الحل النموذجي لـ d متكافئ لتمثيل -2-

حل التمرين 01 (8 نقط) - (التكامل 1: 3ن - التكامل 2: 2,5 - التكامل 3: 2,5)

1/ $\int \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)}dx = \int \left(\frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx$.

$\frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2} = \frac{(a+b)x^2 + (2b+c)x + 2(a+c)}{(x+2)(x^2+2)}$ (1)

(0,25) (0,25) (0,5)

$= \frac{x^2 - x}{(x+2)(x^2+2)}$.

$\begin{cases} b = a-1 \\ c = -a \\ a = 1 \end{cases}$ (0,25) أي $\begin{cases} b = a-1 \\ 2b+c = -1+2 \\ a+c = 0 \end{cases}$ (0,25) أي $\begin{cases} a+b = 1 \\ 2b+c = -1 \\ 2(a+c) = 0 \end{cases}$ (0,25) : بالطرح

(1)

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$ (0,25) ومنه

$\int \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx = \ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$ (1)

(0,25) (0,25)

$= \ln|x+2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$. (0,5)

2/ $\int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x}dx$

نضع: $t = \cos x$ أي $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ أي $dt = -\sin x dx$ 0,5

$-\int \frac{t\,dt}{1-t} = \int \frac{t}{t-1}dt = \int \frac{t-1+1}{t-1}dt$ (0,5) ومنه (0,5) (1)

$= \int 1\,dt + \int \frac{1}{t-1}dt = t + \ln|t-1| + c$ (0,5)

$= \cos x + \ln|\cos x - 1| + c$ (0,5)

3/ $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

$u = \ln(1+x^2) \Rightarrow u' = \frac{2x}{1+x^2}$: نضع

$v' = 1 \Rightarrow v = x$.

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg}(x) + c.$$

المعادلة (ذ) في $\mathbb{R}$ المجال $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$.

$y' + 2y = -4x$ ..... (*)

1/ حل المعادلة المتجانسة:

$y' + 2y = 0$.

$\frac{y'}{y} = -2 \Rightarrow \ln|y| = -2x + c$

وبالتالي $y_H = ce^{-2x}$

2/ نقوم بتغيير الثابت c:

$y_p = c(x)e^{-2x}$.

y_p حل لـ (*) معناه:

$c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x} + 2c(x)e^{-2x} = -4x$

$c'(x) = -4xe^{2x}$.

ومنه $c(x) = -4\int xe^{2x}\,dx$.

بالمجزئة.

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$c(x) = -4\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right]$

$c(x) = -2xe^{2x} + e^{2x}$

$c(x) = y_p = -2x + 1$

$y = y_p + y_H = -2x + ce^{-2x}$ إذن:

الحل العام للمعادلة (ذ) هو: $(-2x+1)$

3/ $y' - y = 2xy^3$.

$y'y^{-3} - y^{-2} = 2x$.

نضع: $y^{-2} = t$

$t' = -2y'y^{-3}$

$t' + 2t = -4x$. 0,75

وهي المعادلة (*) : نبين أن :

$t = (-2x + 1) + ce^{-2x}$. 0,5

$y^{-2} = t \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 0,25

$y = \frac{1}{\sqrt{-2x+1+ce^{-2x}}}$ 0,25

التمرين الثالث : (09 ن)

$x \longmapsto \ln(\cos x)$

$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)}_{t}\right)$ 0,5

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2} + o(x^4)$ 0,5

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ 0,5

$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. 0,5

$(\cos x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x)}$ (ومنه) 0,5

$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$ 0,5

$= 1$. 0,5

$f(x) = \ln(\cos x) - \frac{2}{1-x}$.

$= -\frac{x^2}{2} - 2\left[1 + x + x^2 + \right] + o(x^2)$ 0,5

$f(x) = -2 - 2x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$ 0,5

معادلة مقاربة (T) لـ (C_f) في $+\infty$: 0,5

$(T) : y = -2 - 2x$.

$f(x) - y = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \leq 0$ 0,5

وبالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المقارب (T) . 0,5

النقطة $A(0,-2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .