Corrigé de l'examen d'Analyse 4

8pts

Solution 1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Continuité de f en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a*

0,5

$$|f(x,y)| = |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|,$$

d'où, par encadrement,

$$f(x,y) \to 0 = f(0,0) \quad \text{quand } (x,y) \to (0,0).$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

2. *Calcul des dérivées partielles d'ordre 1 au point $(0,0)$. On calcule les taux d'accroissement pour $t \neq 0$:*

0,25

0,25

$$\begin{aligned} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} &= 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \\ \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} &= 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0). \end{aligned}$$

3. *Etude de la différentiabilité de f en $(0,0)$. Si f était différentiable en $(0,0)$, alors compte tenu de la question précédente, sa différentielle en $(0,0)$ est forcément l'application nulle*

0,5

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y = 0,$$

et doit vérifier

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0,$$

i.e.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|_2} = 0.$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on calcule

0,5

$$\left| \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|_2} \right| = \frac{\dfrac{|x|\, y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\, y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Cette dernière quantité ne tend pas vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$ car elle vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ pour $x = y$. Ceci signifie que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4. *Calcul des dérivées partielles d'ordre 1 en un point $(x,y) \neq (0,0)$.* La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par suite, f admet en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ des dérivées partielles d'ordre 1. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

0,25

0,5

0,5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etude de la continuité en $(0,0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On constate que pour $t \in \mathbb{R}^*$,

0,5 × 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{t^4}{t^4} = 1 \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = \frac{1}{2} \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \quad \text{lorsque } t \to 0,$$

ce qui montre que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

5. *Plus grand ouvert U sur lequel f est de classe C^1.* Ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'étant pas continues en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par contre, par les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U.

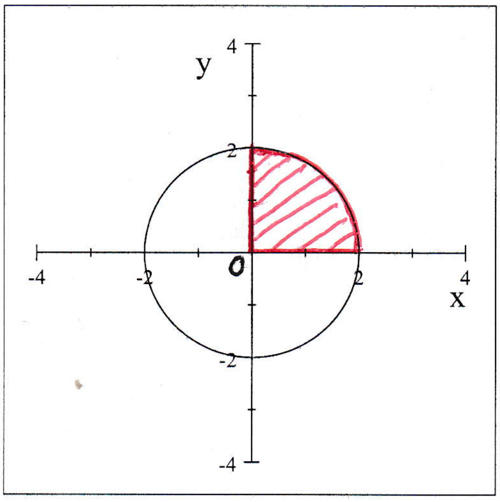
0,5

6. *Soit D le domaine plan défini par*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

a) *Représentation graphique de D*

0,5



D est le quart du disque hachuré y compris le contour.

0,25

b) *Compacité de D.* *L'ensemble D est borné car inclus dans $\overline{B}_2((0,0),2)$ (boule fermée centrée à l'origine et de rayon 2 pour la norme euclidienne).*

L'ensemble D est fermé. En effet,

0,5

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in [0,+\infty[, \ y \in [0,+\infty[, \ 4 - x^2 + y^2 \in [0,+\infty[\right\} \\ &= a^{-1}\left([0,+\infty[\right) \cap b^{-1}\left([0,+\infty[\right) \cap c^{-1}\left([0,+\infty[\right) \end{aligned}$$

où $a(x,y) = x$, $b(x,y) = y$ et $c(x,y) = 4 - x^2 + y^2$. Les fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (car polynômiales) et $[0,+\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc $a^{-1}\left([0,+\infty[\right)$, $b^{-1}\left([0,+\infty[\right)$ et $c^{-1}\left([0,+\infty[\right)$ sont fermés dans $\mathbb{R}^2$. Enfin, D est fermé comme intersection finie de fermés.

0,25

D est donc compact.

c) *Calcul de l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.* *Faisons un passage en coordonnées polaires*

$$\Phi : (r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On a

0,5

$$\begin{aligned} D' &= \Phi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\ ; \ \Phi(r,\theta) \in D\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\ ; \ r \le 2, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= [0,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

0,25 0,25 *Comme f est continue sur D, on a* moyennant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

0,25 0,25 0,25

3,5/5 **Solution 2** *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, vérifiant*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(4,1) = -1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(4,1) = 2, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(4,1) = 1, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(4,1) = 7, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(4,1) = 4.$$

0,5 *On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi\left((1+t)^2, t\right)$.*
Introduisons les fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $g_1(t) = (1+t)^2$ et $g_2(t) = t$.
La fonction $g = (g_1, g_2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car ses composantes sont des fonctions polynômiales. Par composition, $f = \varphi \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, les dérivées première f' est seconde f'' sont données en chaque point $t \in \mathbb{R}$ par la règle de la chaîne comme suit :

0,75

$$f'(t) = (\varphi\circ g)'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2'(t),$$

et

0,25

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2'(t)\right)' \\
&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right)\right)' g_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1''(t) \\
&\quad + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right)\right)' g_2'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2''(t) \\
&= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1'(t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2'(t)\right) g_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1''(t) \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1'(t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2'(t)\right) g_2'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2''(t) \\
&= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(g_1(t), g_2(t)\right)\left(g_1'(t)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right)\right) g_1'(t) g_2'(t) \\
&\quad + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(g_1(t), g_2(t)\right)\left(g_2'(t)\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_1''(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(g_1(t), g_2(t)\right) g_2''(t)
\end{aligned}$$

0,5 0,25

ce qui donne par le théorème de Schwarz,

0,25

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(g_1(t),g_2(t))\,(g_1'(t))^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(g_1(t),g_2(t))\,g_1'(t)g_2'(t) \\
&\quad + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(g_1(t),g_2(t))\,(g_2'(t))^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(g_1(t),g_2(t))\,g_1''(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(g_1(t),g_2(t))\,g_2''(t).
\end{aligned}
$$

En observant que $g_1'(t) = 2(1+t)$, $g_1''(t) = 2$, $g_2'(t) = 1$ *et* $g_2''(t) = 0$, *il vient*

0,25
$$f'(t) = 2(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left((1+t)^2,t\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left((1+t)^2,t\right),$$

0,25
$$f''(t) = 4(1+t)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left((1+t)^2,t\right) + 4(1+t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left((1+t)^2,t\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left((1+t)^2,t\right) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left((1+t)^2,t\right).$$

Finalement, pour $t = 1$, *il vient*

0,25
$$f'(1) = 4\frac{\partial\varphi}{\partial x}(4,1) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(4,1) = 4(-1) + 2 = -2,$$

0,25
$$f''(1) = 16\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(4,1) + 8\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(4,1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(4,1) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}(4,1) = 16.1 + 8.4 + 7 + 2(-1) = 53.$$

4,5

Solution 3

1. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $a \in U$ *et* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *(au moins dans un voisinage de* a*). Pour tout* $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *tel que le segment* $[a, a+h]$ *soit contenu dans* U, *on a*

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j + o\left(\|h\|^2\right) \\
&= f(a) + h\,\nabla f(a) + \frac{1}{2}h\,\mathbf{H}_f(a)\,h^t + o\left(\|h\|^2\right),
\end{aligned}
$$

1,5

où h^t *est le vecteur transposé de* h, $\nabla f(a)$ *est le gradient de* f *au point* a *donné par*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^t$$

et $\mathbf{H}_f(a)$ *est la matrice hessienne de* f *au point* a *donnée par*

$$\mathbf{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n}.$$

0,5

2. *Par composition et produit, la fonction* $f : (x,y) \mapsto x\ln(1+y)$ *est de classe* C^2 *sur l'ouvert* $U = \mathbb{R}\times\left]-1,+\infty\right[$. *La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point*

0,5

$a = (1,1) \in U$ s'écrit pour $h = (h_1, h_2)$ au voisinage de $(0,0)$, en observant que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$ grâce au théorème de Schwarz,

$$\begin{aligned} f(1+h_1, 1+h_2) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)h_2^2\right) + o\left(\|h\|_2^2\right). \end{aligned}$$

On calcule les dérivées :

0,25 ×5

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \ln(1+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{(1+y)^2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

0,25

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \ln 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \ln 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) &= 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

D'où,

$$f(1+h_1, 1+h_2) = \ln 2 + (\ln 2)\,h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_1 h_2 - \frac{1}{8}h_2^2 + o\left(h_1^2 + h_2^2\right),$$

soit pour (x,y) au voisinage de $(1,1)$:

$$f(x,y) = \ln 2 + (\ln 2)\,(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2 + o\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right).$$

4,5/15

Solution 4

0,5

1. *La fonction $f : (x,y) \mapsto xy + \sin(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 (et même C^∞) en tant que somme de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto xy$ et de la fonction $(x,y) \mapsto \sin(x+y)$ elle même de classe C^1 comme composée de la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x+y$ avec la fonction* sin.

0,25

Si $(x_0, y_0) = (0,0)$ on a $f(x_0,y_0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \cos(x+y)$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer qu'il existe V voisinage de $x_0 = 0$, W voisinage de $y_0 = 0$ et $\varphi : V \to W$ de classe C^1 tels que

1

$$\forall (x,y) \in V \times W, \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

0,25

Finalement, comme f est de classe C^∞, le théorème assure que φ est également de classe C^∞.

2. *Par définition de* φ *on a* $\varphi(x_0) = y_0$*, autrement dit* $\varphi(0) = 0$*. Par ailleurs, pour tout* $x \in V$ *on a* $f(x, \varphi(x)) = 0$*, i.e.*

0,25

$$x\varphi(x) + \sin(x + \varphi(x)) = 0.$$

0,25

La fonction $x\varphi(x) + \sin(x + \varphi(x))$ *est constante (égale à* 0*) au voisinage de* 0*, ses dérivées successives sont donc nulles au voisinage de* 0*.*

En dérivant une première fois on obtient ainsi

0,25

$$\varphi(x) + x\varphi'(x) + (1 + \varphi'(x))\cos(x + \varphi(x)) = 0$$

0,25

et donc en $x = 0$*, et sachant que* $\varphi(0) = 0$*, on obtient* $\varphi'(0) = -1$*.*

En dérivant une seconde fois on obtient

0,5

$$2\varphi'(x) + x\varphi''(x) + \varphi''(x)\cos(x + \varphi(x)) - (1 + \varphi'(x))^2 \sin(x + \varphi(x)) = 0$$

0,25

et donc en $x = 0$*, et sachant que* $\varphi(0) = 0$ *et* $\varphi'(0) = -1$*, on obtient* $\varphi''(0) = 2$*.*

Finalement, comme φ *est de classe* C^∞*, son DL est donné par la formule de Taylor et on a, au voisinage de* $x_0 = 0$*,*

0,5

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2),$$

i.e.

0,25

$$\varphi(x) = -x + x^2 + o(x^2).$$