Corrigé : Contrôle physique du solide II

L3 physique des matériaux (2013/2014)

6 pts

EX1 : Vibration d'une chaîne monoatomique :

0,5

a) On a : $m\dfrac{d^2U_s}{dt^2} = C(U_{s+1}-U_s)+C(U_{s-1}-U_s)$ 0,5

1 $$\boxed{m\dfrac{d^2U_s}{dt^2} = C\,(U_{s+1}+U_{s-1}-2U_s)}$$ est l'équation du mouvement

b) La solution est de la forme : $U_s = U\,e^{i(ksa-\omega t)}$

d'où : $\dfrac{d^2U_s}{dt^2} = -\omega^2 U_s$ 0,5 et $U_{s+1}=U_s\,e^{ika}$, $U_{s-1}=U_s\,e^{-ika}$

Alors : $-m\omega^2 U_s = C U_s\,(e^{ika}+e^{-ika}-2)$ 0,5 / $e^{ika}+e^{-ika}=2\cos ka$

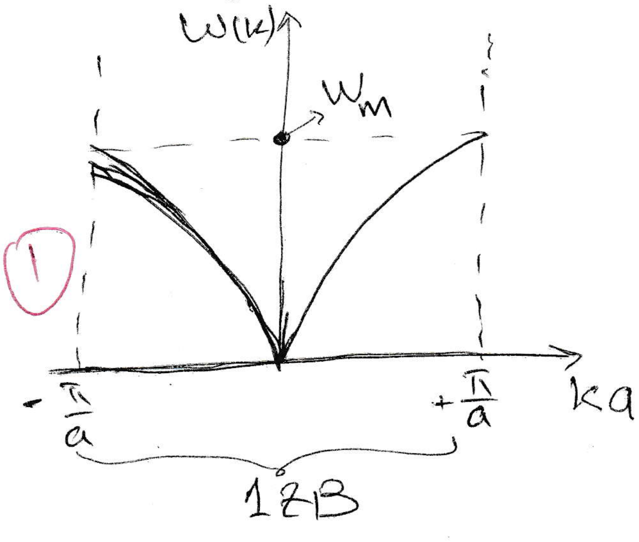
donc : $\boxed{\omega^2 = \dfrac{2C}{m}(1-\cos ka)}$ 0,5 / $\cos ka = 1-2\sin^2\dfrac{ka}{2}$

Alors : $\omega^2 = \dfrac{4C}{m}\sin^2\dfrac{ka}{2}$ 0,5

d'où : $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{4C}{m}}\left|\sin\dfrac{ka}{2}\right|}$ est la relation de dispersion $\omega = f(k)$

0,5 $\omega_m = \sqrt{\dfrac{4C}{m}}$

1



c) on a : $V_g = \frac{dW}{dK} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4C}{m}}\cos\frac{Ka}{2} = \boxed{\sqrt{\frac{C}{m}}\, a \cos\frac{Ka}{2}}$ (0,5) (0,5)

Vitesse de groupe :

$V_s = \lim_{Ka \to 0} V_g = \sqrt{\frac{C}{m}}\, a$ (0,5)

8 pts

EX 2 : Capacité calorifique d'un réseau linéaire (Debye) :

a) on a le nombre d'états est $g(K)\,dK = \frac{dK}{\frac{2\pi}{L}}$ (0,5) / $L = Na$

d'où : $g(K)\,dK = \frac{Na}{2\pi}\,dK$

et le nombre de mode $D(W)\,dW = 2\,g(K)\,dK$ (0,5) $(+,-)$

Alors : $D(W)\,dW = \frac{Na}{\pi}\,dK$ / pour Debye : $W = V_s K$

donc : $dW = V_s\,dK \rightarrow \boxed{D(W)\,dW = \frac{Na}{\pi V_s}\,dW}$ (0,5)

on a : $N = \int_0^{W_D} D(W)\,dW = \frac{Na}{\pi V_s} W_D$ (0,5)

donc : $\boxed{W_D = \frac{\pi V_s}{a}}$ (0,5)

b) on a : $\hbar W_D = k_B \theta_D \rightarrow \theta_D = \frac{\hbar W_D}{k_B} = \boxed{\frac{\hbar \pi V_s}{a k_B}}$ (0,5) (0,5)

d'où : $\theta_D = \frac{10^{-34} \times 3{,}14 \times 3 \times 10^{3}}{3 \times 10^{-10} \times 1{,}38 \times 10^{-23}} = \frac{314}{1{,}38} = \boxed{227{,}53\ K}$ (0,5)

c) on a : $U = \int_0^{W_D} E\,D(W)\,dW$ (0,5)

$D(W)\,dW = \frac{N}{\frac{\pi V_s}{a}}\,dW = \boxed{\frac{N}{W_D}\,dW}$ (0,5) et $\bar{\epsilon}(T) = \dfrac{\hbar w}{e^{\beta\hbar w} - 1}$

d'où : $U = \dfrac{N}{w_D}\displaystyle\int_0^{w} \dfrac{\hbar w\, dw}{e^{\beta\hbar w} - 1}$ (0.5) et $C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T}$

on pose : $x = \beta\hbar w$; $x_D = \beta\hbar w_D = \dfrac{\theta_D}{T}$

$\left.dx = \beta\hbar\, dw\right\} \to x\,dx = \beta^2\hbar^2 w\, dw$

Alors : $U = \dfrac{N}{w_D}\displaystyle\int_0^{x_D} \dfrac{\beta^2\hbar^2 w\, dx}{\beta^2\hbar\left(e^{\beta\hbar w} - 1\right)}$

(0.5)

d'où : $\boxed{U = \dfrac{N}{\beta^2\hbar w_D}\displaystyle\int_0^{x_D} \dfrac{x\, dx}{e^{x} - 1}}$ est la forme intégrale de $\underline{\underline{U}}$

d) * à haute T : (0.5) $T \gg \theta_D \to \dfrac{\theta_D}{T} \ll 1$

d'où : $e^{x} \simeq 1 + x$ Alors : $U = \dfrac{N}{\beta^2\hbar w_D}\displaystyle\int_0^{x_D} \dfrac{x\, dx}{x}$

donc : $U = \dfrac{N\cancel{\beta}\cancel{\hbar w_D}}{\beta^{\cancel{2}}\cancel{\hbar w_D}} = \boxed{N k_B T}$ (0.5)

et : $C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T} = \boxed{N k_B}$ (0.5)

*) à basse T $\to T \ll \theta_D \to \dfrac{\theta_D}{T} \gg 1$, $x_D \to \infty$

$\displaystyle\int_0^{x_D} \to \int_0^{\infty}$ (0.5) $\to U = \dfrac{N}{\beta^2\hbar w_D}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{x\, dx}{e^{x} - 1} \simeq \dfrac{\pi^2}{6}$

donc : $U = \dfrac{\pi^2 N k_B T^2}{6\,\theta_D}$ (0.5) $\to \boxed{C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T} = \dfrac{\pi^2}{3} N k_B \left(\dfrac{T}{\theta_D}\right)}$ (0.5)

Ex 3 ; 6pts : On a : $n_{at} = \frac{N}{V}$ / $\cancel{N} =$

0,5

pour CFC : $n_{at} = \frac{4}{a^3} = \frac{4}{(4,09)^3} \times 10^{30}$ atome/m^3

$n_{at} = 1,46 \times 10^{28}$ atom/m^3 0,5

l'argent (Ag) est monovalent d'où :

$n_{ele} = n_{at} = \boxed{1,46 \times 10^{28} \, ele/m^3}$ 0,5

2) pour la sphère de Fermi : $\boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m} K_F^2}$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi K_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{N}{2}$$ 0,5

/ N est le nombre d'électrons

Alors : $\frac{\cancel{\frac{4}{3}}\pi K_F^3}{\cancel{8}\pi^3} = \frac{N}{\cancel{2}V} \rightarrow K_F^3 = 3\pi^2 \frac{N}{V}$ / $\frac{N}{V} = n_{ele}$

d'où : $\boxed{K_F = (3\pi^2 n_{ele})^{\frac{1}{3}}}$ 0,5 $\rightarrow \boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n_{ele})^{2/3}}$ 0,5

$E_F = k_B T_F \rightarrow \boxed{T_F = \frac{\hbar^2}{2m k_B}(3\pi^2 n_{ele})^{2/3}}$ 0,5

$\frac{1}{2} m V_F^2 = E_F = \frac{\hbar^2}{2m} K_F^2 \rightarrow m V_F = \hbar K_F$

d'où : $\boxed{V_F = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2 n_{ele})^{\frac{1}{3}}}$ 0,5

les valeurs numériques : 0,50 $\boxed{K_F = 7,56 \times 10^{9} \, m^{-1}}$

0,50

$E_F = 3,14 \times 10^{-19}$ Joule $= \boxed{1,96 \, eV}$

$\boxed{T_F = 2,27 \times 10^{4} K}$ 0,50 / $\boxed{V_F = 8,13 \times 10^{5} \, m/s}$ 0,50

Université L'arbi Ben M'hidi OEB 2023/2024

Contrôle de physique du solide II 3eme LMD physique des matériaux

Exercice 1: Vibrations d'une chaîne monoatomique

On considère une rangée d'atomes identiques de masse m et de paramètre de réseau « a ». On se limite aux interactions entre un atome donné et ses plus proches voisins. Caractérisées par la constante de rappel C.

a) Donner l'équation du mouvement de l'atome s.

b) Etablir la relation de dispersion $\omega = f(K)$ des vibrations de la chaîne atomique. Tracer l'allure graphique de $\omega = f(K)$ dans la première zone de Brillouin.

c) Déterminer l'expression de la vitesse du groupe V_g puis en déduire la vitesse de son V_s .

Exercice 2: Capacité calorifique d'un réseau linéaire (modèle de Debye)

On suppose que la relation de dispersion des phonons puisse être convenablement décrite par la relation (approximation de Debye): $W=VK$, où V la vitesse de son.

a) Préciser la valeur maximale de la fréquence de vibration W_D des atomes.

b) En déduire l'expression de la température de Debye θ_D puis calculer sa valeur numérique.

On donne: a = 3 Å, V = 3000 m/s, $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s et $k_B = 1.38.\ 10^{-23}$ J /K.

c) En posant $X=\beta\hbar w$ et $X_D= \beta\hbar w_D = \theta_D/T$, donner sous formes d'intégrales définies les expressions de l'énergie interne U et la capacité calorifique C_v des vibrations du réseau linéaire.

d) Discuter le comportement de C_v à haute et à basse température.

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3 : On considère un conducteur de n atomes d'argent (Ag) par unité de volume. Les électrons de valence de ce métal (un par atome) se comportent comme des électrons libres.

1.L'argent cristallise dans le système cubique à faces centrées de paramètre de réseau a = 4,09 Å. Sa masse atomique est M = 107,87 g/mol, sa masse volumique est $\rho = 10475\ kg.m^{-3}$. Calculer sa concentration n.

2. En utilisant la sphère de Fermi, déterminer le vecteur d'onde de Fermi k_F, l'énergie de Fermi E_F, la température de Fermi T_F et la vitesse v_F des électrons les plus rapides.

Exprimer ces grandeurs en fonction de n puis calculer leurs valeurs numériques.

Bonne Chance