

Université Laarbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de Vie

Département des sciences de la matière

Polycopié de cours

PHYSIQUE I

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Rédigé par: MEZIANI Amel

Maître de Conférences Classe B

1^{ère} année LMD

SM-ST-MI

Année universitaire : 2021/2022

AVANT PROPOS

Ce polycopié de mécanique du point (Physique 1) est destiné aux étudiants de la première année de l'enseignement supérieur LMD Science de la Matière (SM), Sciences et Technologie (ST) et Mathématiques et Informatique (MI). Il conforme au programme officiel de mécanique du point (physique 1) de la première année LMD (Licence-Master-Doctorat).

Ce polycopié est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des rappels mathématiques sur l'analyse dimensionnelle, calcul d'incertitudes et les vecteurs.

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique du point.

Le troisième chapitre concerne la dynamique du point.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du travail et énergie.

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

CHAPITRE I : RAPPELS MATHEMATIQUES

I.1 Analyse dimensionnelle.....	1
I.1.1 Grandeurs et unités.....	1
I.1.1.1 Grandeurs.....	1
a) Grandeur scalaire.....	1
b) Grandeur vectorielle.....	1
I.1.1.2 Unités.....	1
a) Unités fondamentales (unités de base du système international).....	1
b) Unités dérivées.....	1
I.1.2 Equations aux dimensions.....	2
I.1.2.1 Dimension.....	2
I.1.2.2 Equation aux dimensions.....	2
I.1.2.3 Utilité des équations aux dimensions.....	3
I.2 Calcul d'incertitudes.....	3
I.2.1 Erreur absolue.....	3
I.2.2 Erreur relative.....	3
I.2.3 Incertitude absolue.....	4
I.2.4 Incertitude relative.....	4
I.2.5 Calcul d'incertitudes	4
I.2.5.1 Méthode des différentielles totales.....	4
I.2.5.2 Méthode des différentielles logarithmiques.....	5
I.3 Les vecteurs.....	5
I.3.1 Définition.....	5
I.3.2 Vecteur unitaire.....	6
I.3.3 Algèbre vectorielle.....	6
I.3.3.1 Egalité de deux vecteurs.....	6
I.3.3.2 Addition (somme) de deux vecteurs.....	6
I.3.3.3 Différence de deux vecteurs.....	6
I.3.3.4 Multiplication d'un vecteur par un nombre.....	7

I.3.4 Composantes d'un vecteur.....	7
I.3.5 Produit scalaire.....	8
I.3.6 Produit vectoriel.....	9
I.3.7 Produit composé (mixte).....	10
I.3.8 Produit double (le double produit vectoriel).....	10
I.3.9 Dérivées de vecteurs.....	11
I.3.10 Moment d'un vecteur par rapport à un point.....	11
I.3.11 Moment d'un vecteur par rapport à un axe.....	12
I.3.12 Gradient, divergence et rotationnel.....	12
I.3.12.1 Gradient.....	13
I.3.12.2 Divergence.....	13
I.3.12.3 Rotationnel.....	13
I.3.13 Le Laplacien.....	14

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II.1 Introduction.....	15
II.2 Définitions.....	15
II.3 Systèmes de coordonnées.....	15
II.3.1 Les coordonnées cartésiennes.....	15
II.3.2 Les coordonnées polaires.....	17
II.3.3 Les coordonnées cylindriques.....	18
II.3.4 Les coordonnées sphériques.....	20
II.4 Mouvement rectiligne.....	22
II.4.1 Définition.....	22
II.4.2 La vitesse.....	22
II.4.2.1 La vitesse moyenne.....	22
II.4.2.2 La vitesse instantanée.....	23
II.4.3 L'accélération.....	23
II.4.3.1 L'accélération moyenne.....	23
II.4.3.2 L'accélération instantanée.....	23
II.4.4 Mouvement rectiligne uniforme.....	23
II.4.5 Mouvement rectiligne uniformément varié.....	24

II.5 Mouvement dans l'espace (mouvements curvilignes).....	24
II.5.1 Vecteur de déplacement.....	25
II.5.2 Vecteur vitesse.....	25
II.5.3 Vecteur accélération.....	25
II.6 Abscisse curviligne.....	26
II.7 Composantes intrinsèques de l'accélération : repère de FRENET.....	26
II.8 Mouvement dans différents systèmes de coordonnées.....	28
II.8.1 Système cartésien.....	28
II.8.2 Système cylindrique.....	29
II.8.3 Système sphérique.....	30
II.9 Etude de mouvements particuliers.....	31
II.9.1 Mouvement circulaire.....	31
II.9.2 Mouvement rectiligne sinusoïdal.....	33
II.10 Le mouvement relatif.....	34
II.10.1 Compositions des vitesses.....	34
II.10.2 Compositions des accélérations.....	35
II.10.3 Mouvement de rotation de R' par rapport à R	36
II.10.3.1 Vitesse absolue.....	36
II.10.3.2 Accélération absolue.....	37

CHAPITRE III : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

III.1 Introduction.....	38
III.2 Les trois lois de Newton.....	38
III.2.1 Première loi de Newton « principe d'inertie ».....	38
III.2.2 Référentiels galiléens.....	38
III.2.3 Deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique «PFD»).....	38
III.2.3.1 Quantité de mouvement	38
III.2.3.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement.....	38
III.2.3.3 Principe fondamentale de la dynamique (PFD)	39
III.2.4 Troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).....	39
III.3 Les forces.....	39
III.3.1 Forces d'interaction à distance.....	40

III.3.1.1 Force d'interaction gravitationnelle.....	40
III.3.1.2 Interaction coulombienne.....	41
III.3.1.3 Interaction électromagnétique.....	41
III.3.2 Forces de contact.....	41
III.3.2.1 Réaction du support.....	41
III.3.2.2 Force de frottement.....	42
III.3.2.3 Force de frottement dans les fluides.....	43
III.3.2.4 Force d'élasticité.....	43
III.4 Moment cinétique.....	43

CHAPITRE IV: TRAVAIL ET ENERGIE

IV.1 Travail.....	44
IV.1.1 Travail d'une force constante.....	44
IV.1.2 Travail élémentaire.....	44
IV.2 Puissance.....	44
IV.3 Energie.....	45
IV.3.1 Energie cinétique.....	45
IV.3.1.1 Définition.....	45
IV.3.1.2 Théorème de l'énergie cinétique.....	45
IV.3.2 Energie potentielle.....	46
IV.3.2.1 Forces conservatives.....	46
a) Travail du poids d'un corps.....	46
b) Travail de la force de rappel élastique d'un ressort.....	47
IV.3.2.2 Energie potentielle.....	48
a) Energie potentielle de pesanteur.....	48
b) Energie potentielle élastique d'un ressort.....	48
IV.3.2.3 Expression du champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle dont il dérive.....	49
IV.4 Energie mécanique.....	50
IV.4.1 Définition.....	50
IV.4.2 Conservation de l'énergie mécanique.....	50

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	51
----------------------------------	----

CHAPITRE I: RAPPELS MATHEMATIQUES

I.1 Analyse dimensionnelle

I.1.1 Grandeurs et unités

I.1.1.1 Grandeurs

On distingue deux types de grandeurs :

- a) Grandeur scalaire:** Une grandeur scalaire est caractérisée par un nombre réel et une unité de mesure.

Exemple : longueur, masse, temps, énergie, température,...

- b) Grandeur vectorielle:** Une grandeur vectorielle est caractérisée par une direction, un sens, un point d'application et un module.

Exemple : vitesse, accélération, force, champ électrique,...

I.1.1.2 Unités

On distingue deux types d'unités de mesure :

- a) Unités fondamentales (unités de base du système international) :** Le système international (SI) est composé de sept unités fondamentales.

- 1- Le mètre, unité de longueur (m)
- 2- Le kilogramme, unité de masse (Kg)
- 3- La seconde, unité de temps (s)
- 4- L'ampère, unité de l'intensité du courant électrique (A)
- 5- Le degré kelvin, unité de température (K)
- 6- La candela, unité de l'intensité lumineuse (Cd)
- 7- La mole, unité de quantité de la matière (mol)

Les quatre premiers termes forment le système (MKSA), (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde, A : Ampère).

- b) Unités dérivées :** Sont des unités obtenues à partir des unités fondamentales.

Exemples :

- Surface (m^2)
- Volume (m^3)
- Vitesse (m.s^{-1})

- Vitesse angulaire ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
- Masse volumique ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
- Force (N)
- Puissance (Watt)
- Pression (Pa)
- Energie (Joule)

I.1.2 Equations aux dimensions

I.1.2.1 Dimension

La dimension de la grandeur X est notée $[X]$. Elle nous renseigne sur la nature physique de la grandeur. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une masse, d'une vitesse,...

Grandeur	Dimension
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité du courant électrique	I
Température	θ
Intensité lumineuse	J
Quantité de la matière	N

I.1.2.2 Equation aux dimensions

L'équation aux dimensions d'une grandeur G s'écrit sous la forme suivante :

$$[G] = M^a \cdot L^b \cdot T^c \cdot I^d \cdot \theta^e \cdot N^f \cdot J^g$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des nombres réels.

Exemples:

$$\text{Vitesse : } v = \frac{l}{t} \Rightarrow [v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

$$\text{Accélération : } \gamma = \frac{v}{t} \Rightarrow [\gamma] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}$$

$$\text{Force : } F = m\gamma \Rightarrow [F] = [m][\gamma] = MLT^{-2}$$

Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = ML^{-3}$

Quantité de mouvement : $p = mv \Rightarrow [p] = MLT^{-1}$

Champ de pesanteur : $[g] = LT^{-2}$

Pression : $p = \frac{F}{S} \Rightarrow [p] = ML^{-1}T^{-2}$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E] = ML^2T^{-2}$

Puissance : $P = W/t \Rightarrow [P] = ML^2T^{-3}$

Charge électrique : $dq = idt \Rightarrow [q] = IT$

Champ électrique : $E = \frac{F}{q} \Rightarrow [E] = MLT^{-3}I^{-1}$

Remarques :

- Les nombres et les angles sont des grandeurs sans dimension.
- Les fonctions ($\cos, \sin, \tan, \exp, \log, \dots$) et leurs arguments sont sans dimension.
 $[6] = 1, [\pi] = 1, [\alpha] = 1, [\sin \alpha] = 1, [\log x] = 1, [e^x] = 1, [x] = 1$

I.1.2.3 Utilité des équations aux dimensions

- Déterminer la dimension d'une grandeur physique.
- Vérifier l'homogénéité d'une formule : une équation est homogène lorsque les deux membres de l'égalité ont même dimension.
- Dédurre la forme des lois physiques.

I.2 Calcul d'incertitudes

I.2.1 Erreur absolue

On appelle erreur absolue δa la différence entre la valeur mesurée a_m et la valeur exacte a_e de la grandeur a .

$$\delta a = a_m - a_e$$

I.2.2 Erreur relative

Par définition l'erreur relative est le rapport entre l'erreur absolue et la valeur exacte :

$$\frac{\delta a}{a_e}$$

I.2.3 Incertitude absolue

L'incertitude absolue Δa est la limite supérieure de l'erreur absolue.

$$|\delta a| \leq \Delta a$$

L'incertitude absolue Δa est un nombre positif qui s'exprime dans la même unité que la grandeur mesurée.

Donc la valeur exacte est comprise entre les deux valeurs limites connues :

$$a_m - \Delta a \leq a_e \leq a_m + \Delta a$$

Le résultat de la mesure s'écrit donc sous la forme: $a \pm \Delta a$

I.2.4 Incertitude relative

L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée : $\frac{\Delta a}{a_m}$

$\frac{\Delta a}{a_m}$ est un nombre sans unité. Elle est exprimée en pourcentage (%).

$\frac{\Delta a}{a_m}$ mesure le degré d'exactitude du résultat.

L'incertitude relative est aussi appelée précision de la mesure.

I.2.5 Calcul d'incertitudes

I.2.5.1 Méthode des différentielles totales

Soit une grandeur $g=f(x, y, z)$.

La différentielle totale de g est donnée par:

$$dg = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ représentent les dérivées partielles de f par rapport aux variables x , y et z .

L'incertitude absolue Δg s'écrit donc :

$$\Delta g = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$$

Exemple :

$$f=x+y-z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

$$df = dx + dy - dz$$

$$\Rightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

I.2.5.2 Méthode des différentielles logarithmiques

$$\text{Soit : } x = \frac{ab}{c}$$

La fonction logarithmique : $\log x = \log a + \log b - \log c$

$$\text{La différentielle logarithmique : } \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}$$

$$\text{L'incertitude relative est : } \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

I.3 Les vecteurs

I.3.1 Définition

On appelle vecteur la grandeur $\overrightarrow{AB}$ (il est représenté par un segment orienté) (figure I.1).

$\overrightarrow{AB}$: représente le vecteur.

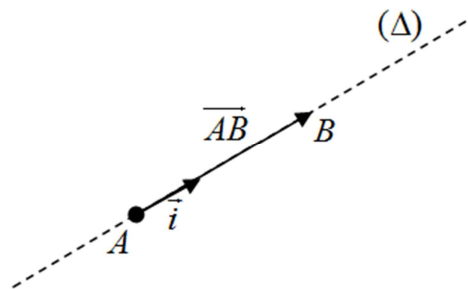


Figure I.1 : Représentation d'un vecteur.

Un vecteur est défini par :

- Un point d'application (le point A)
- Une direction (droite (Δ)).
- Un sens (de A vers B)
- Un module ou une intensité (longueur AB).

I.3.2 Vecteur unitaire

C'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre 1).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit : $\overrightarrow{AB} = AB \vec{i} \Rightarrow \vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$

I.3.3 Algèbre vectorielle

I.3.3.1 Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux s'ils ont le même sens et le même module :

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|.$$

I.3.3.2 Addition (somme) de deux vecteurs

L'addition de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur $\vec{V}$ et on écrit : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

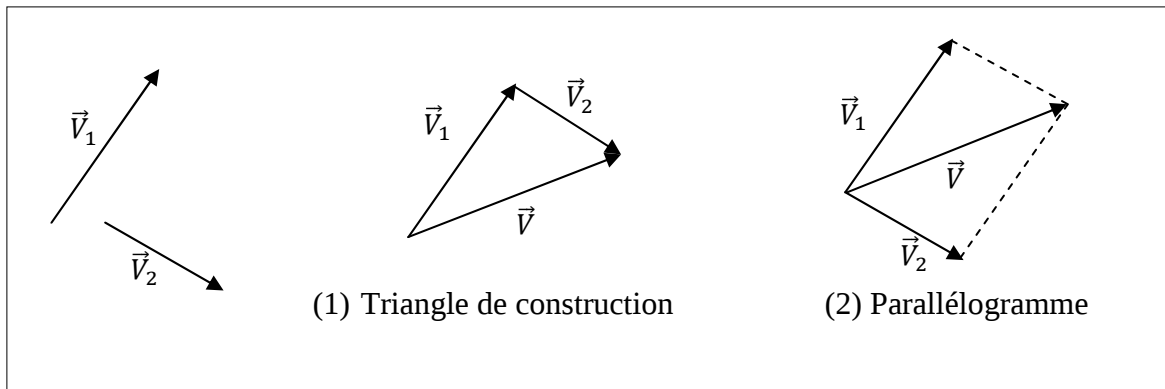


Figure I.2 : Somme de deux vecteurs.

Exemple:

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k}$$

I.3.3.3 Différence de deux vecteurs

La différence de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur $\vec{V}'$ et on écrit : $\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$.

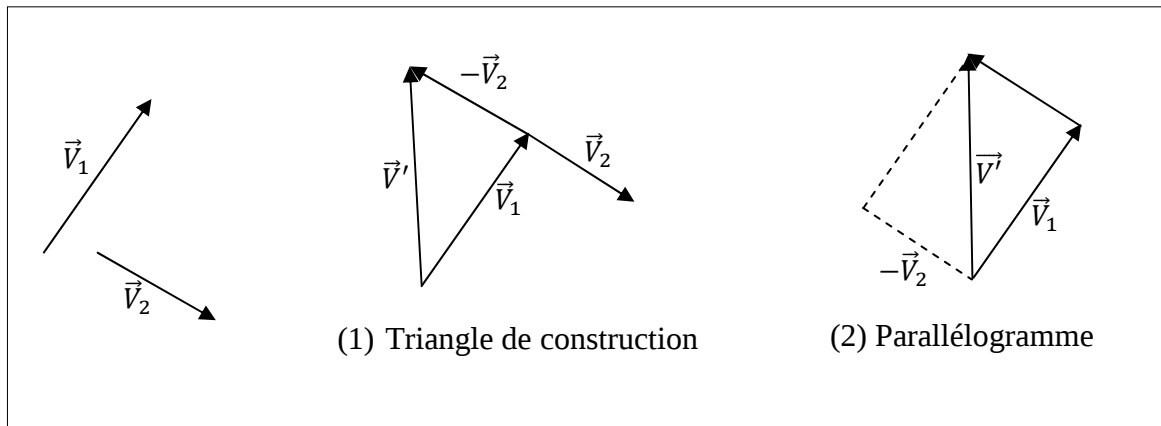


Figure I.3 : Différence de deux vecteurs.

Exemple:

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k}$$

I.3.3.4 Multiplication d'un vecteur par un nombre

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un nombre a est un vecteur : $\vec{W} = a\vec{V}$, il est orienté dans la même direction que $\vec{V}$ si a est positif et dans le sens opposé si a est négatif.

I.3.4 Composantes d'un vecteurs

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus.

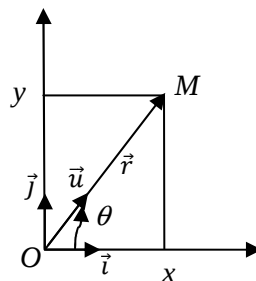


Figure I.4 : Composantes d'un vecteur.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = r\vec{u}$$

$x\vec{i}$ et $y\vec{j}$ sont les composantes du vecteur $\vec{r}$.

Le module du vecteur $\vec{r}$ est donné par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

I.3.5 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, noté par le symbole $\vec{A} \cdot \vec{B}$ est défini par :

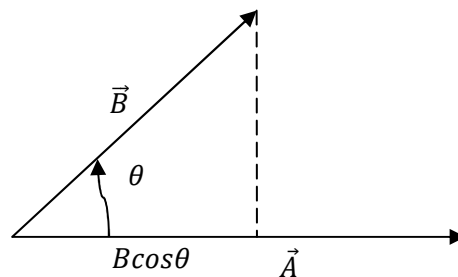
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = AB \cos \theta.$$

- L'angle formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est donné par :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Remarque :

Le produit scalaire de deux vecteurs $AB \cos \theta$ est égal à A multiplié par la projection algébrique de $\vec{B}$ sur $\vec{A}$.



*** Les caractéristiques du produit scalaire :**

- 1- Dans le cas : $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
- 2- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- 3- Le produit scalaire est distributif : $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- 4- Le produit scalaire par un nombre est : $p(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (p\vec{A}) \cdot (\vec{B}) = \vec{A} \cdot (p\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})p$
- 5- Le produit scalaire entre les vecteurs unitaires est :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Exemple :

$$\text{Soient } \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire.

$$- \vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

I.3.6 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, noté par $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ou $\vec{A} \times \vec{B}$ est défini par:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin(\angle \vec{A}, \vec{B}) \vec{n}$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$

- Le produit vectoriel est un vecteur.

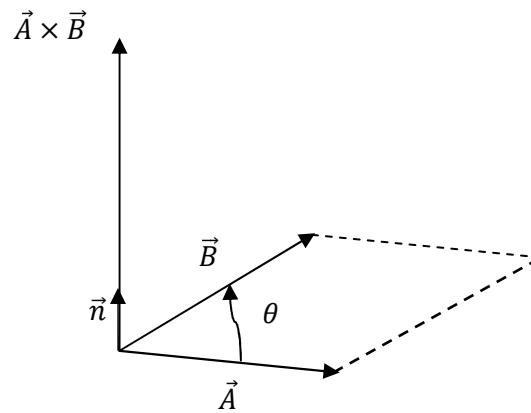


Figure I.5 : Produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

*** Les caractéristiques du produit vectoriel :**

- 1- Si le vecteur $\vec{A} // \vec{B}$ donc: $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$
- 2- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ le produit vectoriel est anticommutatif.
- 3- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ le produit vectoriel est distributif.
- 4- $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

5- Le module du produit vectoriel $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ est la surface du parallélogramme de côtés $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exemple :

$$\text{Soient } \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

I.3.7 Produit composé (mixte)

Le produit composé de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ est un scalaire défini par :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} A_x - \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} A_y + \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} A_z$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (B_y C_z - B_z C_y) A_x - (B_x C_z - B_z C_x) A_y + (B_x C_y - B_y C_x) A_z$$

*** Les caractéristiques du produit mixte:**

1) Soient trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B})$$

2) Le module du produit mixte $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})|$ est le volume du parallélépipède formé par

$\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$

I.3.8 Produit double (le double produit vectoriel)

Le produit double est un vecteur défini par : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

I.3.9 Dérivées de vecteurs

Soit le vecteur :

$$\vec{A}(x) = A_1(x)\vec{i} + A_2(x)\vec{j} + A_3(x)\vec{k}$$

La dérivée de $\vec{A}(x)$ est définie par :

$$\frac{d\vec{A}(x)}{dx} = \frac{dA_1(x)}{dx}\vec{i} + \frac{dA_2(x)}{dx}\vec{j} + \frac{dA_3(x)}{dx}\vec{k}$$

La dérivée seconde de ce vecteur est donnée par :

$$\frac{d^2\vec{A}(x)}{dx^2} = \frac{d^2A_1(x)}{dx^2}\vec{i} + \frac{d^2A_2(x)}{dx^2}\vec{j} + \frac{d^2A_3(x)}{dx^2}\vec{k}$$

*** Les caractéristiques des dérivées des vecteurs :**

$$\frac{d(\vec{A} + \vec{B})}{dx} = \frac{d\vec{A}}{dx} + \frac{d\vec{B}}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\vec{A}\varphi) = \frac{d\vec{A}}{dx} \cdot \varphi + \vec{A} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (\varphi \text{ est une fonction scalaire})$$

$$\frac{d}{dx}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dx} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dx} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dx}$$

I.3.10 Moment d'un vecteur par rapport à un point

On appelle moment d'un vecteur $\vec{AB}$ par rapport à un point O , le vecteur $\vec{M}_{/O}(\vec{AB})$ défini par :

$$\vec{M}_{/O}(\vec{AB}) = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$

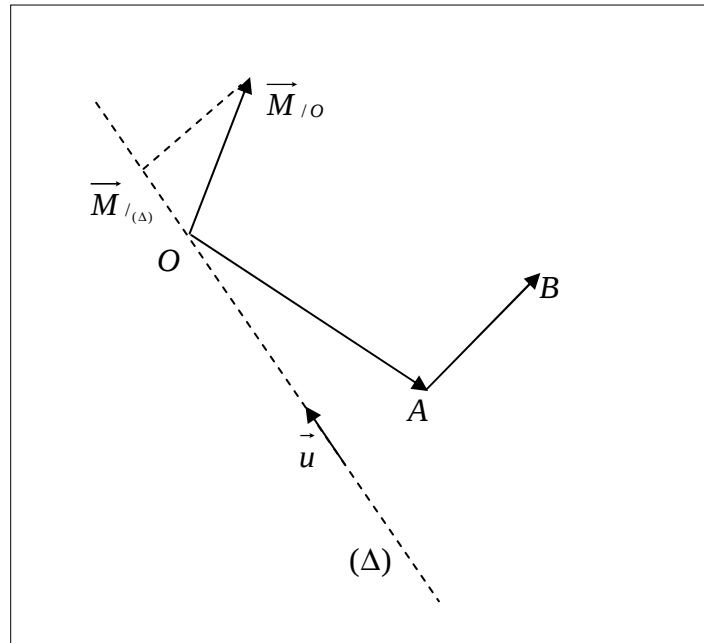


Figure I.6 : Moment d'un vecteur.

I.3.11 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

On appelle moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un axe Δ , la projection sur (Δ) du moment du vecteur par rapport à un point quelconque de (Δ) .

$$\overrightarrow{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{AB}) = \text{Proj}_{/\Delta} \overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{AB})$$

$$\left| \overrightarrow{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{AB}) \right| = \overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u}$$

Remarques:

- Le moment d'un vecteur par rapport à un point est un vecteur.
- Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est un scalaire.

I.3.12 Gradient, divergence et rotationnel

On définit l'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$ par :

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x , y et z .

I.3.12.1 Gradient

Si $f(x, y, z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

- **En coordonnées cylindriques:**

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

- **En coordonnées sphériques:**

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

I.3.12.2 Divergence

Si $\vec{V}(x, y, z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est définie comme étant :

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k})$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

- **En coordonnées cylindriques:**

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **En coordonnées sphériques:**

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

I.3.12.3 Rotationnel

Si $\vec{V}(x, y, z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

- **En coordonnées cylindriques:**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$$

- **En coordonnées sphériques:**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

I.3.13 Le Laplacien

- Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \Delta \vec{f} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \vec{k}$$

Remarques :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$$

CHAPITRE II: CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II.1 Introduction

La cinématique: c'est l'étude des mouvements indépendamment des causes (forces) qui les produisent.

II.2 Définitions

Point matériel: est tout corps dont les dimensions sont négligeables par rapport à la distance parcourue.

Repérage d'un point matériel:

- *Repère d'espace:* est caractérisé par une origine et une base orthonormée directe.
- *Repère du temps:* est caractérisé par une origine et une horloge pour mesurer le temps.

Référentiel : l'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Trajectoire: est l'ensemble des positions occupées par le point matériel.

II.3 Systèmes de coordonnées

II.3.1 Les coordonnées cartésiennes

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du mobile dans le repère $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à l'aide des coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

On peut écrire le vecteur position comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

x est l'abscisse du point $M(-\infty < x < +\infty)$

y est l'ordonnée du point $M(-\infty < y < +\infty)$

z est la cote de $M(-\infty < z < +\infty)$

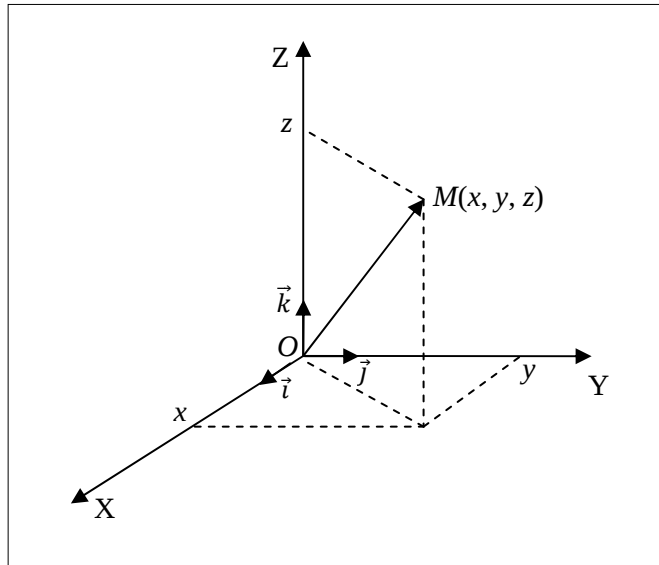


Figure II.1 : Coordonnées cartésiennes.

- Déplacement élémentaire: $d\vec{OM} = d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
- Longueur élémentaire : $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$
- Volume élémentaire: $dV = dxdydz$

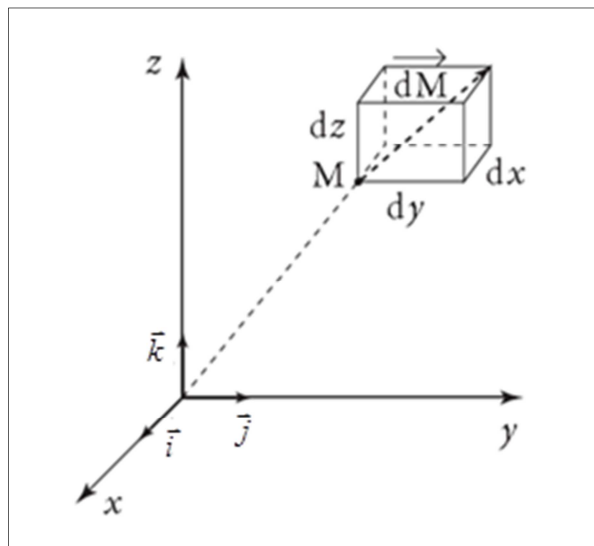


Figure II.2 : Volume élémentaire en coordonnées cartésiennes.

II.3.2 Les coordonnées polaires

Quand le mouvement est plan, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (ρ, θ) .

ρ : rayon polaire ($0 \leq \rho < +\infty$)

θ : angle polaire ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

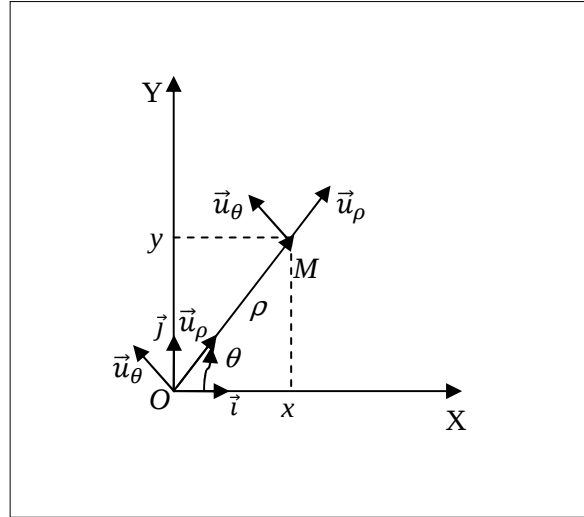


Figure II.3 : Coordonnées polaires.

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_\rho,$$

$\rho = |\overrightarrow{OM}|$ et $\overrightarrow{u}_\rho$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{\rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}}{\rho} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$\overrightarrow{u}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}_\rho$ ($\overrightarrow{u}_\theta \perp \overrightarrow{u}_\rho$). Il est obtenu en effectuant

une rotation d'un angle de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur $\overrightarrow{u}_\rho$.

$$\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{u}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \theta = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \end{cases}$$

- Déplacement élémentaire: $d\vec{l} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$
- Longueur élémentaire : $dl = \|d\vec{l}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$
- Volume élémentaire: $dS = \rho d\rho d\theta$

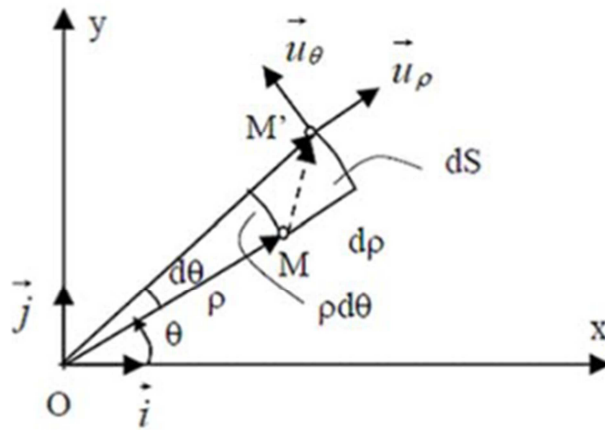


Figure II.4 : Surface élémentaire en coordonnées polaires.

II.3.3 Les coordonnées cylindriques

Dans le système cylindrique, un point M est défini par trois coordonnées (ρ, θ, z) telles que :

ρ : rayon polaire ($\rho \geq 0$)

θ : angle polaire ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

z : altitude ($-\infty \leq z \leq +\infty$)

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \|\vec{Om}\| \vec{u}_\rho + \|\vec{mM}\| \vec{k} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}, \quad \|\vec{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

La base cylindrique est : $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

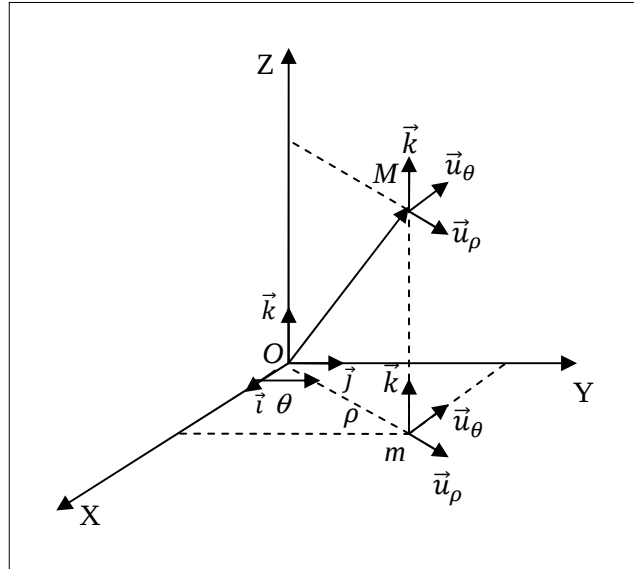


Figure II.5 : Coordonnées cylindriques.

$$\vec{u}_\rho = \frac{\vec{Om}}{|\vec{Om}|} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_\rho \text{ donc :}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

- Déplacement élémentaire: $d\vec{OM} = d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$
- Longueur élémentaire : $dl = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2}$
- Volume élémentaire: $dV = \rho d\rho dz d\theta$

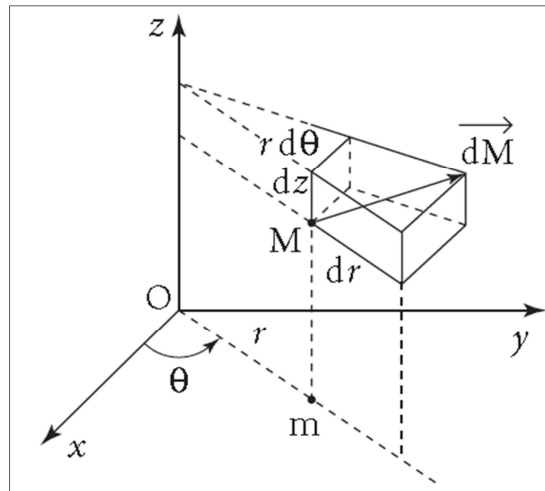


Figure II.6 : Volume élémentaire en coordonnées cylindriques.

II.3.4 Les coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques du point M sont (r, θ, φ) telles que :

$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Le vecteur position s'écrit: $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $|\overrightarrow{OM}| = r$

Les vecteurs unitaires en coordonnées sphériques sont $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

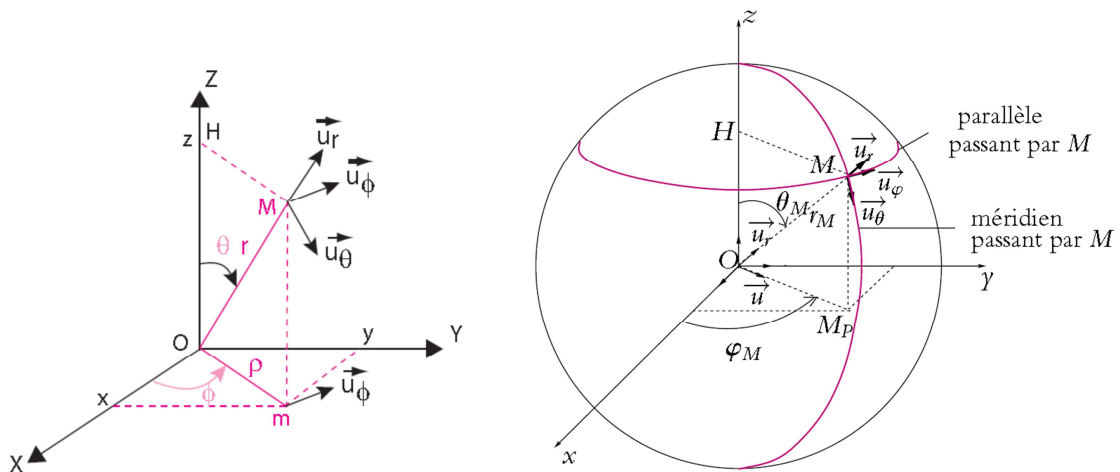


Figure II.7 : Coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

$$\rho = r \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

Donc :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ étant orthogonale, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est donc le résultat du produit vectoriel entre $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}_r$

$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{u}_r = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctg(y/x) \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

- Déplacement élémentaire: $d\overrightarrow{OM} = d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$
- Longueur élémentaire : $dl = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$
- Volume élémentaire: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

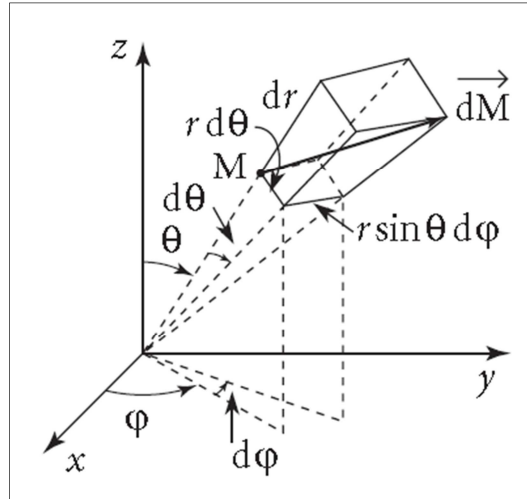


Figure II.8 : Volume élémentaire en coordonnées sphériques.

II.4 Mouvement rectiligne

II.4.1 Définition

Un mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite.

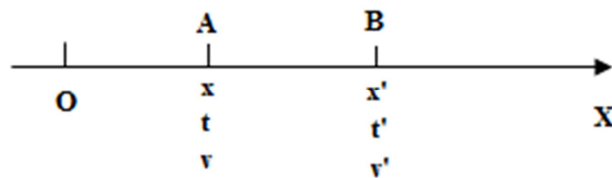


Figure II.9 : Mouvement rectiligne.

II.4.2 La vitesse

II.4.2.1 La vitesse moyenne

Soit A la position du mobile à l'instant t et B la position du mobile à l'instant t' .

On définit la vitesse moyenne entre A et B par:

$$v_{\text{moy}} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

II.4.2.2 La vitesse instantanée

La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne quand $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- Unité de la vitesse: ms^{-1}

II.4.3 L'accélération

II.4.3.1 L'accélération moyenne

L'accélération moyenne entre A et B est définie par :

$$\gamma_{\text{moy}} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

II.4.3.2 L'accélération instantanée

L'accélération instantanée est la limite de l'accélération moyenne quand $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}$$

- Unité de l'accélération: ms^{-2}

II.4.4 Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est un mouvement rectiligne à vitesse constante.

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{cte}, \left(\gamma = \frac{dv}{dt} = 0 \right)$$

$$dx = v dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

$$(x - x_0) = v(t - t_0)$$

$$t_0 = 0$$

$$\Rightarrow x = vt + x_0$$

C'est la loi du mouvement rectiligne uniforme.

où x_0 est l'abscisse initiale à l'instant $t=0$.

II.4.5 Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \text{cte}$$

$$dv = \gamma dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_1}^{t_2} \gamma dt$$

$$(v - v_0) = \gamma(t_2 - t_1)$$

On pose :

$$t_1 = 0 \text{ et } t_2 = t$$

$$\Rightarrow v = \gamma t + v_0 \quad (1)$$

où v_0 est la vitesse initiale à l'instant $t=0$.

$x(t) = ?$

$$v = \gamma t + v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = (\gamma t + v_0)dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (\gamma t + v_0)dt$$

L'équation horaire est donc :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2)$$

où x_0 est l'abscisse initiale à l'instant $t=0$.

Relation entre γ , v et x :

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$$

Remarque :

- Le mouvement rectiligne est accéléré si $\vec{\gamma} \cdot \vec{v} > 0$.
- Le mouvement rectiligne est retardé si $\vec{\gamma} \cdot \vec{v} < 0$

II.5 Mouvement dans l'espace (mouvements curvilignes)

Un mouvement curviligne est un mouvement dont la trajectoire est une courbe quelconque.

La position d'un point matériel M dans l'espace à l'instant t est repérée par le vecteur

$$\text{position : } \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

où O est l'origine du repère choisi.

II.5.1 Vecteur de déplacement

Si le mobile passe de la position M_1 (repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}_1 = \vec{r}_1$) à la position M_2 (repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}_2 = \vec{r}_2$), le vecteur de déplacement est le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = \Delta\overrightarrow{OM} = \Delta\vec{r}$$

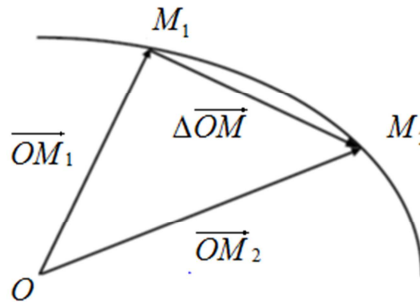


Figure II.10: Mouvement curviligne.

II.5.2 Vecteur vitesse

* La vitesse moyenne :

La vitesse moyenne entre deux instants est donnée par :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

* La vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- La vitesse instantanée représente la dérivée du vecteur position par rapport au temps.
- Le vecteur vitesse instantané est porté par la tangente à la trajectoire au point M ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement.

II.5.3 Vecteur accélération

L'accélération moyenne est donnée par :

$$\vec{\gamma}_{\text{moy}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée est donnée par :

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\gamma}_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

II.6 Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne $S(t)$ du point mobile M est la valeur algébrique de l'arc orienté $\widehat{OM}$:

$$S(t) = \widehat{OM}$$

où O est un point fixe de la trajectoire.

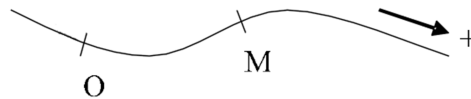


Figure II.11 : Abscisse curviligne.

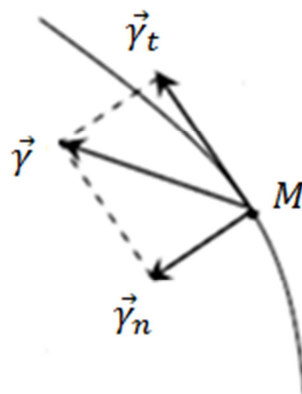
II.7 Composantes intrinsèques de l'accélération : repère de FRENET

Le vecteur accélération est dirigée vers la concavité de la trajectoire.

Le vecteur accélération peut s'écrire :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = \gamma_t \vec{u}_t + \gamma_n \vec{u}_n$$

La composante $\vec{\gamma}_t$ est la composante tangentielle et $\vec{\gamma}_n$ est la composante normale.



Les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ forment une base orthonormée appelée base de Frenet. C'est une base de projection liée à la position M du mobile.

- L'accélération tangentielle est liée au changement de module de la vitesse.
- L'accélération normale est liée au changement de sa direction.

Le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t$$

$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point M dans le sens du mouvement.

L'accélération est donnée par:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

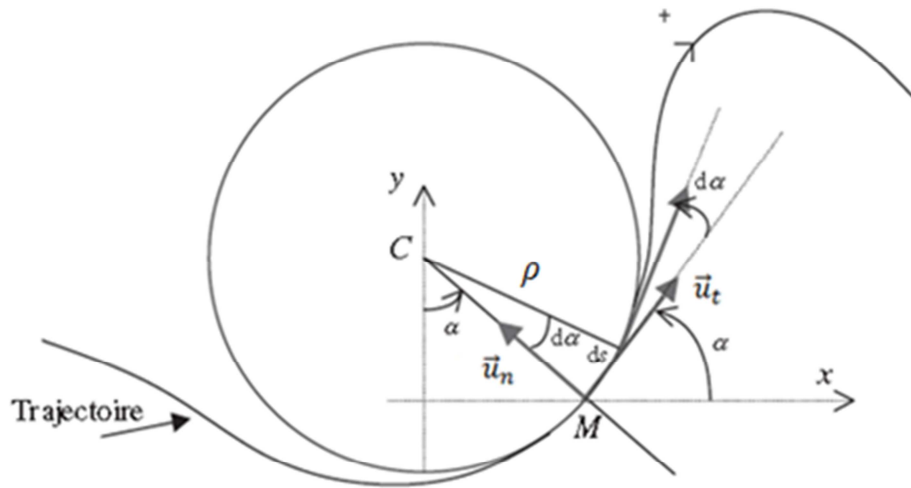


Figure II.12 : Base de Frenet et déplacement élémentaire.

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} v$$

Nous avons : $ds = \rho d\alpha$

Donc :

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} = \vec{u}_n \text{ et } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$\vec{u}_n$: est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et dirigé vers la concavité de la trajectoire.

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n = \gamma_t \vec{u}_t + \gamma_n \vec{u}_n$$

$$\text{avec } \begin{cases} \gamma_t = \frac{dv}{dt} \\ \gamma_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.

* Le rayon de courbure correspondant au rayon du cercle tangent à la trajectoire au point considéré.

Le module de l'accélération est donné par :

$$\gamma = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2}$$

II.8 Mouvement dans différents systèmes de coordonnées

II.8.1 Système cartésien

Le vecteur position du point M est donné par :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur vitesse est donné par:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\text{avec } \vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

Le module de la vitesse est:

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Le vecteur accélération est donné par:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} \vec{i} + \frac{dy^2}{dt^2} \vec{j} + \frac{dz^2}{dt^2} \vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{\gamma}_x + \vec{\gamma}_y + \vec{\gamma}_z$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} + \gamma_z \vec{k}$$

$$\text{avec } \vec{\gamma} \begin{cases} \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

Le module de l'accélération est:

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

II.8.2 Système cylindrique

Le vecteur position du point M est donné par :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z$$

$$\vec{v} = v_\rho \vec{u}_\rho + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{k}$$

$$\text{avec } \vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho \dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$$

Le module de la vitesse:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k} = \gamma_\rho \vec{u}_\rho + \gamma_\theta \vec{u}_\theta + \gamma_z \vec{k}$$

$$\text{avec } \vec{\gamma} \begin{cases} \gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \\ \gamma_\theta = 2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \\ \gamma_z = \ddot{z} \end{cases}$$

Le module :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

Remarque :

Le repère polaire est le cas du système cylindrique pour (z=0).

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_\rho$$

Donc :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \overrightarrow{u}_\rho) = \dot{\rho} \overrightarrow{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta$$

$$\vec{v} = v_\rho \overrightarrow{u}_\rho + v_\theta \overrightarrow{u}_\theta$$

$$\text{avec } \vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} : \text{vitesse radiale} \\ v_\theta = \rho \dot{\theta} : \text{vitesse orthoradiale} \end{cases}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \overrightarrow{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \overrightarrow{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \overrightarrow{u}_\theta = \gamma_\rho \overrightarrow{u}_\rho + \gamma_\theta \overrightarrow{u}_\theta$$

$$\text{avec } \vec{\gamma} \begin{cases} \gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 : \text{accélération radiale} \\ \gamma_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} : \text{accélération orthoradiale} \end{cases}$$

Le module est :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta})^2}$$

II.8.3 Système sphérique

Le vecteur position du point M est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \overrightarrow{u}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{r} \overrightarrow{u}_r + r(\dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{u}_\varphi)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \overrightarrow{u}_r + r(\dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{u}_\varphi))$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \overrightarrow{u}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \overrightarrow{u}_\varphi$$

II.9 Etude de mouvements particuliers

II.9.1 Mouvement circulaire

C'est le mouvement d'une particule dont la trajectoire est un cercle de rayon R constant.

En utilisant les coordonnées polaires le vecteur position s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho \quad (\rho = R = cte)$$

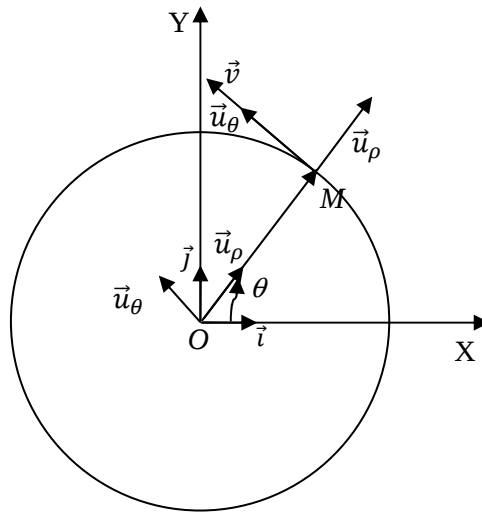


Figure II.13: Mouvement circulaire.

Le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_\rho) = R \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ \Rightarrow \vec{v} &= R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow v = R\dot{\theta} = R\omega \end{aligned}$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{ est la vitesse angulaire.}$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = R \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = R \left(\frac{d}{dt}\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ est l'accélération angulaire

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = -R\omega^2 \vec{u}_\rho + R\dot{\omega} \vec{u}_\theta$$

En coordonnées intrinsèques :

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = R\omega^2 \vec{u}_n + R\dot{\omega} \vec{u}_t$$

Donc : $\vec{u}_n = -\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_t = \vec{u}_\theta$

Cas particulier :

- **Mouvement circulaire uniforme :**

Un mouvement est circulaire uniforme si la vitesse angulaire est constante.

$$v = R\dot{\theta} = R\omega = cte$$

Donc:

$$\gamma_t = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma_\rho = \gamma_n = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2$$

Remarque:

Si $\vec{k}$ est l'axe de rotation, le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ est défini par :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v} = R\omega \vec{u}_t = \omega \vec{k} \wedge R \vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

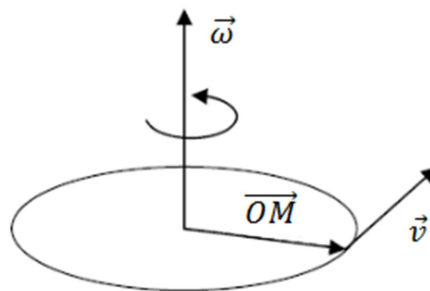


Figure II.14 : Mouvement circulaire et vecteur de rotation.

II.9.2 Mouvement rectiligne sinusoïdal

L'équation horaire du mouvement:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

où x_m : amplitude du mouvement en m

ω : pulsation (rad.s^{-1})

φ : phase à l'origine (rad)

$\omega t + \varphi$: phase à la date t en rad

La vitesse du mobile :

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

L'accélération du mobile :

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

soit $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. On retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

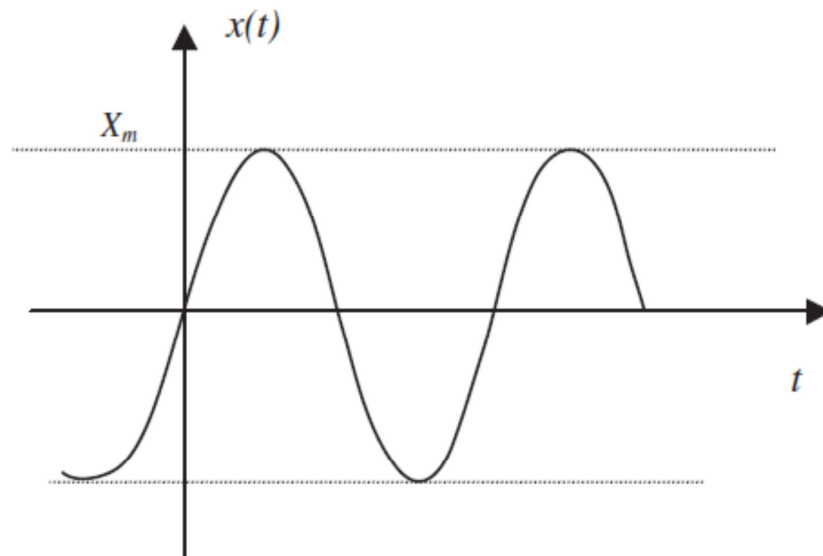


Figure II.15 : Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

II.10 Le mouvement relatif

Considérons deux repères :

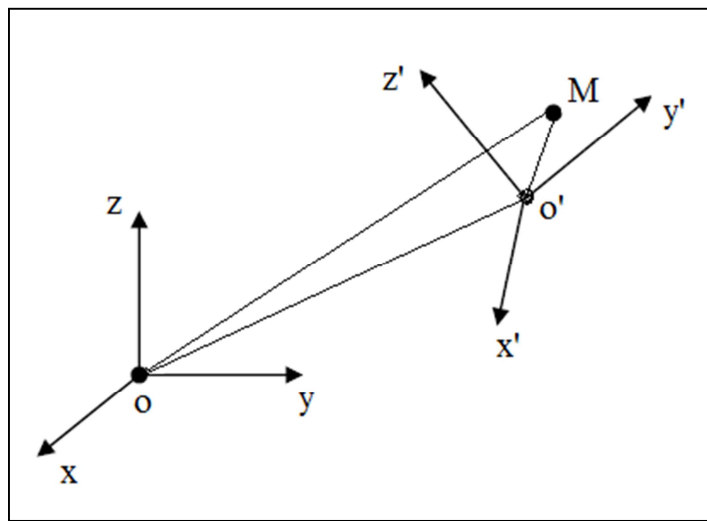
$R(O, x, y, z)$, supposé fixe, qui est appelé repère absolu.

$R'(O', x', y', z')$, en mouvement quelconque par rapport à R , qui est le repère relatif.

Un point M , en mouvement par rapport aux deux repères.

Le mouvement du point M par rapport à (R) s'appelle mouvement absolu ;

Le mouvement du point M par rapport à (R') s'appelle mouvement relatif ;



II.10.1 Composition des vitesses

Relation entre les positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \text{ vitesse absolue du point } M.$$

$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ vecteur position du point M dans R' .

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

Donc :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

avec :

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \text{ vitesse d'entraînement : c'est la vitesse du repère mobile}$$

(R') par rapport au repère fixe (R).

$$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \text{ vitesse relative : c'est la vitesse du point } M \text{ dans le repère mobile}$$

(R').

Remarques :

- Si les repères R et R' sont fixes alors $\vec{v}_e = 0$ et $\vec{v}_a = \vec{v}_r$

- Si le repère R' est en mouvement de translation par rapport à R : $\vec{i} = \vec{i}', \vec{j} = \vec{j}'$ et $\vec{k} = \vec{k}'$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

II.10.2 Composition des accélérations

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \text{ accélération absolue du point } M.$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right)$$

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}' + 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right]$$

Donc :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} \text{ accélération d'entraînement : c'est l'accélération du}$$

repère relatif par rapport au repère absolu.

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}' \text{ accélération relative : c'est l'accélération de } M \text{ par rapport au}$$

repère relatif.

$$\vec{\gamma}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \text{ accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.}$$

Remarques :

- Si M est fixe par rapport au repère relatif R' : $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$

- Si le repère R' est en translation par rapport à R :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_c = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e$$

II.10.3 Mouvement de rotation de R' par rapport à R

On suppose que le repère mobile R' est en mouvement de rotation autour de l'axe z avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ et $O \equiv O'$.

II.10.3.1 Vitesse absolue

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}, (\overrightarrow{OO'} = \vec{0})$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

$$\vec{v}_e = x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

II.10.3.2 Accélération absolue

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}'$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2 \vec{OO}'}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \vec{OO}'}{dt^2} = \vec{0}, (O \equiv O')$$

$$\frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{i}'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{i}') = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}')$$

$$\frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{j}'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{j}') = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j}')$$

$$\frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{k}'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{k}') = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M})$$

$$\vec{\gamma}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d \vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d \vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d \vec{k}'}{dt} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

CHAPITRE III : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

III.1 Introduction

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes (forces) qui les produisent.

III.2 Les trois lois de Newton

III.2.1 Première loi de Newton « principe d'inertie »

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos ($v=0$), soit en mouvement rectiligne uniforme ($v=cte$).

III.2.2 Référentiels galiléens

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe de l'inertie s'applique.

III.2.3 Deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique « PFD »)

III.2.3.1 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

L'unité de la quantité de mouvement dans le système international est le $kg.m.s^{-1}$.

- La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui a la même direction que la vitesse.
- Une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement $\vec{p}$ constante.

III.2.3.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement

Supposons l'existence de deux particules libres qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles ; elles sont donc isolées:

$$\text{A l'instant } t : \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\text{A l'instant } t' : \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$$

L'expérience montre que la quantité de mouvement totale d'un système isolé composé de deux particules reste constante.

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Ce qui signifie que la quantité de mouvement perdue par l'une des deux particules est gagnée par l'autre particule.

Remarque :

La quantité de mouvement d'un système isolé constitué de plusieurs particules est constante.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_i = cte$$

III.2.3.3 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

III.2.3.4 Troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction)

Soient deux corps (1) et (2) interagissant entre eux; l'action exercée par (1) sur (2) $\vec{F}_{12}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\vec{F}_{21}$.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

III.3 Les forces

On distingue deux grandes catégories de forces :

* Forces d'interaction à distance

Exemples :

- Force d'interaction gravitationnelle.
- Interaction coulombienne.
- Interaction électromagnétique.
- Les forces nucléaires de cohésion.

* Forces de contact

Exemples :

- Réaction du support.
- Forces de frottement.
- Forces de tension.

III.3.1 Forces d'interaction à distance

III.3.1.1 Force d'interaction gravitationnelle

Deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 et distants de r , exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force de gravitation, telle que :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

$$\Rightarrow F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

où

$G=6,672.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

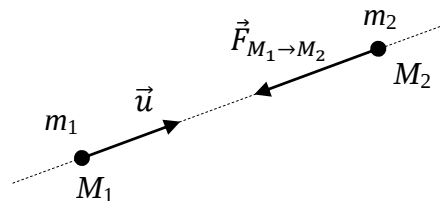


Figure III.1: Force d'attraction gravitationnelle (force attractive).

*** Champ gravitationnel**

- A la surface de la terre :

$$F = G \frac{m M_T}{R_T^2} = m g_0$$

$$\Rightarrow g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

où

R_T est le rayon de la Terre.

M_T est la masse de la Terre.

g_0 : l'attraction sur la terre ($g_0=9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

- A la hauteur Z de la surface de la terre :

$$F = G \frac{mM_T}{(R+Z)^2} = mg \text{ d'où } g = g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \text{ avec } g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

r : la distance entre le centre de la terre et la position du corps ($r=R+Z$).

III.3.1.2 Interaction coulombienne

L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour des charges électriques ponctuelles.

$$F = K \frac{qq'}{r^2}$$

avec

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

III.3.1.3 Interaction électromagnétique

La force que subit une charge électrique placée dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est appelée force de Lorentz et s'écrit :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

III.3.2 Forces de contact

III.3.2.1 Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet.

L'objet étant en équilibre, on a :

$$\vec{P} + \vec{R}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{R}_n$$

$\vec{R}_n$: la force résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

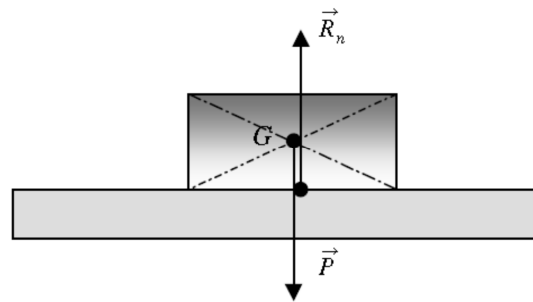


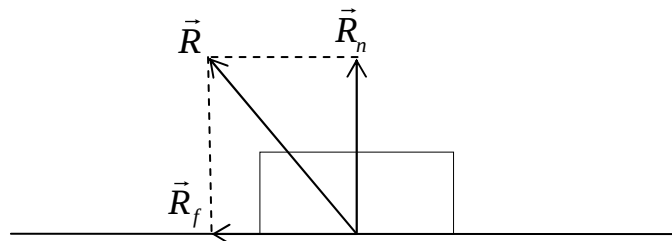
Figure III.2 : Réaction d'un support.

III.3.2.2 Force de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit si cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer.

Dans le cas où il existe des forces de frottement solide, la réaction du support $\vec{R}$ peut se décomposer en une réaction $\vec{R}_n$ normale au support et une force tangente $\vec{R}_f$ appelée force de frottement.

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_f$$



On distingue deux cas :

- Frottement statique (système en équilibre) : $\vec{R}_f \leq \mu_0 \vec{R}_n$ où μ_0 est le facteur de frottement statique.
- Frottement cinétique (système en mouvement) : $\vec{R}_f = \mu \vec{R}_n$, μ est le facteur de frottement dynamique.

Remarque :

En l'absence de frottement ($\vec{R}_f = \vec{0}$), la réaction du support est normale c'est-à-dire $\vec{R} = \vec{R}_n$.

III.3.2.3 Force de frottement dans les fluides

Quand un corps se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), une force de frottement apparaît.

$$\vec{F} = -k\eta\vec{v}$$

où k est un coefficient dépendant de la forme géométrique du corps.

η : est le coefficient de viscosité du fluide.

$\vec{v}$: est la vitesse du corps.

III.3.2.4 Force d'élasticité

Soit un point matériel accroché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k .

La force de rappel du ressort est proportionnelle à son allongement et s'écrit:

$$F = -kx$$

où

x : l'allongement du ressort.

III.4 Moment cinétique

Le moment cinétique par rapport au point O d'une particule de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ est défini par:

$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} \text{ avec } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{/O}(\vec{F}) : \text{le moment de la force par rapport à } O.$$

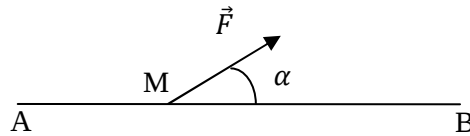
CHAPITRE IV: TRAVAIL ET ENERGIE

IV.1 Travail

IV.1.1 Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante au cours d'un déplacement est donné par :

$$w = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$



Le travail se définit comme le produit scalaire entre le vecteur force et le vecteur de déplacement.

On a donc :

$$w = Fl \cos \alpha \quad (l = \|\vec{AB}\|)$$

L'angle α est l'angle que fait le vecteur force $\vec{F}$ avec le vecteur de déplacement $\vec{AB}$.

Le travail s'exprime en Joule (N.m).

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow w = 0$.
- Si $\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow w > 0$: Le travail est dit moteur.
- Si $\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow w < 0$: Le travail est résistant.

IV.1.2 Travail élémentaire

Le travail élémentaire dw d'une force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est donné par :

$$\begin{aligned} dw &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow w &= \int dw = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

IV.2 Puissance

La puissance instantanée est définie comme le travail par unité de temps :

$$P = \frac{dw}{dt}$$
$$= \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \theta$$

La puissance s'exprime en Watt (W).

On a donc aussi :

$$dw = Pdt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow w = \int_A^B dw = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

IV.3 Energie

IV.3.1 Energie cinétique

IV.3.1.1 Définition

On définit l'énergie cinétique E_c pour un point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse v par :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

L'unité de l'énergie cinétique dans le système MKSA est le Joule.

IV.3.1.2 Théorème de l'énergie cinétique

Le travail d'une force $\vec{F}$ agissant sur un corps peut être écrit sous la forme :

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dw = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt, \left(d\vec{l} = \vec{v} dt \right)$$

$$\Rightarrow dw = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = mv dv$$

$$dw = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

et on a :

$$E_c = \left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

Donc:

$$dw = dE_c$$

Le travail total est:

$$w = \int_A^B dw = \int_A^B dE_c = E_{c,B} - E_{c,A}$$

$$\Rightarrow w = \Delta E_c$$

Le théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre deux points A et B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = \sum_{A \rightarrow B} w(\vec{F})$$

IV.3.2 Energie potentielle

IV.3.2.1 Forces conservatives

Ce sont des forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiale (A) (point de départ) et finale (B) (point d'arrivée).

Exemples :

- Forces du poids.
- Forces de rappel du ressort.
- Forces constantes.
- Forces électriques.
- Forces gravitationnelles.

Remarque:

Les forces sont dites non conservatrices lorsque leur travail dépend du chemin suivi. Par exemple : les forces de frottement.

a) Travail du poids d'un corps :

Considérons un point M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B et soumis à son poids.

$$\vec{p} = m\vec{g}$$

$$w = \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB}$$

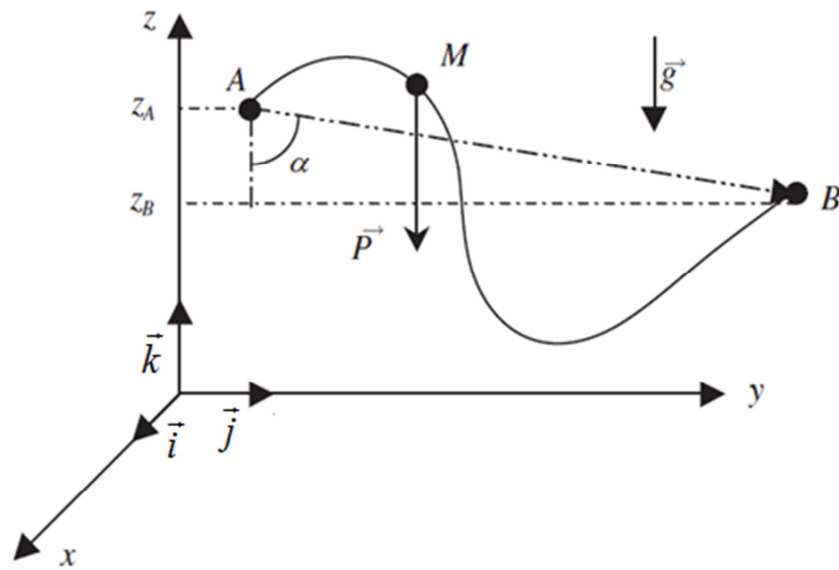


Figure IV.1 : Travail du poids d'un corps.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$w = \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} \\ = (-mg)(z_B - z_A)$$

$$\Delta h = z_B - z_A$$

$$\Rightarrow w = -mg\Delta h$$

b) Travail de la force de rappel élastique d'un ressort :

La force de rappel exercée par le ressort est :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i}$$

Le travail de cette force est donné par :

$$w = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dl = dx\vec{i}$$

$$\Rightarrow w = \int_A^B -kx\vec{i} \cdot d\vec{x} = -k \int_A^B x dx$$

$$w = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = -k \left(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} \right)$$

$$= k \left(\frac{x_A^2}{2} - \frac{x_B^2}{2} \right) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

IV.3.2.2 Energie potentielle

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle E_p .

Donc :

$$W_{AB} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

a) Energie potentielle de pesanteur :

Le travail du poids s'écrit :

$$w = \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = (mg)(z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow w = mgz_A - mgz_B \quad (1)$$

$$w = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \quad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2), l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire :

$$E_p(z) = mgz + cte$$

$$\text{Si } E_p(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$$

b) Energie potentielle élastique d'un ressort :

$$dE_p = -dw$$

$$\Rightarrow E_p = -\int_0^x dw = -\int_0^x -kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

IV.3.2.3 Expression du champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle dont il dérive

$$dw = -dE_p$$

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dw &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

$$dE_p = -dw$$

$$\Rightarrow dE_p = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (1)$$

Sachant que E_p est une fonction à trois variables, sa différentielle s'écrit :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \quad (2)$$

Par identification des deux équations (1) et (2) on obtient les coordonnées cartésiennes de la force qui est en fonction de E_p .

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_p$$

$$= -\vec{\nabla}E_p = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

Si $\vec{F}$ conservative alors elle dérive d'une énergie potentielle.

IV.4 Énergie mécanique

IV.4.1 Définition

On considère un point matériel soumis à l'action d'une force conservative. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a:

$$w = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$$

On en déduit que :

$$E_c + E_p = E_m = cte$$

où E_m est l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un système ou point matériel est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle.

IV.4.2 Conservation de l'énergie mécanique

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives son énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$E_m(A) = E_m(B) = cte \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

Remarque :

Si le système est soumis en plus des forces conservatives à des forces non conservatives (comme les frottements) alors :

$$\Delta E_c = w_{(conservatives)} + w_{(non\ conservatives)} = -\Delta E_p + w_{(non\ conservatives)}$$

$$\Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = w_{(non\ conservatives)}$$

$$\Delta(E_c + E_p) = w_{(non\ conservatives)} \Rightarrow \Delta E_m = w_{(non\ conservatives)}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Michel Henry, Nicolas Delorme, Mini manuel de Mécanique du point, Dunod, Paris, (2008).
2. Alain Gibaud, Michel Henry, Cours de physique : Mécanique du point, 2^{ème} édition Dunod (2007).
3. J.L. Caubarrere, H. Djellouah, J. Fourny, F.Z. Khelladi, Introduction à la mécanique.
4. J. BERGUA, P. GOULLEY, G.NESSI, Exercices physique MPSI, Bréal (2003).
5. AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie (2013).
6. Laurent Gautron et autres, PHYSIQUE TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE, Cours, applications et exercices corrigés, Dunod, Paris, (2010).