(1) b- D'après le corollaire → ~~[illegible]~~ le Th 2.2.5)
qui dit si F est s.e.v fermé de E et $x \notin F \Rightarrow \exists \varphi \in E^*$: $\varphi(x)=1$ $\forall x \in E \setminus F$ et $\varphi|_F \equiv 0$.

c- Si f provient d'1 $a \in l^1 \Rightarrow \|f\| = \|a\|_1 < +\infty$: $a=(a_i)_{i\geq 0} \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = 0$ (l^1 c.s.) 0,5 0,5
or $f|_{c_0} \equiv 0 \Rightarrow \|f\|_{l^\infty} = 0$ contradiction avec $f(x)=1$ $\forall x \in l^\infty \setminus c_0$. 0,5

on a montré que $(l^1)^* \cong l^\infty$ 0,5 et $(l^\infty)^* \supsetneq l^1 \Rightarrow l^1$ n'est pas réflexif. 0,5

Ex3: (6pts) 1°. Comme $T \in L(E,F) \Rightarrow \exists c>0 : \|Tx\| \leq c\|x\|$ $\forall x \in E$.
0,5 or $D(T^*) = \{v \in F^* : \exists c>0 : |\langle Tx, v\rangle| \leq c\|x\|\}$ or $\forall v \in F^*, \forall x \in E$ on a : $|\langle Tx, v\rangle| \leq c\|x\|$
0,5 donc $D(T^*) = F^*$ et $|\langle Tx, v\rangle| = |\langle x, T^*v\rangle|$: $\|T^*v\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, T^*v\rangle| \leq c \Rightarrow T^*$ est borné

2 2°. $\overline{TE} = F \iff TE^\perp = \{0\}$ 0,5 d'après 1 corollaire du Th Hahn Banach. 0,5
i.e $\forall x \in E, \forall v \in F^*$ on a $|\langle Tx, v\rangle| = |\langle x, T^*v\rangle|$
soit $v \in TE^\perp \iff \langle x, T^*v\rangle = 0$ $\forall x \iff T^*v = 0 \iff v \in \operatorname{Ker} T^* \iff \operatorname{Ker} T^* = \{0\}$. 0,5 0,5

2 3°. Soit $i : l^1 \longrightarrow l^2$ l'injection canonique $\Rightarrow i^* : l^2 \longrightarrow l^\infty$ 0,5
$\Rightarrow$ si $i^*(x) = 0 \Rightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow i^*$ est injectif, mais 0,5
$\exists (x_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ $(x_n) \in l^2$ car $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ mais $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln(+\infty) = +\infty$ 0,25
donc i n'est pas surjectif. 0,25
~~[illegible]~~ si $F = L^1(0,1)$ et $E = L^2(0,1) \rightarrow i$

2 4°. Si T est surjectif alors d'après le Th de l'application ouverte $\exists c>0$ 0,5
$\|x\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$ $\forall x \in E := D(T)$. $\forall y \in F$ $(y = Tx)$ 0,5
or on a $\|T^*v\| := \sup_{\|x\|\leq 1} \left[|T^*v(x)| = |\langle x, T^*v\rangle| = |\langle Tx, v\rangle| \right] \leq \sup_{\|y\|\leq c} |\langle y, v\rangle|$ 0,5 0,25
$:= \sup_{\|y\|\leq c} |v(y)| := c \sup_{\|z\|\leq 1} |v(z)| = c\|v\|$. 0,25

Remarque: pour l'Ex 1:
1° → C'est l'ex N° 10 → série 1. → fait plusieurs fois.
2° → Th Banach Steinhauss. → " "
3° → C'est l'assertion 1 dans la proposition 3.4.5.

---

pour l'Ex 2:
~~Tous les~~ questions dans l'exercice N° 5 série 2.

pour l'Ex 3: → C'est 1 exercice donné dans le Devoir (plus de 3 mois
2° → fait plusieurs fois dans ch2 et ch3 : $R(T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$ (cours et TD + Devoir)
Ex8 — Série 3.
1° → Définition de T^*. → cours et TD.
3° → C'est seulement par définition de $\|T^*v\|$ et la relation entre T et T^*
C'est presque l'exercice 11 → série 3.