correction du contrôle I TOL
· Mai 2024.

Ex 1 : (7 pts). posons $\langle T_n x, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H, \ \forall n \geq 1 \ldots\ldots (1)$

3 1° comme H est 1 Hilbert (Banach) donc il suffit de montrer T_n est fermé $\forall n$ 0,5

Soit $x_k \in H$: $x_k \longrightarrow x$ et $T_n x_k \underset{k}{\longrightarrow} f \overset{?}{\Rightarrow} T_n x = f$. 0,25

$\forall y \in H$ on a : d'après (1) : $\langle T_n(x_k - y), x_k - y\rangle \underset{k\to +\infty}{\longrightarrow} \langle -T_n y + f, x - y\rangle \geq 0$ 0,25

posons $y = x - tz$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in H$. 0,25

alors $\langle f - Tx + tTz, tz\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle f - Tx, tz\rangle \geq t^2 \langle Tz, z\rangle$ 0,25

- pour $t > 0 \Rightarrow \langle f - Tx, z\rangle \geq 0 \ \forall z \in H$, $-t < 0 \Rightarrow \langle f - Tx, z\rangle \leq 0$ 0,25

donc $\langle f - Tx, z\rangle = 0 \ \forall z \in H \Rightarrow Tx = f \Rightarrow T$ est fermé $\Leftrightarrow T$ est continu. 0,5

2 2° $T_n x \longrightarrow Tx \overset{1°}{\Rightarrow} (T_n x)$ est borné $\forall n \geq 1 \Rightarrow \sup_n \|T_n x\| \leq C(x)$. 0,5

d'après le Théorème de Banach Steinhaus (T_n) est uniformément borné

$\exists C > 0$: $\sup_n \|T_n\| \leq C$ 0,5

or $\|Tx\| = \|\lim T_n x\| \leq \sup_n \|T_n\| \|x\| \leq C\|x\| \Rightarrow T$ est continu. 0,5

de plus $\|Tx\| \leq \|T_n\| \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \lim \inf \|T_n\| \leq C$. 0,5

2 3° $T = T^*$?

0,5 a. $T = T^* \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} \Leftrightarrow h(x,y) = \overline{h(y,x)} \Leftrightarrow h$ est hermitienne

1,5 b. soit $\varphi(x,y) = h(x,y) - \overline{h(y,x)}$, 0,5 on a $\varphi(x,x) = 0$, or d'après = de polarisation 0,5

on obtient $\varphi(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in H^2 \Rightarrow h(x,y) = \overline{h(y,x)}$ 0,5 $\Leftrightarrow h$ hermitienne,

d'après a $\Rightarrow T = T^*$.

Ex 2 (7)

1,5 1° Soit $x = (x_n) \in \ell^\infty$, soit $T_x : (\ell^1, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{K}$; $T_x y = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$

on a $\left|\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_{\ell^1} \Rightarrow T_x$ est bien défini. 0,25

- soit $(y,z) \in (\ell^1)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow T_x(y + \lambda z) = \sum x_n y_n + \lambda \sum x_n z_n \Rightarrow T_x$ est linéaire

De plus $|T_x(y)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_{\ell^1} \Rightarrow \|T_x\| \leq \|x\|_\infty \ldots\ldots (1)$ T_x est continu. 0,5

D'autre part on a : $T_x(e_n) = x_n$ et $\|e_n\|_1 = 1 \Rightarrow \|T_x\| \geq \|x\|_\infty \ldots\ldots (2)$ 0,5

d'après (1) et (2) $\Rightarrow \|T_x\| = \|x\|_\infty \ldots\ldots (*)$ 0,25

2 2° Il est clair que T est linéaire, et $(*) \Rightarrow T$ est 1 isométrie, 0,5 est ce que T surjective

, soit $f \in (\ell^1)^*$. $\forall n \geq 0$ on pose : $x_n = f(e_n)$, on a $|x_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \Rightarrow x = (x_n) \in \ell^\infty$

pour tout $n \geq 0$, on a $T_x(e_n) = x_n = f(e_n)$, donc $T_x = f$ sur C_c = {suites à support compact}

(comme $\overline{C_c(\mathbb{R})} = L^p$ for $1 \leq p < \infty$ alors $\overline{C_c} = \overline{C_c(\mathbb{N})} = \ell^p$ 0,5 $1 \leq p < \infty$.

donc $T_x = f \Rightarrow f$ est surjective.

3,5 3° a. Soit $(y) \in \overline{C_0} \Rightarrow \exists (x) \in C_0$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0 \ \forall n \geq N_0 \Rightarrow \|y - x\| \leq \varepsilon/2$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 0,5

donc $\forall n \geq 0$ on a $|y_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n| \longrightarrow 0 \Rightarrow (y) \in C_0 \Rightarrow C_0$ est fermé