REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI, OUM EL BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

LICENCE 2 ÈME ANNÉE PHYSIQUE

PRÉSENTÉ PAR : ZEFZOUF MERIEM

Année universitaire 2023-2024

Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi
Département de science de la matière

Année universitaire 2023/2024
2ème année physique

Examen de final de MATHS

1 h et 30 m

Exercice 1. *(11 pt) Soit f une fonction complexe définie par :*

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z - i}{z + 1}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Calculer la limite de f au point $z = -1$.*
3. *En déduire que f est holomorphe sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.*
4. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\oint_\gamma \frac{z^2 + 2z - i}{z^2(z + 1)} dz,$$

où

(a) *γ : cercle de centre i et de rayon $\frac{1}{2}$.*
(b) *γ : cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.*
(c) *γ : cercle de centre 0 et de rayon 2.*

Exercice 2. *(5 pt) Soient x et y sont deux réels. Soit la fonction*

$$f(z) = 3x - y - 3i + 5 + iax + iby.$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *(4 pt) Démontrer que*

$$\oint_\gamma (z + \mathrm{e}^z) dz = 0, \quad \text{avec } \gamma \text{ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.}$$

Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi
Département des Sciences de la Matière
Année universitaire 2023/2024
2ème année physique

Correction d'examen final de MATHS

Exercice 1. (10pt) *Soit f une fonction complexe définie par :*

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z - i}{z + 1}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
   Le domaine de définition de f est :

$$\begin{aligned} D_f &= \{z \in \mathbb{C} \mid z + 1 \neq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -1\} \\ &= \boxed{\mathbb{C} \backslash \{-1\}} \ (1pt) \end{aligned}$$

2. *Calculer la limite de f au point $z = -1$.*
   La limite de f au point $z = -1$ est :

$$\lim_{z \to -1} \frac{z^2 + 2z - i}{z + 1} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) - i}{-1 + 1} = \frac{-1 - i}{0} = \boxed{\infty} \ (1pt)$$

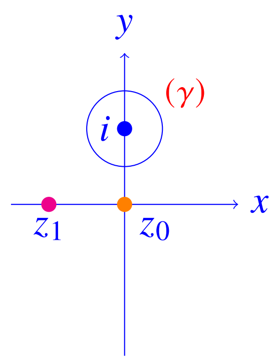
3. *En déduire que f est holomorphe sur son domaine de définition et calculer sa dérivée. f est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{-1\}$ puisque elle est définie comme étant un quotient de deux fonctions plynômiales holomorphes sur $\mathbb{C}$, et le dénominateur est définie et déribable sur $\mathbb{C} \backslash \{-1\}$. (1 pt)*
   La dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(2z + 2)(z + 1) - (z^2 + 2z - i)}{(z + 1)^2} \\ &= \frac{2z^2 + 2z + 2z - z^2 - 2z + i}{(z + 1)^2} \\ &= \boxed{\frac{z^2 + 2z + 2 + i}{(z + 1)^2}} \ (1pt) \end{aligned}$$

4. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz,$$

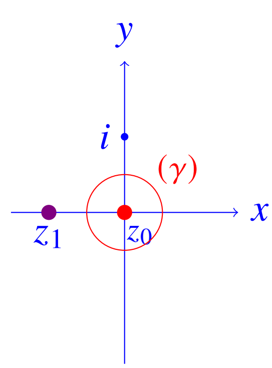
(a) *γ : cercle de centre i et de rayon $\frac{1}{2}$.* *(2 pt)*



On applique les formules intégrales de Cauchy :
la fonction f définie $f(z) = z^2+2z-i$ est holomorphe à l'intérieur et sur γ et le chemin γ est fermé et simple. Les pôles (singularités) de g sont : $z_0 = 0$ pôle d'ordre 2 et $z_1 = -1$ pôle simple. Donc pour le chemin γ les pôles z_0 et z_1 sont à l'extéterieur de γ, d'après les formules intégrales de Cauchy. Alors

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz = 0.}$$

(b) *γ : cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.* *(2 pt)*



D'après le dessin au-dessus,le pôle z_0 est à l'intérieur de γ tandis que le pôle z_1 est à l'extérieur de γ, en gardant les même propriétes du cas précendent (l'holomorphie de f à l'intérieur et sur γ, la fermeture de *chemin γ).*

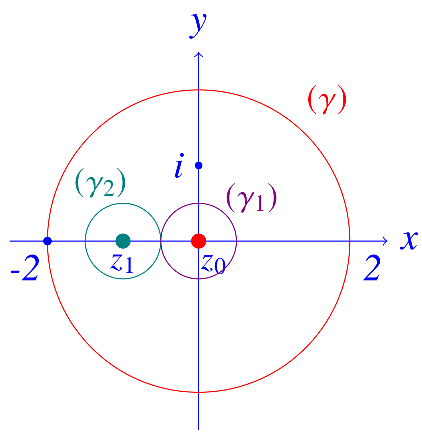
En appliquant les formules intégrales de Cauchy,

$$\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz = \oint_\gamma \frac{\left(\frac{z^2+2z-i}{z+1}\right)}{z^2}dz = \oint_\gamma \frac{f_1(z)}{z^2}dz$$
$$= 2\pi i f_1'(0)$$
$$= 2\pi i f'(0) = 2\pi i(i+2) = -2\pi + 4\pi i.$$

La fonction f_1 est holomorphe sur γ et à l'intérieur γ.
Alors

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz = -2\pi + 4\pi i.}$$

(c) *γ : cercle de centre 0 et de rayon 2.* *(2 pt)*



En gardant les mêmes résultas précédents, et en appliquant les formules intégrales de Cauchy; sachant que dans ce cas les pôles sont à l'intérieur de γ. Alors

$$\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{z^2+2z-i}{z+1}\right)}{z^2}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{z^2+2z-i}{z^2}\right)}{z+1}dz$$
$$= \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^2}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+1}dz$$
$$= 2\pi i f_1'(0) + 2\pi i f_2(-1)$$
$$= -2\pi + 4\pi i + -2\pi i - 2\pi = -4\pi + 2\pi i.$$

Alors,

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{z^2+2z-i}{z^2(z+1)}dz = -4\pi + 2\pi i.}$$

Exercice 2. $(5pt)$ *Soient x et y sont deux réels. Soit la fonction*

$$f(z) = 3x - y - 3i + 5 + iax + iby.$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
En effet,

$$\begin{aligned} f(z) &= 3x - y - 3i + 5 + iax + iby \\ &= \underbrace{\left(3x - y + 5\right)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(ax + by - 3\right)}_{v(x,y)} \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

On calcule les dérivées partielles de u et v :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) &= 3 \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) = a \quad (1pt) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) &= -1 \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) = b \quad (1pt) \end{aligned}$$

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaits (0.5 pt). Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) \implies \boxed{b=3} \quad (1pt) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) &= -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) \implies \boxed{a=1} \quad (1pt) \end{aligned}$$

Les valeurs de a et b pour lesquelles f est holomorphe sont 1 et 3 respectivement.

Exercice 3. $(4pt)$ *Démontrer que*

$$\oint_\gamma (z + \mathrm{e}^z)dz = 0, \quad \text{avec } \gamma \text{ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.}$$

$f(z) = z + \mathrm{e}^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (somme de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$; $f_1(z) = z$ un polynôme complexe et $f_2(z) = \mathrm{e}^z$ est l'exponentielle complexe $(1pt)$.

Le chemin γ est fermé et simple (1 pt).

D'après le théorème de Cauchy $\oint_{\gamma}(z + e^{z})dz = 0$ *(2 pt).*

(1 pt) pour organisation de la feuille.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie
Département des Sciences de la matière

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة

Année Académique: 2023/2024 **Domaine:** Sciences de la Matière
Filière: physique
Spécialité: physique
Niveau: Licence 2ème Année **Période:** Semestre 4
Matière UEF4(O/P) Fonction de la Variable Complexe
Section/Groupe Section 1 / Groupe 1 **Enseignant:** ZEFZOUF Meriem

PV des notes CC par matière (Enseignant)

#	Matricule	Nom	Prénom	Note CC	Note corrigée	Signature
1	222234019210	BELHAMEL	NOUSSAIBA	8.25		
2	222234057302	BELKHIRI	SILIA	19.75		
3	212134010226	BOUCHELAGHEM	ASSALA NESRIN	10.53		
4	212134006857	BOUMAHDJOUR	NOUR-EL-HOUDA	14.75		
5	212134001732	BOUTEMINNE	DJIHANE	9.0		
6	202034011796	CHIBANI	ABDESLAM	6.25		
7	212134010111	CHOHRA	IMANE	13.0		
8	222234038715	DEKDOUK	MANEL	12.0		
9	222234038712	DEROUICHE	MARWA	11.75		
10	222234065706	DJERTLI	ABD EL BASSIT	18.25		
11	222234008020	FARHI	MALAK ANFAL	13.75		
12	212134006304	GHERBI	ABOU ELKACEM	11.0		
13	222234019310	HAFSA	NOUR EL IMANE	18.0		
14	221434002958	KABOUCHE	Sara	18.0		
15	212134005820	MEKKAS	ASMA	11.25		
16	222234032710	MENOUBI	NOUHA	13.5		
17	202034007233	MERAH	OUIEM			
18	222234053307	MEROUANI	RANIA	12.75		
19	222234037408	SAOUDI	MOHAMMED	15.75		

Signature de l'enseignant: (ZEFZOUF Meriem)
Le: 30/05/2024

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie
Département des Sciences de la matière

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة

Année Académique: 2023/2024 **Domaine:** Sciences de la Matière
Filière: physique
Spécialité: physique
Niveau: Licence 2ème Année **Période:** Semestre 4
Matière UEF4(O/P) Fonction de la Variable Complexe
Section/Groupe Section 1 / Groupe 2 **Enseignant:** ZEFZOUF Meriem

PV des notes CC par matière (Enseignant)

#	Matricule	Nom	Prénom	Note CC	Note corrigée	Signature
1	222234068002	ACHI	KENZA	18.0		
2	222234054007	AGGOUN	MERIEME	12.75		
3	202034008686	AMENAI	AYA	9.5		
4	222234028011	BELBARKA	RACHA NOUR	16.5		
5	222234017619	BENCHIKHA	CHEYMA	17.0		
6	202034007727	BOUMARAF	MOUNA	10.25		
7	191934004691	BOUMAZA	DJAMAL			
8	222234038710	BOUTRA	KAOUTHER	13.25		
9	222234007115	DIR	ABDELDJALIL	13.75		
10	202034002505	FIZI	IMANE	10.18		
11	202034011706	GHOUAR	CHAIMA	13.0		
12	202034008925	KASSA	LOUBNA	9.75		
13	212134008404	KOUTI	HIND	13.86		
14	202034003286	LAIEB	SAMIA	10.25		
15	222234045203	MAHDI	DHIKRA	14.25		
16	222234070507	MERROUCHE	CHAIMA	16.25		
17	202034008927	MESSAOUDI	LILYA	0.0		
18	202034007094	MESSAOUDI	MOHAMMED	11.5		
19	202034008696	MIHOUBI	BOUTHEINA	15.25		
20	212134001491	NAANOUA	HANA	10.17		
21	212134006374	REGGADI	AISSA	14.0		
22	202034003306	REZAIGUIA	MARWA			
23	202034006655	ROUMANE	WAISSAL			
24	222234055811	SAHBI	NIDAL	12.25		
25	202034007246	ZAHAF	HASSAN			

Signature de l'enseignant: (ZEFZOUF Meriem)
Le: 30/05/2024

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie
Département des Sciences de la matière

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة

Année Académique: 2023/2024 **Domaine:** Sciences de la Matière
Filière: physique
Spécialité: physique
Niveau: Licence 2ème Année **Période:** Semestre 4
Matière UEF4(O/P) Fonction de la Variable Complexe
Section/Groupe Section 1 **Enseignant:** ZEFZOUF Meriem

PV des notes des examens par matière (Enseignant)

#	Matricule	Nom	Prénom	Note Examen	Note corrigée	Signature
1	222234068002	ACHI	KENZA	11.75		
2	222234054007	AGGOUN	MERIEME	10.75		
3	202034008686	AMENAI	AYA	1.75		
4	222234028011	BELBARKA	RACHA NOUR	11.25		
5	222234019210	BELHAMEL	NOUSSAIBA	12.5		
6	222234057302	BELKHIRI	SILIA	19.0		
7	222234017619	BENCHIKHA	CHEYMA	7.75		
8	212134010226	BOUCHELAGHEM	ASSALA NESRIN	0.0		
9	212134006857	BOUMAHDJOUR	NOUR-EL-HOUDA	11.25		
10	202034007727	BOUMARAF	MOUNA	1.5		
11	191934004691	BOUMAZA	DJAMAL	0.0		
12	212134001732	BOUTEMINNE	DJIHANE	2.25		
13	222234038710	BOUTRA	KAOUTHER	13.0		
14	202034011796	CHIBANI	ABDESLAM	3.0		
15	212134010111	CHOHRA	IMANE	7.5		
16	222234038715	DEKDOUK	MANEL	9.25		
17	222234038712	DEROUICHE	MARWA	3.0		
18	222234007115	DIR	ABDELDJALIL	7.75		
19	222234065706	DJERTLI	ABD EL BASSIT	14.25		
20	222234008020	FARHI	MALAK ANFAL	11.75		
21	202034002505	FIZI	IMANE	0.0		
22	212134006304	GHERBI	ABOU ELKACEM	1.75		
23	202034011706	GHOUAR	CHAIMA	4.75		
24	222234019310	HAFSA	NOUR EL IMANE	14.5		
25	221434002958	KABOUCHE	Sara	15.25		
26	202034008925	KASSA	LOUBNA	2.5		
27	212134008404	KOUTI	HIND	0.0		
28	202034003286	LAIEB	SAMIA	3.25		
29	222234045203	MAHDI	DHIKRA	10.25		
30	212134005820	MEKKAS	ASMA	5.5		
31	222234032710	MENOUBI	NOUHA	10.25		
32	202034007233	MERAH	OUIEM	0.0		
33	222234053307	MEROUANI	RANIA	7.0		
34	222234070507	MERROUCHE	CHAIMA	9.25		
35	202034008927	MESSAOUDI	LILYA	1.5		
36	202034007094	MESSAOUDI	MOHAMMED	1.5		
37	202034008696	MIHOUBI	BOUTHEINA	17.5		
38	212134001491	NAANOUA	HANA	0.0		
39	212134006374	REGGADI	AISSA	6.25		
40	202034003306	REZAIGUIA	MARWA	0.0		
41	202034006655	ROUMANE	WAISSAL	0.0		
42	222234055811	SAHBI	NIDAL	3.75		
43	222234037408	SAOUDI	MOHAMMED	6.75		
44	202034007246	ZAHAF	HASSAN	0.0		

Signature de l'enseignant: (ZEFZOUF Meriem)
Le: 30/05/2024