)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ donc $\varphi_j \in \mathcal{E}s(\Omega)$ pout tout $j \in \mathbb{N}$.

Comme φ_j est positive on a $(f - \varphi_j)^p \leq f^p$, d'après le théorème de convergence dominée on trouve

$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{p,\Omega}^p = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f(x) - \varphi_j(x)|^p = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |f(x) - \varphi_j(x)|^p = 0.$$

On a prouvé que toute fonction positive de $L_p(\Omega)$ peut être approchée dans $L_p(\Omega)$ par une suite de fonctions de $\mathcal{E}s(\Omega)$.

Maintenant, soit $f \in L_p(\Omega)$ de signe quelconque. Les fonctions f_+ et f_- sont positives donc il existent deux suites $(\varphi_j)_j, (\psi_j)_j \subset \mathcal{E}s(\Omega)$ telle que

$\|f_+ - \varphi_j\|_{p,\Omega} \to 0$ et $\|f_- - \psi_j\|_{p,\Omega} \to 0$ lorsque $j \to \infty$.

Donc, il existe $(\varphi_j - \psi_j)_j \subset \mathcal{E}s(\Omega)$ telle que $\|f - (\varphi_j - \psi_j)\|_{p,\Omega} \to 0$ lorsque $j \to \infty$ car

$\|f - (\varphi_j - \psi_j)\|_{p,\Omega} = \|f_+ - f_- - (\varphi_j - \psi_j)\|_{p,\Omega} \leq \|f_+ - \varphi_j\|_{p,\Omega} + \|f_- - \psi_j\|_{p,\Omega}.$ $\square$

3.5.2 L'espace des fonctions continues à support compact

On note $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω alors

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \text{il existe un compact } K \subset \Omega \text{ tel que } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \backslash K\}.$$

Lemme 3.4

Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.11

$C_c(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $L_p(\Omega)$.

Preuve. Voir l'exercice 26 □

Lemme 3.5 (Théorème de Lusin)

Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $\lambda_n(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in C_c(\Omega)$ telle que

$$\lambda_n(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon \quad et \quad \|g\|_{\infty,\Omega} \leq \|f\|_{\infty,\Omega}.$$

Théorème 3.5

L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L_p(\Omega)$ tout $1 \leq p < +\infty$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{E}s(\Omega)$, donc φ est bornée et vérifie $\lambda_n(\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}) < \infty$. D'après le théorème du Lusin (Lemme 3.5) il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g\|_{\infty,\Omega} \leq \|\varphi\|_{\infty,\Omega}$ et $\forall \varepsilon > 0 : \lambda_n(\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq g(x)\}) < \left(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_{\infty,\Omega}}\right)^p$.

On a

$$\begin{aligned}\|g-\varphi\|_{p,\Omega}^p &= \int_{\{x\in\Omega:\varphi(x)\neq g(x)\}} |g(x)-\varphi(x)|^p dx \\ &\leq \lambda_n(\{x\in\Omega:\varphi(x)\neq g(x)\})\|g-\varphi\|_{\infty,\Omega}^p \\ &\leq \varepsilon^p.\end{aligned}$$

On a montré que pout toute $\varphi \in \mathcal{E}s(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g-\varphi\|_{p,\Omega} \leq \varepsilon$. Mais $\mathcal{E}s(\Omega)$ est dense dans $L_p(\Omega)$, d'où la densité de $C_c(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$. En effet, si $f \in L_p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ alors ils existent $\varphi \in \mathcal{E}s(\Omega)$ et $g \in C_c(\Omega)$ telles que

$$\|f-\varphi\|_{p,\Omega} \leq \varepsilon/2 \quad et \quad \|\varphi-g\|_{p,\Omega} \leq \varepsilon/2,$$

donc $\|f-g\|_{p,\Omega} \leq \|f-\varphi\|_{p,\Omega} + \|\varphi-g\|_{p,\Omega} = \varepsilon.$ □

Théorème 3.6

L'espace $C_c(\Omega)$ n'est dense dans $L_\infty(\Omega)$.

Preuve. Soit $\varphi \in C_c(\Omega)$ alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega\backslash K$. $\Omega\backslash K$ est un ouvert non vide et $|\mathrm{I}_\Omega - \varphi| \geq \mathbb{1}_{\Omega\backslash K}$ ce qui donne $\|\mathrm{I}_\Omega - \varphi\|_{\infty,\Omega} \geq \|\mathbb{1}_{\Omega\backslash K}\|_{\infty,\Omega} = 1$. Donc ils existent $f = \mathbb{1}_\Omega \in L_\infty(\Omega)$ et $\varepsilon = 1/2 > 0$ tels que $\|f-\varphi\|_{\infty,\Omega} > \varepsilon$ pout tout $\varphi \in C_c(\Omega)$. □

3.5.3 L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact

On pose $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est de classe } C^k\}$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega), k \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.6

Il existe une fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)dx = 1.$

Preuve. La fonction $x \mapsto |x|^2$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc la fonction

$$g(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|x|}}, & \text{|x|<1} \end{cases}$$

est un élément de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x) > 0.$

Il existe un compact $K = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ telle que $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ donc $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|g\|_{1,\mathbb{R}^n} < \infty$. Donc la fonction cherchée est $\theta = \dfrac{g}{\|g\|_{1,\mathbb{R}^n}}$. □

Proposition 3.12

Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

$f \star \theta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(f \star \theta) = f \star \dfrac{\partial}{\partial x_j}\theta, j = 1,2,...,n$. Si de plus f est à support compact, alors $f \star \theta \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. La fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\theta$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x) - \frac{\partial}{\partial x_1}\theta(y)| < \varepsilon.$$

Soit $v = (1,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi_h(y) = \dfrac{\theta(y+hv) - \theta(y)}{h}$.

Alors

$$\frac{f \star \varphi(x+hv) - f \star \varphi(x)}{h} = f \star \varphi_h(x).$$

D'après le théorème des acroissement finis, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $|\ell| < h$ et $\varphi_h(y) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\theta(y + \ell v)$.

Si $|h| < \delta_\varepsilon$ alors $|\varphi_h(y) - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\theta(y)| < \varepsilon$ et

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f\star\varphi(x+hv) - f\star\varphi(x)}{h} - f\star\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x)\Big| &= \Big|\frac{f\star\varphi_h - f\star\varphi(x)}{h} - f\star\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x)\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Big(\varphi_h(y) - \frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x)\Big)dy\Big| \\ &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\varepsilon dy \\ &= \varepsilon\|f\|_{1,\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Le réel ε peut être choisi arbitrairement petit, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$\dfrac{f\star\varphi(x+hv) - f\star\varphi(x)}{h} \to f\star\dfrac{\partial}{\partial x_1}\theta(x)$ quand $h \to 0$ c-à-dire $f\star\dfrac{\partial}{\partial x_1}\theta = \dfrac{\partial}{\partial x_1}(f\star\theta)$.
De la même façons on montre que $f\star\dfrac{\partial}{\partial x_j}\theta = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(f\star\theta)$ pour $j = 2, ..., n$.

Si de plus $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ alors par la Remarque 3.3, $f\star\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. □

Corollaire 3.3

Soient $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $f\star\theta \in C^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}(f\star\theta) = f\star\Big(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\theta\Big), \qquad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Si de plus f est à support compact alors $f\star\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.13

Soient $f, \theta \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x)dx = 1$ et $\theta \geq 0$. Soit ε_j une suite positive telle que $\varepsilon_j \to 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on pose $\theta_j(x) = \dfrac{1}{\varepsilon_j^n}\theta(\varepsilon_j/x)$. Alors, $f\star\theta_j$ converge vert f simplement et en norme $\|\cdot\|_{p,\mathbb{R}^n}$ pour tout $1 \leq p < \infty$. De plus, $f\star\theta_j$ a support compact.

Preuve. On peut supposer que *Supp* f, *Supp* $\theta \subset [-M, M]^n$. Alors

1. $\int_{\mathbb{R}^n}\theta_j(x)dx = 1$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

2. $\|f \star \theta\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$,

3. *Supp* $\theta_j \subset [-\varepsilon_j M, \varepsilon_j M]^n$,

4. *Supp* $(f \star \theta_j) \subset [-(1+\varepsilon_j)M, (1+\varepsilon_j)M]^n$.

Donc $f \star \theta_j$ a support compact.

La fonction f est uniformément contuinue (Voir le Lemme 3.4). Soit $r > 0$, assez petit, alos il existe $\delta_r > 0$ tel que $|x-y| < \delta_r \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < r$.

Si $\varepsilon_j > \dfrac{\delta_r}{\sqrt{n}M}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in [-\varepsilon_j M, \varepsilon_j M]^n$ on a $|(x-y) - x| = |y| \leq \sqrt{n}\varepsilon_j M \leq \delta_r$, donc $|f(x-y) - f(x)| < r$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
|f \star \theta_j(x) - f(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\theta_j(y) - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(y)dy \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x-y) - f(x)\Big)\theta_j(y)dy \Big| \\
&\leq \int_{[-\varepsilon_j M, \varepsilon_j M]^n} (f(x-y) - f(x))\theta_j(y)dy \\
&\int_{[-\varepsilon_j M, \varepsilon_j M]^n} r\theta_j(y)dy \\
&= r.
\end{aligned}$$

d'où la convegence simple de $f \star \theta_j$ ver f.

Pour tout $p \in [1, \infty[$ on a $|f \star \theta_j(x) - f(x)| \to \varepsilon$. Soit $h = \mathbb{1}_{[-\varepsilon_j M, \varepsilon_j M]^n}(2\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^n})^p$. Alos, $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx < \infty$ et si $0 < \varepsilon_j \leq 1$ on a $|f \star \theta_\varepsilon - f|^p \leq h$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\|f - f \star \theta_j\|_{p,\mathbb{R}^n}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f \star \theta_j(x)|^p dx \to 0,$$

d'où le résultat voulu. □

Théorème 3.7

Si $1 \leq p < \infty$ *alors* $C_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L_p(\Omega)$.

Preuve. Soint $r > 0$. Soient $f \in L_p(\Omega)$ et $\varphi \in C_c(\Omega)$ telle que $\|f - \varphi\|_{p,\Omega} \leq r$.

Soit

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & si \quad x \in \Omega, \\ 0 \quad si & six \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors $\widetilde{\varphi} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $\|\widetilde{\varphi} \star \theta_j - \widetilde{\varphi}\|_{p,\mathbb{R}^n} \to 0$(voir Proposition 3.13).

Si j est assez grand alors

$$Supp \quad \widetilde{\varphi} \star \theta_j \subset Supp \quad \widetilde{\varphi} + Supp \quad \theta_j \subset \Omega.$$

Soit $u_j = (\widetilde{\varphi} \star \theta_j)_{|\Omega}$. Alors, pour j assez grand $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\|u_j - \varphi\|_{p,\Omega} \leq r$. Donc, il existe $g = u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|f - g\|_{p,\Omega} = \|f - \varphi\|_{p,\Omega} + \|\varphi - u_j\|_{p,\Omega} \leq 2r,$$

d'où la densité de $C_c(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$. □

Par les mêmes arguments de la preuve du Théorème 3.6, on a le théorème suivant.

Théorème 3.8

$C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $L_\infty(\Omega)$.

3.6 Réflexivité, Séparabilité, dual de L^p

3.6.1 Quelques rappels et définitions

Dans se paragraphe E désdigne un espace de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_E$ sa norme.

Définition 3.8 (dual et bidual)

Le dual de E noté E' et l'ensemble des formes linéaires continues sur E.L bidual de E noté E'' et l'ensemble des formes linéaires continues sur E'.

Si $f \in E'$, on note $\langle f, x\rangle$ l'image de x par f, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ s'appele le crochet de dualité entre un espace et son dual. On munit E' et E'' des normes

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|_E}, \quad f \in E.$$

et

$$\|\varphi\|_{E''} = \sup_{\varphi\in E', f\neq 0} \frac{|\langle f, \varphi\rangle|}{\|f\|_{E'}}, \quad \varphi \in E''.$$

respectivement.

On introduit une application $J : E \to E''$ par

$$[J(x)](f) = \langle f, x\rangle, \quad x \in E$$

L'application J ainsi définie est une application linéaire isométrique, i.e. $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout x $\in E$. J est appelée injection canonique de E dans E''. En identifiant E avec $J(E)$ on peut considérer E comme un sous-espace de E''.

Définition 3.9 (espace réflixif)

On dit que E et réflixif si et seulemnt si J et surjective, dans ce cas on idenifie E et E'' et on écrit $E = E''$.

Proposition 3.14

Si E est réflixif alors tout sous-espace vectoriel fermé de E est réfixif.

Proposition 3.15

E est réflixif si et seulement si E' est réfexif.

Définition 3.10 (espaces uniformément convexe)

On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Big(\|x\|_E, \|y\|_E \leq 1 \text{ et } \|x - y\|_E > \varepsilon\Big) \Rightarrow \Big\|\frac{x + y}{2}\Big\|_E \leq 1 - \delta.$$

Proposition 3.16 (théorème de Milman–Pettis)

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflixif.

Définition 3.11 (espace séparable)

On dit que E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subseteq E$ dénombrable et dense dans E.

Proposition 3.17

Soient $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\geq 1}$. Supposons que F soit dense dans E. Alors E est séparable.

Proposition 3.18

On suppose qu'il existe une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ telle que

— $O_i \neq \Phi, \forall i \in I$,

— $O_i \cap O_j, \forall i \neq j$,

— *I n'est pas dénombrable,*

alors E n'est pas séparable.

3.6.2 Réflexivité de L^p

Lemme 3.7 (inégalité de Clarkson)

Soit $2 \leq p < \infty$, alors pour tout $f, g \in L_p(\Omega)$ on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{p,\Omega}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{p,\Omega}^p \leq \frac{1}{2}\Big(\|f\|_{p,\Omega}^p + \|g\|_{p,\Omega}^p\Big).$$

Preuve. La fonction $\varphi : x \to (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : \varphi(x) \geq 0 = \varphi(0) = 0$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, avec $\beta \neq 0$ alors $\varphi\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big) \geq 0$, alors

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2},$$

cette inégalité et vraie pour $\beta = 0$, alors

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

En prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ on trouve

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}\Big(|a|^p + |b|^p\Big), \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

(dans la dernière inégalité, on a utilisé la convexité de la fonction $x \longmapsto x^{p/2}, p \geq 2$).

Soi $x \in \Omega$, pour $a = f(x)$ et $b = g(x)$ il vient

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\Big|f(x)|^p + |g(x)|^p\Big),$$

donc il suffit d'intégrer sur Ω pour avoir le résultat voulu. □

Proposition 3.19

Si $2 \leq p < \infty$ alors $L^p(\Omega)$ est réfixif.

Preuve. Soit $f, g \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\|f\|_{p,\Omega}, \|g\|_{p,\Omega} \leq 1$ et $\|f-g\|_{p,\Omega} > \varepsilon$, alors, par l'inégalité de Clark (Lemme 3.7)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{p,\Omega}^p \leq \frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

alors

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{p,\Omega} \leq \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p},$$

d'où

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{p,\Omega} \leq 1 - \delta, \quad avec \quad \delta = 1 - \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p},$$

donc $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe donc rtéflixif, d'aprés la Prposition 3.16. □

Proposition 3.20

Si $1 \leq p \leq 2$ *alors* $L^p(\Omega)$ *est réfixif.*

Preuve. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$ on pose

$$Tu(f) = \int_\Omega f u dx.$$

On vérifie facilement à l'aide de linégalité de Hölder que Tu est une applicattion linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ i.e., $Tu \in (L^{p'}(\Omega))'$ (le dual de $L^{p'}(\Omega)$) et que $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Soit

$$h(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p-2}u(x) & si\ u(x) \neq 0, \\ 0 \quad si \quad u(x =)0 \end{cases},$$

alors, $h \in L^{p'}(\Omega), \|h\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$ et $(Tu)(h) = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$. Avec

$$\|Tu\|_{L^{p'}(\Omega)} \geq \frac{|T(u)(h)|}{\|h\|_{L^{p'}(\Omega)}} = \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} = \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

ce qui implique que Tu est une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans un sous-espace de $(L^{p'}(\Omega))'$.

On a $L^{p'}(\Omega)$ et réflixif car $2 \leq p' < \infty$ (voir la Proposition 3.19), d'après la Proposition 3.15 $(L^{p'}(\Omega))'$ est réflixif alors $T(L^p(\Omega))$ est réflixif d'aprés la Proposition 3.14, et comme T est une isométrie il vient que $L^p(\Omega)$ est réflixif. □

En résumé, on a montré le théorème suivant

Théorème 3.9

Soit $1 < p < \infty$, *alors* $L^p(\Omega)$ *est réflixif.*

Pour les cas $p = 1$ et $p = \infty$, on admet le théorème suivant dont la démonstration un peut compliquer par rapport au niveau de ce cours.

Théorème 3.10

$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflixifs.

3.6.3 Séparabilité de L^p

Théorème 3.11

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.

Preuve. La preuve repose sue le Lemme 3.17. Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indicatrices de pavés de la forme $\prod_{j=1}^{N}]x_j, y_j[$ inclus dans Ω avec les x_j, y_j à coordonnées rationnelles. Clairement, F est dénombrable, il reste à montrer que F est dense dans $L^p(\Omega)$.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\Omega)$, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|f - g\|_{p,\Omega} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit Ω' un ouvert borné tel que $suup(g) \subset \Omega' \subset \Omega$. Par la continuité uniforme de g, on construit une fonction $h \in F$ telle que $supp(h) \subset \Omega'$ et

$$|g(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\lambda_n(\Omega'))^{1/p}}, \quad p.p. x \in \Omega,$$

alors

$$\|g - h\|_{p,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\|f - h\|_{p,\Omega} \leq \|f - g\|_{p,\Omega} + \|g - h\|_{p,\Omega} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Théorème 3.12

$L^\infty(\Omega)$ n'est séparable.

3.6.4 Dual de L^p

Les résultats suivants vont nous permettre caréctriser le dual topologique des espaces $L^p(\Omega)$.

Proposition 3.21 (Théorème de représentation de Reisz)

Soit $1 < p < +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, alors il existe un unique $u \in L^{p'}(\Omega)$ tel que $\varphi = \mathcal{L}_u$, c'est à dire

$$\langle \varphi, f\rangle_{(L^p(\Omega),(L^p(\Omega))')} = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

De plus on a

$$\|u\|_{p',\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Ce théorème est important, car il permet de représenter toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$) à l'aide d'une fonction de $L^{p'}(\Omega)$. L'application $\varphi \longmapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$.

Proposition 3.22

Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Alors il existe un unique $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\langle \varphi, f\rangle_{(L^1(\Omega),(L^1(\Omega))')} = \int_\Omega u(x)f(x), \qquad \forall f \in L^1(\Omega).$$

De plus on a

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Ce théorème nous a permet d'identifier le dual de $L^1(\Omega)$ à $L^\infty(\Omega)$.

Remarque 3.4

En particulier, l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ *est isomorphe à son dual topologique* $(L^2(\Omega))'$.

Pour toute forme linéaire continue $\varphi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, *il existe un unique* $f \in L^2(\Omega)$ *tel que* $\varphi(g) = \int_\Omega fg = \langle f, g\rangle_{L^2}$, *où* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ *est le produit scalaire de* $L^2(\Omega)$.

Remarque 3.5

On peut identifier le dual de $L^\infty(\Omega)$ *avec un sous-espace propre de* $L^1(\Omega)$.

Deuxième partie

Exercixes résolus

Exercices sur le premier chapitre

Exercice 1

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. *Ecrire $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.*

2. *Déterminer les indicatrices des ensembles suivants : $A^c, A \setminus B$ et $A \triangle B$.*

Solution :

Soit $x \in E$.

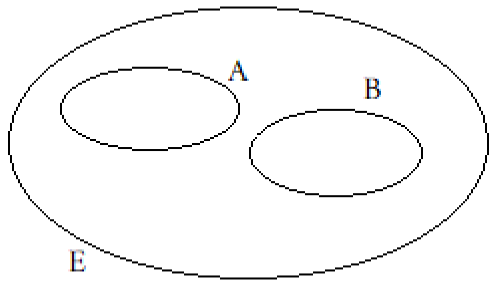
1. Pour $\mathbb{1}_{A\cap B}$. On a $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad \notin A \end{cases}$, $\quad \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in B \\ 0 & si \quad \notin B \end{cases}$

   et
$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \quad et \quad x \in B \\ 0 & si \quad \notin A \quad ou \quad x \notin B \end{cases}$$
   c-à-dire
$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \begin{cases} 1 & si \quad \mathbb{1}_A = 1 \quad et \quad \mathbb{1}_B = 1 \\ 0 & si \quad \mathbb{1}_A = 0 \quad ou \quad \mathbb{1}_B = 0 \end{cases}$$
   donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

   Pour $\mathbb{1}_{A\cup B}$. On a
$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \quad ou \quad x \in B \\ 0 & si \quad \notin A \quad et \quad x \notin B \end{cases}$$

On distingue deux cas

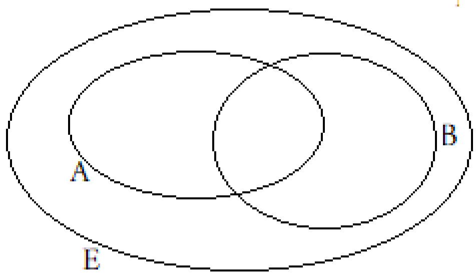
a) Premier cas : $A \cap B = \Phi$. Il y a trois possibilités de positionnement de $x \in E$: $x \in A, x \in B$ et $x \in (A \cup B)^c$.



	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$
$x \in A$	1	0	1
$x \in B$	0	1	1
$x \in (A \cup B)^c$	0	0	0

Alors, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

b) Deuxième cas : $A \cap B = \Phi$. Il y a quatre possibilités de positionnement de $x \in E$: $x \in A \cap B, x \in A \cap B^c, x \in A^c \cap B$ et $x \in (A \cup B)^c$.



	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$
$x \in A \cap B$	1	1	1	1
$x \in A \cap B^c$	1	0	0	1
$x \in A^c \cap B$	0	1	0	1
$x \in (A \cup B)^c$	0	0	0	0

Alors, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

2. Déterminer les indicatrices des ensembles suivants : $A^c, A \setminus B$ et $A \triangle B$.

$\mathbb{1}_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \notin A \\ 0 & si \quad \in A \end{cases}$, alors $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.

$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap B^c} = \mathbb{1}_1 \times \mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.

$\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \mathbb{1}_{A\setminus B} + \mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. *Montrer que* $I_j = \displaystyle\int_0^1 x^{1/j}dx$ *existe pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$. *Expliciter la limite de* $(I_j)_j$.
2. *Déterminer, si elle existe,* $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^j \left(1 - \frac{x}{j}\right)^j dx$.
3. *Déterminer, si elle existe,* $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^j)^{1/j}}$.
4. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue et bornée. On pose pour* $j \in \mathbb{N}$:
$$I_j = \int_0^{+\infty} jf(t)e^{-jt}dt.$$
Déterminer la limite de I_j *quand* $j \to +\infty$.
5. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et bornée p. p. sur* $]0, +\infty[$. *Après avoir montrer son existence, calculer* $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-jx}f(x)dx$.

Solution :

1. Soit $f_j(x) = x^{1/j}$, $j \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction f_j est continue et sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$. De plus la suite (f_j) est positive, croissante ($f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$) et vérifie $\lim_j f_j(x) = \lim_j e^{\frac{1}{j}\ln x} = 1$. Par le théorème de la convergence monotone on a $\lim_j \int_0^1 f_j(x)dx = \int_0^1 \lim_j f_j(x)dx = 1$.
2. On a $\displaystyle\int_0^j \left(1 - \frac{x}{j}\right)^j dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,j]}\left(1 - \frac{x}{j}\right)^j dx$. Soit $f_j(x) = \mathbb{1}_{[0,j]}\left(1 - \frac{x}{j}\right)^j$. f_j est continue par morceau donc mesurable, et $f_j(x) \xrightarrow{j} f(x) = e^{-x}$. On a aussi pour tout $x \geq 0$, $|f_j(x)| \leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx < \infty$. Donc par le théorème de la convergence dominée on aura $\displaystyle\lim_j \int_0^{+\infty} f_j(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.
3. Soit $f_j(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^j)^{1/j}}$. Alors
   — f_j est continue sur $[0, +\infty[$ donc mesurable.
   — On a $|f_j(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_j(x)dx$ existe.
   — Si $0 \leq x \leq 1$ on a $\displaystyle\lim_j f_j(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et si $x > 1$ on a $\lim_j f_j(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

   D'après le T.C.D. on obtient
$$\lim_j \int_0^{+\infty} f_j(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$
4. On fait le chanagement de variable $u = jt$ donc $I_j = \int_0^{+\infty} f(u/j)e^{-u}du$.

   La fonction f est bornée, alors il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}_+$. On a $|f(u/j)e^{-u}| \leq Ce^{-u} = g(u)$ avec g intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc par convergence dominée on obtient
$$\lim_j I_j = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}du = f(0).$$
5. Soit $f_j(x) = e^{-jx}f(x)$. La fonction f est bornée p.p. sur $]0, +\infty$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C, p.p.x \in \mathbb{R}$, donc $|f_j(x)| \leq Ce^{-jx} \leq$

$Ce^{-x}, p.p.x \in]0, +\infty[, \forall j \geq 1$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, les (f_j) sont mesurables sur $[0, +\infty[$ et $f_j(x) \to f(x) = 0$, alors, le TCD nous donne $\lim\limits_{j} \int_0^{+\infty} f_j(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-jx} f(x)dx = 0$.

Exercice 3

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1 + \frac{x}{j}\right)^j\right\}$ *est une suite croissante et*

$$\lim_{j\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^j = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. *Calculer la limite*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^j \mathrm{e}^{-bx} d\lambda(x)$$

où $b > 1$.

Solution :

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1 + \frac{x}{j})^j$ est une suite croissante et que $\lim\limits_{j\to\infty}(1 + \frac{x}{j})^j = e^x$. Pour $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1 + \frac{x}{j}\right)^n = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left(\frac{x}{j}\right)^k = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k} \frac{x^k}{k!},$$

où $\quad a_{j,k} = \dfrac{j!}{(j-k)!j^k} = \dfrac{j(j-1)\cdots(j-k+1)}{j^k}$.

Les assertions suivantes sont vraies :

i) $a_{j+1,k} \geq a_{j,k}$. En effet, $\frac{j+1-l}{j+1} \geq \frac{j-l}{j}$ pour $l \in \mathbb{N}$ car $j^2 + j - l \cdot j \geq j^2 + j - l \cdot j - l$,

ii) $a_{j,k} < 1 \quad$ (évident) ;

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{j\to\infty} a_{j,k} = 1$.

Comme $a_{j+1,j+1} > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{j+1}\right)^{j+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{j+1} a_{j+1,k}\,\frac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{k} a_{j+1,k}\,\frac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1+\dfrac{x}{j}\right)^j\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que

$$\left(1+\frac{x}{j}\right)^j = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}\,\frac{x^k}{k!} \le \sum_{k=0}^{j} \frac{x^k}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{x}{j}\right)^j \ge \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{x}{j}\right)^j = e^x$.

2. Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{j}\right)^j e^{-bx}d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}_+}\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{x}{j}\right)^j e^{-bx}d\lambda(x)\\ &= \int_0^\infty e^{(1-b)x}d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Exercice 4

Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_0^j\left(1-\frac{x}{n}\right)^j x^m dx = m!$ *(pour tout $m \in \mathbf{N}$).*
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^j\left(1+\frac{x}{n}\right)^j e^{-2x}dx = 1.$

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1-\frac{x}{j}\right)^j \le e^{-x}.$$

En effet, comme $\ln y \le y-1$ pour $y > 0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{j}} \le y^{-\frac{1}{j}} - 1$, c'est-à-dire $\left(1-\frac{\ln y}{j}\right)^j \le y^{-1}$. Ainsi, en posant $x = \ln y$, il vient $\left(1-\frac{x}{j}\right)^j \le e^{-x}$. De plus,

$$\lim_{j\to+\infty}\left(1-\frac{x}{j}\right)^j = \lim_{j\to+\infty} e^{j\ln\left(1-\frac{x}{j}\right)} = \lim_{j\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{j}+\frac{x}{j}\varepsilon\left(\frac{x}{j}\right)\right)},$$

où $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Ainsi $\lim_{j\to+\infty}\left(1-\frac{x}{j}\right)^j = e^{-x}$.

Posons $f_j(x) = \left(1-\frac{x}{j}\right)^j x^m \mathbf{1}_{[0,j]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, on obtient le résultat.

2. Soit $f_j(x) = \left(1+\frac{x}{j}\right)^j e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,j]}$. Comme la suite $\{f_j(x)\}$ est croissante et $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Calculer la limite $\lim\limits_j \int_{\mathbb{R}} \cos^j(\pi x) f(x)dx$.

Solution :

Soit $f_j(x) = \cos^j(\pi x)f(x)$, alors $\lim\limits_j f_j(x)$ égale à 0 si $x \notin \mathbb{Z}$, égale à 1 si $x \in 2\mathbb{Z}$ et n'existe pas si $x \in 2\mathbb{Z}+1$ donc f_j converge p.p. vert 0 car $\mathbb{Z}$ est niglégeable. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_j(x)| \leq |f(x)|$, d'après le théorème de convergence dominée la limite cherchée égale à 0.

Exercice 6

Soient $0 < a < 1 < b < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^1(]a,b[)$, et $f(1) \neq 0$. Soit f_j une suite de fonctions définie par $f_j(x) = \dfrac{f(x)}{1+x^j}$.

1. *Déterminer la limite simple de (f_j).*
2. *Etablir l'égalité : $\lim\limits_{j\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_j(t)dt = \int_a^1 f(t)dt$.*
3. *On suppose maintenant que $f \in C^1([a,b])$. Montrer que $\displaystyle\int_a^1 t^{j-1}f_j(t)dt \sim \frac{\ln 2}{j}f(1)$.*

Solution :

1. On a

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \in [a,1[\\ f(1)/2 & \text{si} & x = 1 \\ 0 & \text{si} & x \in]1,b] \end{array} \right\} = g(x).$$

2. Remarquons que $|f_j(x)| \leq |f(x)|$ et f est intégrable sur $[a,b]$, donc d'après le TCD on obtient

$$\lim_j \int_a^b f_j(x)dx = \int_a^b \lim_j f_j(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^1 f(x)dx.$$

3. Par une intégration par partie on aura

$$\int_a^1 t^{j-1} f_j(t)dt = \left[\frac{1}{j}\ln(1+t^j)f(t)\right]_a^1 - \frac{1}{j}\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^j)dt,$$

$$\text{avec} \quad \left[\frac{1}{j}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 = \frac{\ln 2}{2}f(1) + \frac{\ln(1+a^j)}{n}f(a) \simeq \frac{\ln 2}{2}f(1).$$

car $\ln(1+a^j) \to 0$. D'autre part

$$\left|\frac{1}{\ln}(1+t^n)f'(t)\right| \leq \frac{1}{j}\|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt \overset{(\infty)}{\simeq} 0.$$

(Remarque $\ln(1+u) \leq u$). Donc on obtient le résultat voulu.

Exercice 7

Soit

$$f_j(x) = \frac{xe^{-x}}{(1+x^j)^{1/j}}, j \in \mathbb{N} \quad et \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

— *Calculer* $\int_0^\infty xe^{-x}dx.$

— *Montrer que* $\lim_j (1+x^j)^{1/j} = x, \forall x > 1.$

— *Calculer la limite simple de* $f.$

— *Calculer* $\lim_j \int_0^\infty f_j(x)dx.$

Solution :

— $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = [x(-e^{-x})]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$

— Soit $x > 1$. $\lim\limits_j (1+x^j)^{1/j} = \lim\limits_j e^{(1/j)ln(1+x^j)} = \lim\limits_j e^{(1/j)ln(x^j(\frac{1}{x^j}+1))} = x.$

— $\lim\limits_j f_j(x) = \begin{cases} xe^{-x} & si \quad 0 \leq x < 1, \\ e^{-x} & si \quad x \geq 1. \end{cases}$.

— On a $f_j \to f$ sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $j \geq 1$, on a $|f_j(x)| \leq xe^{-x}$ avec $x \mapsto xe^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty$.

D'après le TCD

$$\lim_j \int_0^\infty f_j(x)dx = \int_0^\infty \lim_j f_j(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx + \int_1^\infty xe^{-x}dx = 1 - e^{-1}$$

.

Exercice 8

1) *Soit* $f_j(x) = e^{-|x|+(cos(x))^{2j}}, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$

a) *Calculer* $\lim\limits_j f_j(x)$.

b) *En déduire que la suite de fonctions* $(f_j)_j$ *converge p.p. vers une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$.

c) *Calculer* $\lim\limits_j \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx$.

2) *On donne* $\dfrac{\ln(1-x)}{x} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j}, x \in]0,1[$. *Soit* $f_j(x) = -\dfrac{x^{j-1}}{j}\ln x$.

a) *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 f_j(x)dx$ *par une intégration par partie.*

b) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln x}{x}dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3}$.

Solution :

1) Soit $f_j(x) = e^{-|x|+(cos(x))^{2j}}, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$

a) $\lim_j f_j(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & si \quad x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \\ e^{-|k|\pi+1}, & si \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

b) L'ensemble $k\mathbb{Z}$ est négligeable donc $(f_j)_j$ converge p.p. vers la fonction $f(x) = e^{-|x|}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2$

c) Les fonctions $f_j, j \in \mathbb{N}$ sont mesurables. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $f_j(x) \leq e^{1-|x|} = e^1 f(x)$ intégrable. D'après le théorème de convergence dominée $\displaystyle\lim_j \int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2$

2)On donne $\displaystyle\ln(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j} = \frac{\ln(1-x)}{x}$, $x \in]0,1[$. Soit $\displaystyle f_j(x) = -\frac{x^{j-1}}{j}\ln x$.

a) $\displaystyle\int_0^1 f_j(x)dx = \Big[-\frac{x^j}{j^2}\ln x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{j-1}}{j^2}dx = \Big[\frac{x^j}{j^3}\Big]_0^1 = \frac{1}{j^3}$

b) Les fonctions $f_j, j \in \mathbb{N}$ sont positives donc $\displaystyle\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 f_j(x)dx$ d'où

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln x}{x}dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^3}.$$

Exercices sur le deuxième chapitre

Exercice 9

Soient $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \ \ et \ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *et* f *la fonction définie sur* Ω *par* $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1) *Montrer que* $f \in L^1(\Omega)$ *et calculer* $\|f\|_{1,\Omega}$.

2) *Calculer la limite*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{j}y+y^2)(x^2+\frac{1}{j}x+y^2)}} dxdy.$$

Solution :

1) f est mesurable sur Ω comme fonction continue sur Ω.

En utilisant les cordonées polaires, on a

$$\int_\Omega |f(x,y)| dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{\rho} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f\|_{1,\Omega} = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Pour tous $(x,y) \in \Omega$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_j(x,y) = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{j}y+y^2)(x^2+\frac{1}{j}x+y^2)}}.$$

- Les fonctions f_j sont mesurables comme fonctions continues sur Ω.
- $f_j \to f$ sur Ω.

• Pour tous $(x, y) \in \Omega$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_j(x,y)| \leq f(x,y), \quad et \quad f \in L^1(\Omega),$$

d'après le TCD

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega f_j(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie. Soit $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeante presque partout sur Ω. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_j| \leq C$ pour tout $j \geq 1$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_j\, dx$.

Solution :

Puisque Ω est de mesure finie, la fonction constante égale à C est intégrable, et son intégrale est $C\lambda_n(\Omega)$. Soit f la limite simple de (f_j). Une application directe du théoréme de Lebesgue donne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_j(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Exercice 11

On pose pour $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

1. *Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.*
2. *Montrer que f est deux fois dérivables sur $[0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$.*
3. *En déduire la valeur de $f(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.*

Solution :

1. La fonction $h : t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

La fonction $g : (x,t) \longmapsto e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$ et on $\left|e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2}$, donc f est continue. Et on a

$$|f(x)| \leq \|h\|_\infty \int_0^x e^{-xt}dt = \frac{\|h\|_\infty}{x}.$$

On en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. Les déivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existes et sont continues sur $\mathbb{R}_+^*\times]0,+\infty[$.

Et on a $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. Alors, soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[: \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2^{-at} = k(t).$$

La fonction k est intégrable sur $]0,+\infty[$. Par domination sur tout segment, f est de classe C^2 et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

3. On a $f'(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, puisque $f'(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $f(x) = x\ln x - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$, puisque $f(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. par continuité, on obtient $f(0) = \pi/2$. Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt = \left[-\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

Solution :

On a $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$, une intégration par partie nous donne

$$f(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$$

On pose $h(x,t) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$. On applique le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre pour la fonction h, donc

— h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

— $|h(x,t)| \leq \dfrac{t}{(1+t^2)^2} = \varphi(t)$, On a φ continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^3}$ au voisinage de $+\infty$ qui est intégrable (Intégrale généralisée de Reimann) donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

— $(x,t) \to \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

On a $\left|\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| \leq \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$, donc dominée par une fonction continue et intégrable alors elle aussi est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 13

Montrer que l'on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy, \qquad \textit{avec } D =]0,1]^2.$$

Solution :

On pose $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et on calcule les deux intégrales

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy \quad , \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x,y)dx &= \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} \\
&= \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} \\
&= -\frac{1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

de la même façon on calcule l'autre intégrale et on trouvera

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces résultats nous montre que le théorème de Fubini ne s'applique pas pour cette intégrale, car la fonction $f \notin L^1(]0,1]^2)$. En effet, en passant aux coordonées polaires on trouve

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta,$$

qui est divergente.

Exercice 14

Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}sin(2xy)$ *est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur* $\Omega = [0,1]\times]0,+\infty[$*, en déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)dy$.

Solution :

La fonction $(x, y) \mapsto e^{-y}sin(2xy)$ est mesurable parsequ'elle est continue sur Ω.

Pour tout $y \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-y}sin(2xy)$ est intégrable sur $[0, 1]$ parsqu'elle est majorée par la fonction $x \mapsto e^{-y}$ qui est intégrable sur $[0, 1]$, de plus on a $\displaystyle\int_0^1 e^{-y}sin(2xy)dx \leq e^{-y}, \forall y \in]0, +\infty[$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^\infty \Big(\int_0^1 e^{-y}sin(2xy)dx\Big)dy \leq \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$.

D'après le théorème de Tonelli $(x, y) \mapsto e^{-y}sin(2xy)$ est intégrable sur Ω.

D'après le théorème de Fibini

$$I = \int_0^\infty \Big(\int_0^1 e^{-y}sin(2xy)dx\Big)dy = \int_0^1 \Big(\int_0^\infty e^{-y}sin(2xy)dy\Big)dx.$$

On a

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^1 e^{-y}sin(2xy)dx\Big)dy = \int_0^\infty e^{-y}\Big[-\frac{1}{2y}cox(2xy)dx\Big]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^\infty \frac{1}{2}\Big(-\cos(2y)+1\Big)\frac{e^{-y}}{y}dy.$$

donc

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)dy.$$

Maintenant, on va calculer $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^\infty e^{-y}sin(2xy)dy\Big)dx$.

Par une intégration par partie on trouve $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y}sin(2xy)dy = \frac{2x}{1+4x^2}, \forall x \in [0, 1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^\infty e^{-y}sin(2xy)dy\Big)dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}dx = \frac{\ln 5}{4}$.

Enfin,

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)dy = \frac{\ln 5}{4}.$$

Exercice 15

1. *Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx$.*

2. *Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy)dy$, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$, pour tout $t > 0$.*

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^\infty \frac{x^2-1}{(1+y)(1+x^2y)}dy \\
&= \frac{1}{x^2-1}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}dy \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln(1+x^2y) - \ln(1+y)\right]_0^{+\infty} = \frac{2\ln x}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx\right) d \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2y}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(\sqrt{y}x)\right]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{2du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad (\text{en posant} u = \sqrt{y}).
\end{aligned}$$

2. On a $\int_0^1 \cos(xy)dy = \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x}$.

On pose $g(x,y) = \cos(xy)e^{-tx}$ pour $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ et $t > 0$. On a $|g(x,y)| \leq e^{-tx}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ donc on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 g(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^\infty \cos(xy)e^{-tx}dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{(iy-t)x} + e^{(-iy-t)x})dx\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-iy} + \frac{1}{t+iy}\right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}dy = \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 16

Pour tous $x > -1$ *et* $t \in]0,1[$, *on pose* $f(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$ *et on admet que la fonction* $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ *est bien définie sur* $]-1,+\infty[$.

1. *Montrer que la fonction* $x \mapsto f(x,t)$ *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *pour tout* $t \in]0,1[$ *et que* $\dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t) = t^x$ *pour tous* $x > -1$ *et* $t \in]0,1[$.
2. *En déduire que* F *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *et calculer* $F'(x)$ *pour tout* $x \in]-1,+\infty[$.
3. *Calculer* $F(0)$ *et déduire une expression simple de* $F(x)$.

Solution :

1. Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, de plus, pour tous $x > -1$ et $t \in]0,1[$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(\dfrac{e^{x\ln t} - 1}{\ln t}\Big) = e^{x\ln t} = t^x$.
2. On a
   - La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $x > -1$.
   - La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est déribalble sur $]-1,+\infty[$ pour tout $t \in]0,1[$.
   - Pour tout $x > -1$ et $t \in]0,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t) = t^x \leq 1$ et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1[$.

   Donc, la fonction F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et
   $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x dx = \Big[\dfrac{1}{x+1} t^x\Big]_0^1 = \dfrac{1}{x+1}$.
3. $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^0 - 1}{\ln t} = 0$. Pour tout $x > -1$, on a $F'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, donc $F(x) = \ln(x+1) + C$ er comme $F(0) = 0$, il vient $C = 0$, donc $F(x) = \ln(x+1)$.

Exercices sur le troisième chapitre

Exercice 17 (inégalité de Hölder généralisée)

1) Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Soient $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Montrer que

$$\|fg\|_{r,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{q,\Omega}.$$

2) Soient m un entier supperieur ou égale à 2, $p_1, p_2, ..., p_m \in [1, +\infty]$ et $f_j \in \mathcal{M}(\Omega)$, $j = 1, 2, ..., m$. Soit $r \in [1, \infty]$ telle que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m}$.

Montrer que

$$\|f_1 f_2 ... f_m\|_{r,\Omega} \leq \|f_1\|_{p_1,\Omega}\|f_2\|_{p_2,\Omega} ... \|f_m\|_{p_m,\Omega}.$$

Solution :

1) Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

- Si $r = \infty$ alors $p = q = \infty$.

On a $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_{\infty,\Omega}\|f\|_{\infty,\Omega}$ *p.p.* $x \in \Omega$, donc

$$\|fg\|_{\infty,\Omega} \leq \|f\|_{\infty,\Omega} \times \|g\|_{\infty,\Omega}.$$

- Si $r = 1$, l'inégalité cherchée n'est que l'inégalité de Hölder.

- Si $1 < r < \infty$ et $p = \infty$ alors $q = r$.

Si $\|f\|_{\infty,\Omega} = 0$ ou $\|g\|_{q,\Omega} = 0$ alors $\|fg\|_{r,\Omega} = 0 = \|f\|_{\infty,\Omega} \times \|g\|_{q,\Omega}$.

Si ($\|f\|_{\infty,\Omega} = \infty$ et $0< \|g\|_{q,\Omega} < \infty$) ou $0 < \|f\|_{\infty,\Omega} < \infty$ et $\|f\|_{q,\Omega} = \infty$) ou

($|f\|_{\infty,\Omega} = |f\|_{q,\Omega} = \infty$) alors $\|fg\|_{r,\Omega} \leq \infty = \|f\|_{\infty,\Omega} \times \|g\|_{q,\Omega}$

Si ($0<\|f\|_{\infty,\Omega} < \infty$ et $0< \|g\|_{\infty,\Omega} < \infty$) alors p.p. $x \in \Omega$ on a

$$|f(x)g(x)|^r \leq \|f\|^r_{\infty,\Omega}|g(x)|^r,$$

en intégrant sur Ω on trouve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx \leq \|f\|^r_{\infty,\Omega} \int_\Omega |g(x)|^r,$$

donc

$$\|fg\|_{r,\Omega} \leq \|f\|_{\infty,\Omega}\|g\|_{r,\Omega} = \|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{q,\Omega}.$$

- Si $1 < r < \infty$ et $q = \infty$ alors $p = r$.

On traite ce cas comme le cas précédant en changeant le rôle de p et q.

- Supposons maintenant $p, q, r \in]1, +\infty[$ alors $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, donc $s' := \frac{q}{r}$ est l'exposant

conjugué du $s := \frac{p}{r}$.

D'après l'inégalité de Hölder

$$\||fg|^r\|_{1,\Omega} \leq \||f|^r\|_{s,\Omega}\||g|^r\|_{s',\Omega},$$

c-à-dire

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx \leq \Big(\|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{q,\Omega}\Big)^r,$$

autrement dit

$$\Big(\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx\Big)^{1/r} \leq \|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{q,\Omega},$$

d'où

$$\|fg\|_{r,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}\|g\|_{q,\Omega}.$$

2) On démontre l'inégalité par réccurence sur m. Pour $m = 2$, l'inégalité est garantie par la question 1).

Soint m un entier positive. Supposons que

$$\|f_1 f_2 \cdots f_m\|_{r,\Omega} \leq \|f_1\|_{p_1,\Omega} \|f_2\|_{p_2,\Omega} \cdots \|f_m\|_{p_m,\Omega}$$

pour tous $p_1, p_2, ..., p_m$ telle que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m}$

et montrons que si

$p_1, p_2, ..., p_{m+1} \in [1, +\infty]$ telle que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_{m+1}}$ alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_{m+1}\|_{r,\Omega} \leq \|f_1\|_{p_1,\Omega} \|f_2\|_{p_2,\Omega} \cdots \|f_{m+1}\|_{p_{m+1},\Omega}.$$

Si $r = \infty$ ou $p_{m+1} = \infty$ alors la preuve est facile.

Supposons que $p_{m+1} \neq 0$ et posons $q_{m+1} = \dfrac{r p_{m+1}}{p_{m+1} - r}$ alors $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_{m+1}} + \dfrac{1}{q_{m+1}}$, donc par la question 1), on a

$$\|f_1 f_2 \cdots f_{m+1}\|_{r,\Omega} \leq \|f_1 f_2 \cdots f_m\|_{q_{m+1},\Omega} \|f_{m+1}\|_{p_{m+1},\Omega}. \tag{3.2}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_{m+1}} = \frac{1}{q_{m+1}},$$

par l'hypothèse de récurence

$$\|f_1 f_2 \cdots f_m\|_{q_{m+1},\Omega} \leq \|f_1\|_{p_1,\Omega} \|f_2\|_{p_2,\Omega} \cdots \|f_m\|_{p_m,\Omega},$$

en substuant dans (3.2) on trouve

$$\|f_1 f_2 \cdots f_{m+1}\|_{r,\Omega} \leq \|f_1\|_{p_1,\Omega} \|f_2\|_{p_2,\Omega} \cdots \|f_{m+1}\|_{p_{m+1},\Omega}.$$

Exercice 18

Soient $1 \leq p < q < \infty$. *Soient* $f, g \in L_q(\Omega)$ *et* $h = f|g|^{\frac{q-p}{p}}$.

1. *Calculer l'éxposant conjugué de* $r = \dfrac{q}{p}$.
2. *En utilisant l'inégalité de Hölder généralisée, montrer que* $h \in L_p(\Omega)$.

Solution :

1. $r' = \dfrac{r}{r-1} = \dfrac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1} = \dfrac{q}{q-p}$.
2. On a $1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}$, alors $1 = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q-p}{q}$, d'où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{q-p}{pq}$, c-à- dire $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\frac{pq}{q-p}}$.

   D'après l'inégalité de Hölder généralisée

   $$\|h\|_{p,\Omega} \leq \|f\|_{q,\Omega} \||g|^{\frac{q-p}{p}}\|_{\frac{pq}{q-p},\Omega} = \|f\|_{q,\Omega} \|g\|_{q,\Omega}^{\frac{q-p}{p}} < \infty.$$

Exercice 19 (inégalité d'intrpolation)

Soit $1 \leq p < r < q \leq \infty$ *telle qu'il existe* $\alpha \in]0,1[$ *vérifiant* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$.

Montrer que

$$f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega) \Rightarrow f \in L_r(\Omega) \quad et \quad \|f\|_{r,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}^{\alpha} \times \|f\|_{q,\Omega}^{1-\alpha}.$$

Solution :

On a $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$. Appliquons l'inégalité de Hölder généralisée on trouve

$$\|f\|_{r,\Omega} = \||f|^{\alpha}|f|^{(1-\alpha)}\|_{r,\Omega} \leq \||f|^{\alpha}\|_{p/\alpha,\Omega} \times \||f|^{(1-\alpha)}\|_{q/(1-\alpha),\Omega}$$

ce qui done

$$\|f\|_{r,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}^{\alpha} \times \|f\|_{q,\Omega}^{1-\alpha}.$$

Exercice 20

Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_{p,\Omega}$ *définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}_p(\Omega)$.

Solution :

Rappel : Soit E un espace cectotiel sur $\mathbb{R}$. Une application $\mathcal{N} : E \times E \to [0, +\infty[$ est dite semi norme si elle vérifie les trois propriétés suivante :

i) $\mathcal{N}(0_E) = 0$,

ii) $\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times E : \mathcal{N}(ax) = |a|\mathcal{N}(x)$,

iii) $\forall x, y \in E : \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Montrons que l'application $f \mapsto \|f\|_{p,\Omega}$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}_p(\Omega)$. On distingue les cas $p \in [1, +\infty[$ et $p = \infty$.

- Le cas $p \in]1, +\infty[$.

Si $f = 0$ sur Ω alors $\|f\|_{p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |0|^p dx\Big)^{1/p} = 0$.

Soit $(a, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}_p(\Omega)$ alors

$$\|af\|_{p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |af(x)|^p dx\Big)^{1/p} = \Big(|a^p| \int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} = |a|\Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} = |a|\|f\|_{p,\Omega}.$$

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_p(\Omega) \times \mathcal{L}_p(\Omega)$, d'après l'inégalité de Minkowski

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}.$$

- Le cas $p = \infty$.

Si $f = 0$ sur Ω alors pour tout $x \in \Omega$: $|f(x)| = 0 \leq 0$, donc $\|f\|_{\infty,\Omega} = 0$.

Soit $(a, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}_\infty(\Omega)$.

Si $a = 0$ alors $\|af\|_{\infty,\Omega} = 0 = |a|\|f\|_{\infty,\Omega}$.

Si $a \neq 0$ alors $|af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|\|f\|_{\infty,\Omega}$ $p.p. x \in \Omega$ donc $\|af\|_{\infty,\Omega} \leq |a|\|f\|_{\infty,\Omega}$.

D'autre part, $|a||f(x)| = \|af(x)\| \leq \|af\|_{\infty,\Omega}$ p.p. $x \in \Omega$, donc $|f(x)| \leq \dfrac{1}{|a|}\|af\|_{\infty,\Omega}$ p.p. $x \in \Omega$ ce qui implique $\|f\|_{\infty,\Omega} \leq \dfrac{1}{|a|}\|af\|_{\infty,\Omega}$ d'où $\|af\|_{\infty,\Omega} \geq |a|\|f\|_{\infty,\Omega}$. Donc

$\|af\|_{\infty,\Omega} = |a|\|f\|_{\infty,\Omega}$.

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_\infty(\Omega) \times \mathcal{L}_\infty(\Omega)$, d'après l'inégalité de Minkowski

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}_\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}_\infty(\Omega)}.$$

Exercice 21

Montrer que l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ *définit un produit scalaire sur* $L_2(\Omega)$.

Solution :

Rappel : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Une fonction $\prod : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si et seulement si

- **i)** $\prod$ est bilinéaire.
- **ii)** $\forall x, y \in E : \prod(x, y) = \prod(y, x)$.
- **iii)** $\forall x \in E : \prod(x, x) \geq 0$.
- **iv)** $\prod(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Montrons que l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur $L_2(\Omega)$.

Il est facile de montrer que les conditions **i), ii)** et **iii)** sont vérifiées. Pour la condition **iv)**, on a $(f|f) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{2,\Omega} \Leftrightarrow f = 0$ *p.p.* sur Ω, donc f est identifiée à la fonction nulle sur Ω.

Exercice 22

On suppose que Ω *est de mesure finie.*

1. *Montrer que si* $q \leq p$, *alors* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

2. Soit Ω la boule unité de $\mathbb{R}^2$ centrée en 0 . A l'aide de la fonction

$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$

montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est généralement stricte.

Solution :

1. Comme $q < p$, il existe $r \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, l'inégalité de Hölder généralisée nous donne

$$\|f\|_{q,\Omega} = \|\mathbb{1}_\Omega f\|_{q,\Omega} \leq \|\mathbb{1}_\Omega\|_{r,\Omega}\|f\|_{p,\Omega} = |\Omega|^{1/r}\|f\|_{p,\Omega}, \tag{3.3}$$

donc si $f \in L_p(\Omega)$ alors $f \in L_q(\Omega)$ et $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$.

En particulier si $p = \infty$ alors $r = q$, l'inégalité (3.3) s'écrit

$$\|f\|_{q,\Omega} = \|\mathbb{1}_\Omega f\|_{q,\Omega} \leq \|\mathbb{1}_\Omega\|_{q,\Omega}\|f\|_{\infty,\Omega} = |\Omega|^{1/q}\|f\|_{\infty,\Omega} < \infty,$$

donc $L_\infty(\Omega) \subset L_s(\Omega)$ pour tout $s \in [1, +\infty]$.

Conclusion : Si Ω est de mesure finie alors $1 < q < 2 < p$ implique

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Soit $p \in [1, \infty[$ alors $\int_\Omega |f_\alpha(x)|^p dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p - 1}} dr d\theta,$
donc $f \in L_p(\Omega)$ si et seulement si $\alpha < 2/p$.
Si $\frac{2}{p} < \beta < \frac{2}{q}$ alors $f_\beta \in L_q(\Omega)$ et $f_\beta \notin L_p(\Omega)$. En particulier $f_\beta \notin L_\infty(\Omega)$.
Conclusion : Si $q \leq p \leq \infty$ alors linclusion $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ est stricte.
Exercice 23

Supposons que Ω est de mesure infinie. Montrer que les espaces $L^p(\Omega), L_q(\Omega)$ (avec $p < q$) sont -en général- incomparables c-à-dire $L_p(\Omega) \backslash L_q(\Omega) \neq \phi$ et $L_q(\Omega) \backslash L_p(\Omega) \neq \phi$.

Indication : *utiliser les fonctions $f_a(x) = x^{-a}\mathbb{1}_{]0,1]}(x)$ et $g_a(x) = x^{-a}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.*

Solution :

Soient les fonctions $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a}\mathbb{1}_{]0,1]}(x)$ et $g_a(x) = \dfrac{1}{x^a}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$f_a \in L_\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a \leq 0 \quad et \quad g_a \in L_\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a \geq 0.$$

Si $r \in [1, \infty]$ alors

$$f_a \in L_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a < \frac{1}{r} \quad et \quad g_a \in L_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a > \frac{1}{r}.$$

Soit $p \in [1, \infty[$. Si $0 < a < \dfrac{1}{p}$, alors

$$f_a \in L_p(\mathbb{R}) \quad et \quad f_a \notin L_\infty(\mathbb{R}).$$

D'autre part,

$$g_a \in L_\infty(\mathbb{R}) \quad et \quad g_a \notin L_p(\mathbb{R}).$$

Donc, pour tout $p \in [1, \infty[$, $L_p(\Omega)$ et $L_\infty(\Omega)$ sont incomparables.

Soient, maintenant, $1 \leq p < q < \infty$ et $\dfrac{1}{q} < a < \dfrac{1}{p}$ alors

$$f_a \in L_p(\mathbb{R}) \quad et \quad f_a \notin L_q(\mathbb{R}),$$

$$g_a \notin L_p(\mathbb{R}) \quad et \quad g_a \in L_q(\mathbb{R}).$$

Donc $L_p(\Omega)$ et $L_q(\Omega)$ sont incomparables.

Exercice 24

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$.

— *Montrer que* $u \mapsto \|u\|_{p,q,\Omega} := \|u\|_{p,\Omega} + \|u\|_{q,\Omega}$ *définit une norme sur* $Ł_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$.

— *Montrer que* $Ł_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ *est un espace de Banach pour la norme* $\| \cdot \|_{p,q,\Omega}$.

Solution :

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$.

— Puisque $\| \cdot \|_{p,\Omega}$ et $\| \cdot \|_{p,\Omega}$ sont des normes sur $L_p(\Omega)$ et $L_q(\Omega)$ repectivement, pour tous $f, g \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ et $a \in \mathbb{R}$ on a

1)$\|f\|_{p,q,\Omega} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{p,\Omega} + \|f\|_{q,\Omega} = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

2)$\|af\|_{p,q,\Omega} = \|af\|_{p,\Omega} + \|af\|_{q,\Omega} = |a|\|f\|_{p,\Omega} + |a|\|f\|_{q,\Omega} = |a|\|f\|_{p,q\Omega}$,

3)$\|f+g\|_{p,q,\Omega} = \|f+g\|_{p,\Omega} + \|f+g\|_{q,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} + \|g\|_{p,\Omega} + \|f\|_{q,\Omega} + \|g\|_{q,\Omega} = \|f\|_{p,q,\Omega} + \|g\|_{p,q,\Omega}$.

— Soit (f_j) une suite de Cauchy dans $L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{p,q,\Omega}$ alors (f_j) est de Cauchy pour la norme $\| \cdot \|_{p,\Omega}$(puique $\| \cdot \|_{p,\Omega} \leq \| \cdot \|_{p,q,\Omega}$) donc (f_j) converge vers un fonction f dans $L_p(\Omega)$. De plus, d'après le théprème 3.3 il existe sous-suite extraite de $(f_j)_j$ qui converge p.p. sur Ω vers une fonction f. De même (f_j) converge vers une fonction g dans $L_p(\Omega)$ et il existe sous-suite extraite de (f_j) qui converge p.p. sur Ω vers g. Donc $f = g$ p.p. sur Ω et $f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$. Enfin, (f_j) converge vres f dans $L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ car

$$\lim_j \|f - f_j\|_{p,q,\Omega} = \lim_j \Big(\|f - f_j\|_{p,\Omega} + \|f - f_j\|_{q,\Omega} \Big) = 0 + 0 = 0.$$

Exercice 25

Démontrer le lemme 3.3.

Solution :

On a $\{x : \varphi(x) \neq 0\} = \bigcup_{j=1}^{N} A_j$.

Si $\lambda_n(\{x : \varphi(x) \neq 0\}) < \infty$ alors $\lambda_n(A_j) < \infty$ pour tout $1 \leq j \leq N$ donc $\varphi \in L_p(\Omega)$ car $\displaystyle\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \lambda_n(A_j) < \infty$. Si $\varphi \in L_p(\Omega)$ alors $\|\varphi\|_{p,\Omega} < \infty$. Pour tout

$1 \leq j \leq N$ on a $|\alpha_j|^p \mathrm{I}_{A_j} \leq |\varphi|^p$, donc $|\alpha_j|^p \lambda_n(A_j) \leq \|\varphi\|_{p,\Omega}^p < \infty$, d'où $\lambda_n(A_j)$ est finie pour tout $1 \leq j \leq N$.

Exercice 26

Démontrer le lemme 3.11.

Solution :

Soit $f \in C_c(\Omega)$ alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f(x) = 0$ sur $\Omega \backslash K$ donc $f = f\mathrm{I}_K$ et $|f(x)| \leq \sup\limits_{x \in K} |f(x)| \mathrm{I}_K = M\mathrm{I}_K$, donc $\|f\|_{p,\Omega} \leq M\|\mathrm{I}_K\|_{p,\Omega} < \infty$. Donc $C_c(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Soient $f, g \in C_c(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$ et αf sont des fonctions continues.

Il existe deux compacts $K, K' \subset \Omega$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \backslash K'$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \backslash K'$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a $\alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \backslash K$ donc $\alpha f \in C_C(\Omega)$ pour tout $f \in C_c(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \Omega \backslash \phi$ on a $0f(x) = 0$, donc il existe un compact $K = \phi$ tel que $0f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \backslash \phi$, donc $0f \in C_c(\Omega)$, ainsi $\alpha f \in C_c(\Omega)$ pour tout $f \in C_c(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pout tout $x \in \Omega \backslash K \cap x \in \Omega \backslash K'$ on a $f + g(x) = 0$ autrement dit, pour tout $x \in \Omega \setminus (K \cup K')$ on a $f + g(x) = 0$ et comme la réunion de deux compacts est un compact on déduit que $f + g \in C_c(\Omega)$.

Enfin, $C_c(\Omega)$ est un sous-espace vertotiel de $L_p(\Omega)$.

Exercice 27 (Lemme de Reimann-Lebesgue)

Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(jx)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(jx)dx = 0.$$

Solution :

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors il existe un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \notin [a,b]$. On a alors,

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\sin(jx)dx = \int_a^b \varphi(x)\cos(jx)$,pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par intégration par partie, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\Big|\int_a^b \varphi(x)\cos(jx)dx\Big| = \Big|\frac{1}{j}\Big(-\Big[\cos(jx)f(x)\Big]_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\cos(jx)dx\Big)\Big|,$$

donc

$$\Big|\int_a^b \varphi(x)\sin(jx)dx\Big| \leq \frac{1}{j}\Big(\int_a^b |\varphi'(x)|dx\Big), \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci implique que

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin(jx)dx = 0, \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De même, on montre que

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos(jx)dx = 0, \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in L_1(\mathbb{R})$. Il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)|dx \leq \varepsilon/2.$$

Pour j asser grand on trouve

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cos(xj)dx\Big| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)||\cos(xj|dx| + \Big|\int_a^b g(x)\cos(jx)dx\Big| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2,$$

et

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(xj)dx\Big| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)||\sin(xj|dx| + \Big|\int_a^b g(x)\sin(jx)dx\Big| \le \varepsilon/2+\varepsilon/2,$$

donc $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xj)dx = \lim\limits_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(xj)dx = 0.$

Exercice 28

Soit $1 < p < \infty$.

1) *Soit* $(u_j)_{j\ge 1}$ *la suite de fonctions définies par,* $\forall x\in\mathbb{R} : u_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{j^{1/p'}} & si \quad x\in[j,2j] \\ 0, & sinon. \end{cases}$.

Calculer $\|u_j\|_{p',\mathbb{R}}$ *pour tout* $j\in\mathbb{N}^*$.

2) *Soit* $\varphi\in C_c(\mathbb{R})$ *quelconque. Montrer que :*

$a)\lim\limits_{j}\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx = 0,$

$b)$ *Pour tout* $f\in L_p(\mathbb{R})$: $\Big|\int u_j(x)f(x)dx\Big| \le \|f-\varphi\|_{p,\mathbb{R}}\|u_j\|_{p',\mathbb{R}} + \Big|\int u_j(x)\varphi(x)dx\Big|.$

3) *Utiliser la densité de* $C_c(\mathbb{R})$ *dans* $L_p(\mathbb{R})$ *pour montrer que :*

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}} u_j(x)f(x)dx = 0, \forall f\in L_p(\mathbb{R}).$$

Solution :

$1)\forall j\in\mathbb{N}^* : \|u_j\|_{p',\mathbb{R}} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |u_j(x)|^{p'}dx\Big)^{1/p'} = \Big(\int_j^{2j}\frac{1}{j}dx\Big)^{1/p'} = 1.$

$2)a)$ Il existe $[a,b]\subset\mathbb{R} : \varphi(x) = 0, \forall x\notin[a,b]$.

Si $j > b$ alors $u_j(x)\varphi(x) = 0, \forall x\in[j,2j]$ car $x\notin[a,b]$ donc $\varphi(x) = 0$.

$\lim\limits_j\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx = \lim\limits_j\int_j^{2j} u_j(x)\varphi(x)dx = \lim\limits_j\int_{\mathbb{R}} 0\ dx = 0.$

$b)$ Soit $f\in L_p(\mathbb{R})$.

On a $\Big|\int_{\mathbb{R}} u_j(x)f(x)dx\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}} u_j(x)(f(x)-\varphi(x)+\varphi(x))dx\Big| \le \Big|\int_{\mathbb{R}} u_j(x)(f(x)-\varphi(x))dx\Big| +$

$\Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx\Big|$.

D'après l'inégalité de Hölder on a $\Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)(f(x)-\varphi(x))dx\Big| \leq \|f-\varphi\|_{p,\mathbb{R}}\|u_j\|_{p',\mathbb{R}}$, donc $\Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)f(x)dx\Big| \leq \|f-\varphi\|_{p,\mathbb{R}}\|u_j\|_{p',\mathbb{R}} + \Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx\Big|$.

3) Soit $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$ il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_{p,\mathbb{R}} < \varepsilon/2$.

Comme $\lim\limits_{j} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx = 0$ alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $j > j_0 \Rightarrow \Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx\Big| < \varepsilon/2$.

Pour tout $j > j_0$, on a $\Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)f(x)dx\Big| \leq \|f-\varphi\|_{p,\mathbb{R}}\underbrace{\|u_j\|_{p',\mathbb{R}}}_{=1,\forall j\in\mathbb{N}} + \Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)\varphi(x)dx\Big| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, donc $\lim\limits_{j} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_j(x)f(x)dx = 0, \forall f \in L_p(\mathbb{R})$.

Exercice 29

Soit $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi' \in L_\infty(\mathbb{R})$.

1) *Montrer que* $\lim\limits_{j\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(jx)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

2) *Utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L_1(\mathbb{R})$ pour montrer que :*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(jx)dx = 0, \forall f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Solution :

On pose $M' = \|\psi'\|_{1,\infty}$

1) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, alors il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0, \quad \forall x \notin [a,b]$.

Ils existent $M, N, N' > 0$ tels que$|\varphi(x)| \leq N, \quad |\varphi'(x)| \leq N' \quad \psi(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$.

On a

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| = \Big|\int_a^b \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| &= \Big|\Big[\frac{1}{j}\varphi(x)\psi'(jx)\Big]_a^b - \frac{1}{j}\int_a^b \varphi'(x)\psi(jx)dx\Big| \\
&\leq \Big|\Big[\frac{1}{j}\varphi(x)\psi'(jx)\Big]_a^b\Big| + \Big|\frac{1}{j}\int_a^b \varphi'(x)\psi(jx)dx\Big| \\
&\leq \frac{2NM'}{j} + \frac{N'M(b-a)}{j},
\end{aligned}$$

par passage à la limite on trouve $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx = 0$.

2)Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L_1(\mathbb{R})$ il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}} < \varepsilon/(2M')$.

D'après 1), $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pout tout $j > N$, $\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| < \varepsilon/2$.

Pour $j > N$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(jx)dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}}\Big((f(x)-\varphi(x))\psi'(jx)+\varphi(x)\psi'(jx)\Big)dx\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}|(f(x)-\varphi(x))\psi'(jx)|dx + \Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\
&\leq M'\int_{\mathbb{R}}|f(x)-\varphi(x)|dx + \Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\
&= M'\|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\
&\leq M'\varepsilon/(2M') + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(jx)dx = 0$.

Exercice 30

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1) *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $g(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$.*

   a) *Montrer que $\|f\|_{1,\Omega} \leq \|g\|_{p,\Omega}\big\|\frac{f}{g}\big\|_{p',\Omega}$.*

   b) *On suppose que $f \notin L_1(\Omega)$ et $g \in L_p(\Omega)$. Montrer par l'absurde que $\dfrac{f}{g} \notin L_{p'}(\Omega)$.*

2) *Soient $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

En utilisant l'inégalité de Young pour convolution, montrer que $f \star g \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

3) *On donne l'inégalité :*

$$(a+b)^r \leq a^r + b^r \quad pour \quad tous \quad a, b \in \mathbb{R}_+ \quad et \quad 0 < r \leq 1. \tag{3.4}$$

Soient $1 \leq p, q < \infty$ *et* $h, k \in L_q(\Omega)$. *Montrer que*

$$\Big(\int_\Omega \big(|h(x)|^p + |k(x)|^p\big)^{q/p} dx\Big)^{1/q} \leq \|h\|_{q,\Omega} + \|k\|_{q,\Omega}.$$

$\Big[$ ***Indication :*** *poser* $r = q/p$ *et discuter les deux cas* $r \geq 1$ *et* $r < 1$ $\Big]$

Solution :

1)*a*) D'après l'inégalité de Hölder, on a $\|f\|_{1,\Omega} = \|g \times \frac{f}{g}\|_{1,\Omega} \leq \|g\|_{p,\Omega}\big\|\frac{f}{g}\big\|_{p',\Omega}$

b) On a $f \notin L_1(\Omega)$ et $g \in L_p(\Omega)$. Supposons $\dfrac{f}{g} \in L_{p'}(\Omega)$, alors $\|f\|_{1,\Omega} \leq \|g\|_{p,\Omega}\big\|\frac{f}{g}\big\|_{p',\Omega} < \infty$, contraduction avec $f \notin L_1(\Omega)$ donc $\dfrac{f}{g} \notin L_{p'}(\Omega)$.

2) On a $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p}$, d'après l'inégalité de Young pour convolution $\|f \star g\|_{p,\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{1,\mathbb{R}^n}\|g\|_{q,\mathbb{R}^n} < \infty$, donc $f \star g \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

3) On pose $r = q/p$, alors $\Big(\int_\Omega \big(|h(x)|^p + |k(x)|^p\big)^{q/p} dx\Big)^{p/q} = \Big(\int_\Omega \big(|h(x)|^p + |k(x)|^p\big)^{r} dx\Big)^{1/(pr)} = \text{A}$.

Si $r \geq 1$ alors $A = \Big(\||h|^p + |k|^p\|_{r,\Omega}\Big)^{1/p}$, d'après l'inégalité de Minkowski

$$A \leq \Big\|\||h|^p\|_{r,\Omega} + \||k|^p\|\Big)^{1/p}_{r,\Omega} = (\|h\|^p_{q,\Omega} + \|k\|^p_{q,\Omega})^{1/p} \leq \|h\|_{q,\Omega} + \|k\|_{q,\Omega}.$$

Si $0 < r < 1$, alors $(|h(x)|^p + |k(x)|^p)^r \leq |h(x)|^q + |k(x)|^q \quad p.p.x \in \Omega$, donc

$$A \leq \Big(\int_\Omega |h(x)|^q dx + \int_\Omega |k(x)|^q dx\Big)^{1/q} \leq \Big(\Big(\int_\Omega |h(x)|^q dx\Big)^{1/q} + \Big(\int_\Omega |k(x)|^q dx\Big)^{1/q}\Big) = \|h\|_{q,\Omega} + \|k\|_{q,\Omega}.$$

Exercice 31

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_n(\Omega) = 1$. Soit $f \in L_2(\Omega)$.

1. *Montrer que $f \in L_1(\Omega)$.*

2. *Montrer que les fonctions $F_x : (x, y) \mapsto f^2(x), F_y : (x, y) \mapsto f^2(y)$ et $G : (x, y) \mapsto f(x)f(y)$ sont intégrables sur $\Omega \times \Omega$ et que*

$$\int_{\Omega\times\Omega} F_x(x, y)dxdy = \int_{\Omega\times\Omega} F_y(x, y)dxdy = \int_\Omega f^2(x)dx \ \text{ et } \ \int_{\Omega\times\Omega} G(x, y)dxdy = \Big(\int_\Omega f(x)\Big)^2 dx.$$

3. *En déduire que la fonction $H : (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ appartient à $L_2(\Omega \times \Omega)$ et que*

$$\|H\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)} = 2\|f\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2.$$

Solution :

1. On a $|\Omega| = 1 < \infty$, alors $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ et comme $f \in L_2(\Omega)$ il vient $f \in L_1(\Omega)$.

2. Pour tout $y \in \Omega$, on a

$$\int_\Omega F_x(x, y)dx = \int_\Omega f^2(x)dx = \|f\|^2_{2,\Omega} < \infty$$

et

$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega F_x(x, y)dx\Big)dy = \int_\Omega \|f\|^2_{2,\Omega}dy = \|f\|^2_{2,\Omega} \int_\Omega \mathbf{1}_\Omega = \|f\|^2_{2,\Omega}|\Omega| = \|f\|^2_{2,\Omega} < \infty.$$

D'après le théorème de Tonelli, F_x est intégrable sur $\Omega\times\Omega$ et d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\Omega\times\Omega} F_x(x, y)dxdy = \int_\Omega \Big(\int_\Omega F_x(x, y)dx\Big)dy = \int_\Omega f^2(x)dx.$$

De la même manière, on montre que $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega F_y(x, y)dxdy = \int_\Omega f^2(y)dy.$

Finalement, pour presque tout $y \in \Omega$, on a

$$\int_\Omega G(x, y)dx = \int_\Omega f(x)f(y)dx = f(y)\int_\Omega f(x)dx < \infty, (\text{car} \ \ f \in L_1(\Omega))$$

et

$$\int_\Omega\Big(\int_\Omega G(x,y)dx\Big)dy = \int_\Omega f(y)\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)dy = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)\Big(\int_\Omega f(y)dy\Big) = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2 <$$

D'après le théorème de Tonelli, G est intégrables sur $\Omega\times\Omega$ et d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)dxdy = \int_\Omega\Big(\int_\Omega G(x,y)dx\Big)dy = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{pt})$$

3. Comme les fonctions F_x, F_y et G sont intégrables sur $\Omega\times\Omega$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} H^2(x,y) &= \int_{\Omega\times\Omega}(f(x)-f(y))^2dxdy\\ &= \int_{\Omega\times\Omega}\Big(f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)\Big)dxdy\\ &= \int_{\Omega\times\Omega}\Big(F_x(x,y)+F_y(x,y)-2G(x,y)\Big)dxdy\\ &< \infty,\end{aligned}$$

donc $H \in L_2(\Omega)$.

Et d'après la question précédente

$$\|H\|^2_{2,\Omega\times\Omega} = \int_{\Omega\times\Omega} F_x(x,y) + \int_{\Omega\times\Omega} F_y(x,y) - 2\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)dxdy = 2\int_\Omega f^2(x)dx - \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2,$$

d'où $\|H\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)} = 2\|f\|^2_{2,\Omega} - \Big(\int_\Omega f(x)x\Big)^2$.

Exercice 32

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f_y(x) = f(x-y)$$

qui est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $(y_j)_{j\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que $\lim_{j\to\infty} y_j = \ell$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

1.a) *Justifier les affirmations suivantes*

$$\exists [c,d] \subset \mathbb{R} : \varphi(x-\ell) = \varphi(x-y_j) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \notin [c,d].$$

$$\exists M > 0 : |\varphi(x-y_j) - \varphi(x-\ell)| < 2M, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [c,d].$$

1. b) *En déduire que* $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0.$

2. Soient $j \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ *quelconques. Montrer que*

2.a) $\|f_y - \varphi_y\|_{1,\mathbb{R}} = \|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}}.$

2. b) $\|f_{y_j} - f_a\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}.$

3. En utilisant un théorème de densité, montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0.$

Solution :

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

1.a) Il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$ si $x < a$ ou $x > b$. On a

$$\varphi(x-\ell) = 0 \quad si \quad x < a + \ell \quad ou \quad x > b + \ell.$$

La suite (y_j) est convergente, donc elle est bornnée, c-à-dire, il existent $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\ell_1 < y_j < \ell_2, \forall j \in \mathbb{N}$. Alors, $x - \ell_2 < x - y_j < x - \ell_1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}$. D'où, Pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi(x-y_j) = 0 \quad si \quad x < a + \ell_1 \quad ou \quad x > b + \ell_2.$$

Enfin,

$$\varphi(x-\ell) = \varphi(x-y_j) = 0 \quad si \quad x < a + \min(\ell_1, \ell) \quad ou \quad x > b + \max(\ell, \ell_2),$$

donc

$\exists[c,d] = [a+\min(\ell_1,\ell), b+\max(\ell,\ell_2)] : \varphi(x-a) = \varphi(x-y_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \notin [c,d]$.

La fonction φ est continue a support compact, donc $\exists M > 0 : |\varphi(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$. En particulier

$$|\varphi(x-y_j)| < M, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [c,d] \quad et \quad |\varphi(x-\ell)| < M, \forall x \in [c,d].$$

Donc, pour tout $x \in [c,d]$ et $j \in \mathbb{N}$, on a

$|\varphi(x-y_j) - \varphi(x-\ell)| \leq |\varphi(x-y_j)| + |\varphi(x-\ell)| \leq 2M$.

1. b) On a $\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_a(x)|dx = \lim_{j\to\infty}\int_c^d |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_a(x)|dx$.

La fonction φ est continue et $\lim_j y_j = \ell$, alors,

$\lim_j |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_\ell(x)| = \lim_j |\varphi(x-y_j) - \varphi(x-\ell)| = |\varphi(x-\ell) - \varphi(x-\ell)| = 0$.

D'autre part, $|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell| \leq 2M, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [c,d]$, et $\int_c^d 2M dx < \infty$, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{j\to\infty}\int_c^d |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_a(x)|dx = \int_c^d \lim_{j\to\infty} |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_a(x)|dx = 0$.

2. **2.a)** En effectuant le changement de variable $t = x-y$, on trouve

$\|f_y - \varphi_y\|_{1,\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - \varphi(x-y)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi(t)|dt = \|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}}$.

2. b) On a

$$\begin{aligned}
\|f_{y_j} - f_a\|_{1,\mathbb{R}} &= \|f_{y_j} - \varphi_{y_j} + \varphi_a - f_a + \varphi_{y_j} - \varphi_a\|_{1,\mathbb{R}} \\
&\leq \|f_{y_j} - \varphi_{y_j}\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_a - f_a\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_a\|_{1,\mathbb{R}} \\
&=\leq \|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi - f\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_a\|_{1,\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Donc $\|f_{y_j} - f_a\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_a\|_{1,\mathbb{R}}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{4}$, et comme $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $j > j_0$.

   Pour $j > j_0$, $\|f_{y_j} - f_a\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_a\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

   alors, $\lim_{j} \|f_{y_j} - f_a\|_{1,\mathbb{R}} = 0$.

Exercice 33

Soient $\rho \in C_c(\mathbb{R})$ et $1 < p < \infty$. Pour tout $f \in L_p(\mathbb{R})$ on pose $S_\rho(f) = f \star \rho$

1) *Justifier l'appartenance de la fonction $y \mapsto \rho(x-y)$ à $L_{p'}(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et calculer sa norme dans $L_{p'}(\mathbb{R})$.*

2) *Montrer que la fonction $y \mapsto f(y)\rho(x-y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc $S_\rho(f)(x)$ existe et fini pour tout $(x, f) \in \mathbb{R} \times L_p(\mathbb{R})$).*

3) *Montrer que S_ρ est linéaire.*

4) *Écrire avec soin l'inégalité de Young pour convolution, puis utilisez-la pour prouver que l'opérateur S_ρ est continu de $L_p(\mathbb{R})$ dans lui même.*

Solution :

Soient $\rho \in C_c(\mathbb{R})$ et $1 \leq p \leq \infty$. Pour tout $f \in L_p(\mathbb{R})$ on pose $S_\rho(f) = f \star \rho$.

1) On sait que $C_c(\mathbb{R}) \subset L_r(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq r \leq \infty$, en particulier $C_c(R) \subset L_{p'}(\mathbb{R})$ donc $\rho(x - \cdot) \in L_{p'}(\mathbb{R})$ puisque $\rho(x - \cdot) \in C_c(\mathbb{R})$.

On a $\|\rho(x - \cdot)\|_{p',\mathbb{R}}^{p'} = \int_{\mathbb{R}} |\rho(x-y)|^{p'} dy$. En effectuant le changement de variable $z = x - y$ on trouve

$\|\rho(x - \cdot)\|_{p',\mathbb{R}}^{p'} = \int_{\mathbb{R}} |\rho(z)|^{p'} dz$ donc $\|\rho(x - \cdot)\|_{p',\mathbb{R}} = \|\rho\|_{p',\mathbb{R}}$.

2) D'après l'inégalité de Hölder $\|f \times \rho(x-\cdot)\|_{1,\mathbb{R}} \leq \|f\|_{p,\mathbb{R}}\|\rho(x-\cdot)\|_{p',\mathbb{R}} = \|f\|_{p,\mathbb{R}}\|\rho\|_{p',\mathbb{R}} < \infty$.

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L_p(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} S_\rho(af+bg) &= \int_{\mathbb{R}} (af(x)+bg(x))\rho(x-y)dy \\ &= a\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho(x-y)dy + +b\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x-y)dy \\ &= aS_\rho(f)+S_\rho(g), \end{aligned}$$

donc S_ρ est linéaire.

4) **Inégalité de Young :** Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ telle que $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Soient $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $g \in L_q(\mathbb{R})$ $f \star g \in L_r(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_{r,\mathbb{R}} \leq \|f\|_{r,\mathbb{R}}\|g\|_{r,\mathbb{R}}$.

En prennant $r = p$ et $q = 1$ on trouve $\|S_\rho(f)\|_{p,\mathbb{R}} = \|f\star\rho\|_{p,\mathbb{R}} \leq \|\rho\|_{1,\mathbb{R}}\|f\|_{p,\mathbb{R}} = C\|f\|_{p,\mathbb{R}}$, donc $S_\rho : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ est borné, et comme S_ρ est linéaire, il est continu de $L_p(\mathbb{R})$ dans lui même.

Exercice 34

Soit $1 < p \leq 2$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} Tu : L^{p'}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto Tu(f) = \int_\Omega fudx, \end{aligned}$$

1) *Montrer que $Tu \in (L^{p'}(\Omega))'$ (le dual de $L^{p'}(\Omega)$) et que $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$.*

2) *Soit h la fonction définie par* $h(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p-2}u(x) & si\ u(x) \neq 0, \\ 0 \quad si \quad u(x) = 0. \end{cases}$

- *Montrer que $h \in L^{p'}(\Omega)$ et $\|h\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$.*

- *En déduire que $\|Tu\|_{L^{p'}(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et que T définit une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans un sous-espace de $(L^{p'}(\Omega))'$.*

3) *Sachant que $L^r(\Omega)$ est réflixif pour tout $r \geq 2$, montrer que $L^p(\Omega)$ est réflixif.*

Solution :

1)Tu est linéaire car l'intégrale est linéaire.

D'après l'inégalité de Hölder $|Tu(f)| \leq \|u\|_{p,\Omega}\|f\|_{p',\Omega}$, pour tout $f \in L^{p'}(\Omega)$, donc Tu est une forme linéaire continue sue $L^{p'}(\Omega)$ et $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

2) $\int_\Omega |h(x)|^{p'}dx = \int_\Omega (|u(x)|^{p-1})^p dx = \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$ donc $h \in L^{p'}(\Omega)$.

$$\|h\|_{p',\Omega} = \Big(\int_\Omega (|u(x)|^p dx\Big)^{1/p'} = \|u\|_{p',\Omega}^{p-1}.$$

$$\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \geq \frac{Tu(h)}{\|h\|_{p',\Omega}} = \frac{\|u\|_{p,\Omega}^p}{\|u\|^{p-1}} = \|u\|_{p,\Omega}.$$

On a déja montrer $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{p,\Omega}$, alors $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} = \|u\|_{p,\Omega}$, donc l'application

$$T : u \in L^p(\Omega) \mapsto Tu \in (L^{p'}(\Omega))'$$

est une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans $T(L^p(\Omega)) \subset (L^{p'}(\Omega))'$.

3) On a $p' \geq 2$ alors $L^{p'}(\Omega)$ est réflixif donc son dual $(L^{p'}(\Omega))'$ est réflixif. $T(L^p(\Omega))$ est un fermé dans $(L^{p'}(\Omega))'$, donc $T(L^p(\Omega))$ est réflixif.

Pusique $T : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))'$ est une isométrie, on peut identifier $L^p(\Omega)$ à $T(L^p(\Omega))$, donc $L^p(\Omega)$ est réflixif.

Bibliographie

[1] J. M. Arnaudiès, *L'intégrale de Lebesgue sur la droite*, Les grands cour vuivert, Francen 1997.

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, MASSON, 1983.

[3] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, NY, 2011.

[4] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998.

[5] M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.