

Exo1 - Voir cours : On a $\forall z \in \mathbb{C}^* (r \neq 0)$
 3 pts La fonction $f(z) = \ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta$
 ou $u(r, \theta) = \ln r$ et $v(r, \theta) = \theta$
 et $f(z)$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann
 en polaires soient :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

et alors :

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = e^{i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}$$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$

Exo2 - Montrons que $f(z) = e^z$ est périodique
 3 pts En effet : $\forall k \in \mathbb{N}$ on a :

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$$

Donc e^z est périodique de période imaginaire pure $P = 2\pi i$

Exo3 : Soit $f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)z(z+1)^2}$
 7 pts on a trois singularités :

* $z=0$ est une singularité apparente car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{(z-1)(z+1)^2} = 1 \cdot \frac{1}{(0-1)(0+1)^2} = -1$$

et par conséquent $\text{Res}(f, 0) = 0$

* $z=1$ est un pôle d'ordre 1

$$\text{et } \text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \{ (z-1) \cdot f(z) \} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{z(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4}$$

* $z=-1$ est un pôle d'ordre 2 et :

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(z+1)!} \frac{d}{dz} [(z+1)^2 \cdot f(z)] = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{(z-1) \cdot z} \right)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{\cos z \cdot (z-1) \cdot z - (2z-1) \sin z}{(z-1)^2 \cdot z^2} \right] = \dots = 0,48$$

Exo 4 : Soit l'intégrale $I = \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^3}$

Fpts

on a 2 singularités :

$$z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow \begin{cases} z_0=i \\ z_1=-i \end{cases}$$

Or $z_0=i$ est extérieur au domaine intérieur à la courbe C est par conséquent il n'intervient pas dans le calcul de I , il reste que

$I = 2\pi i \text{Res}(f, -i)$ comme $-i$ est un pôle triple alors :

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} \left((z+i)^3 f(z) \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} \left((z+i)^3 \cdot \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z-i)^3} \right)$$

$$= 1 \cdot 3i \cdot 3 = 9i$$