Université Larbi Ben Mhidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département M&I **Lundi 06/05/2024**
Promotion : 2ème année Licence – Informatique **Durée : 1H30**

Examen Théorie des Langages (THL)

Exercice n°=1 (4 pts)

I. Sur l'alphabet $X = \{a, b\}$, soient les langages :

$L_1 = \{ a, ab, ba \}$, $L_2 = \{ \varepsilon, b, ab \}, L_3 = \{ a^n b^n / n \geq 0\}$.

Trouvons : **(2 pts = 8 × $0.25\ pt$)**

$L_1 . L_2 = \{a, ab, aab, abb, abab, ba, bab, baab\}$

$L_2 . L_1 = \{ a, ab, ba, bab, bba, aba, abab, abba \}$

$L_1 . L_3 = \{ a^{n+1} b^n / n \geq 0 \} \cup \{ aba^n b^n / n \geq 0 \} \cup \{ ba^{n+1} b^n / n \geq 0 \}$

$L_1 . \{\varepsilon\} = L_1$

$\emptyset . L_1 = \emptyset$

$L_1 . L_1 = \{ aa, aab, aba , abab, abba, baa, baab, baba \}$

$L_2 . L_2 = \{ \varepsilon, b, ab, bb, bab, abb, abab \}$

$L_3 . L_3 = \{ a^n b^n a^m b^m / n \geq 0 \ \ et\ m \geq 0\}$

II. Soit le langage $L = \{tous\ les\ mots\ de\ \{0,1\}^*\ de\ longueurs\ paires\}$.

a) $L(ER) = \big((0 + 1)(0 + 1)\big)^* = (00 + 01 + 10 + 11)^*$. **(1 pt)**

b) $G = (\{0,1\}, \{S, A\}, S, \{S \rightarrow 0A|1A|\varepsilon \ ; A \rightarrow 0S|1S\})$ **(1 pt)**

ou bien $G = (\{0,1\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow 00S|01S|10S|11S|\varepsilon \})$

Exercice n°=2 (5 pts)

Soit l'ensemble P des règles de production d'une grammaire G :

$P = \{ S \rightarrow a \mid if\ b\ then\ S \mid if\ b\ then\ S\ else\ S \}$

et soient les mots : $w_1 = if\ b\ then\ a\ else\ a$; $w_2 = if\ b\ then\ if\ b\ then\ a\ else\ a$.

1. $G = (\{a, b, if, then, else\}, \{S\}, S, P = \{ S \rightarrow a \mid if\ b\ then\ S \mid if\ b\ then\ S\ else\ S \})$. **(1 pt)**
2. G est de type 2 **(0.5 pt)** car toutes les règles de production sont de la forme :

   $A \rightarrow \alpha$ avec $A \in V_N$ et $\alpha \in (V_T \cup V_N)^*$ **(0.5 pt)**
3. ***a* : action (ou instruction)** et ***b* : condition** **(0.5 pt = 2 × $0.25pt$)**
4. $L(G) =$

   $\{a\ /\ a\ est\ une\ action\ simple\} \cup \{ instructions\ conditionnelles\ \boldsymbol{simples}\} \cup$

   $\{instructions\ conditionnelles\ \boldsymbol{imbriqu\acute{e}es}\}$. **(0.5 pt)**
5. $(w_1 = if\ b\ then\ a\ else\ a) \in L(G)$ **(0.5 pt)**

   $S \rightarrow if\ b\ then\ S\ else\ S \rightarrow if\ b\ then\ a\ else\ S \rightarrow if\ b\ then\ a\ else\ a$

   Alors $S \overset{*}{\Rightarrow} if\ b\ then\ a\ else\ a$ donc $w_1 \in L(G)$

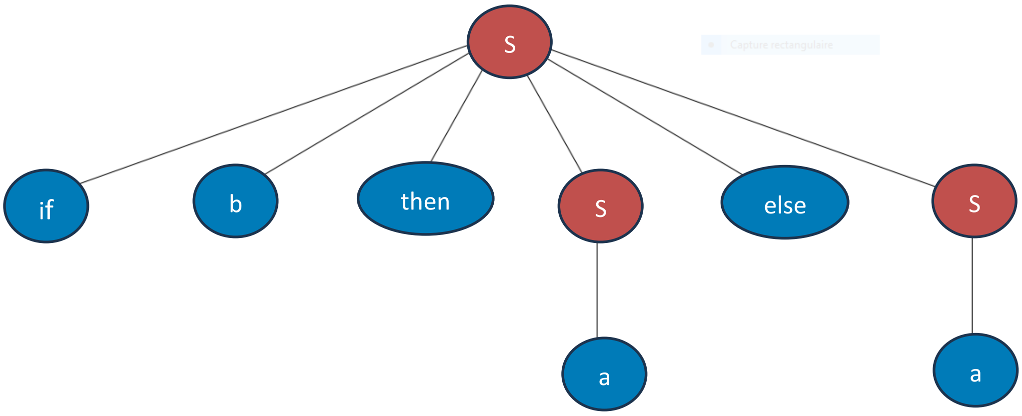
   $(w_2 = if\ b\ then\ if\ b\ then\ a\ else\ a) \in L(G)$. **(0.5 pt)**

$S \to$ *if* b *then* $S \to$ *if* b *then if* b *then* S *else* $S \to$ *if* b *then if* b *then* a *else* $S \to$ *if* b *then if* b *then* a *else* a

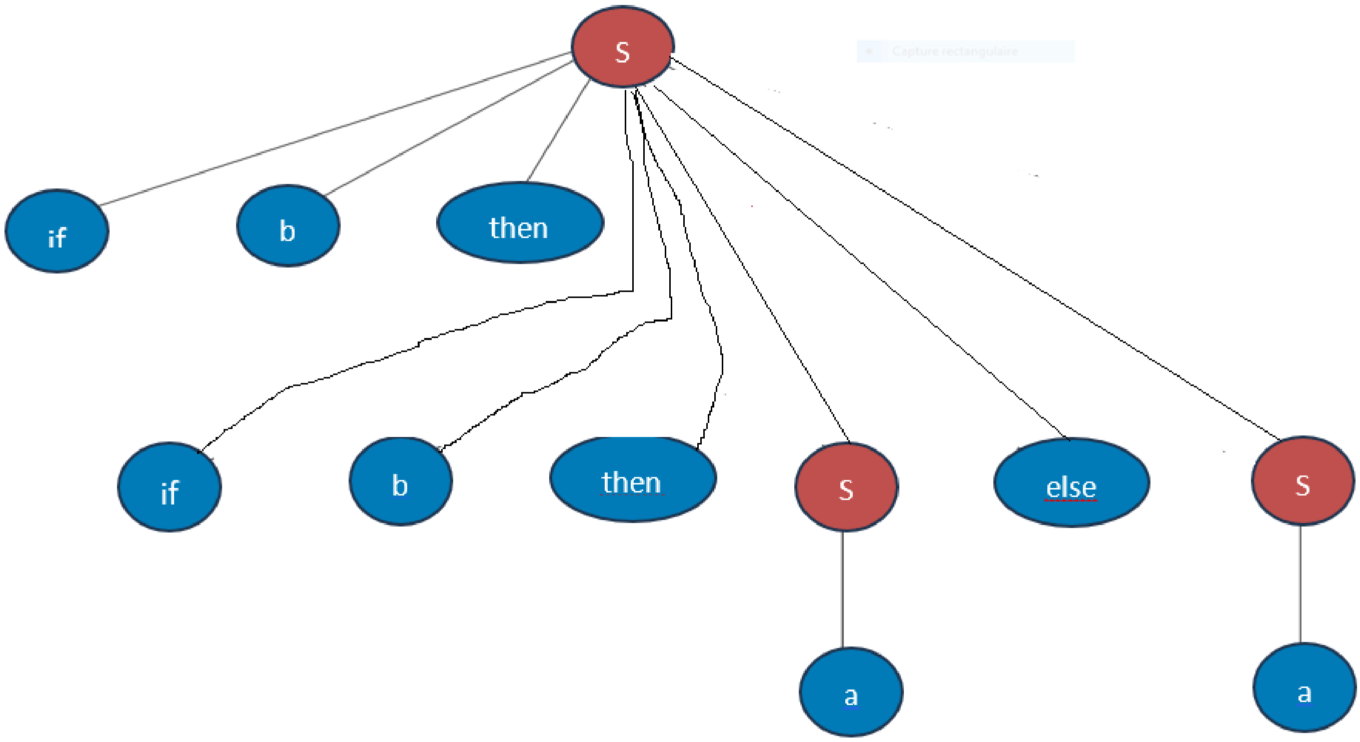
Alors $S \overset{*}{\Rightarrow} if\ b\ then\ if\ b\ then\ a\ else\ a$ donc $w_2 \in L(G)$

6. Donner pour chaque mot l'arbre de dérivation correspondant.

$w_1 = if\ b\ then\ a\ else\ a$ **(0.5 pt)**



$w_2 = if\ b\ then\ if\ b\ then\ a\ else\ a$ **(0.5 pt)**



Exercice n°=3 (6.5 pts)

1. Construire l'AEF équivalent à l'expression régulière suivante par **la méthode des dérivées** :

$$ER = 10 + (0 + 11)0^*1.$$

$\boxed{q_0 = ER = 10 + (0 + 11)0^*1 \text{ (}q_0\text{ est un état initial).}}$ **(0.25 pt)**

$q_0 \parallel 0 = (10 + (0 + 11)0^*1) \parallel 0$

$= (10) \parallel 0 + (00^*1 + 110^*1) \parallel 0$

$= (10) \parallel 0 + (00^*1) \parallel 0 + (110^*1) \parallel 0$ $\quad \delta(q_0, 0) = \boldsymbol{q_1}$

$= \emptyset + 0^*1 + \emptyset$

$= 0^*1 = \boldsymbol{q_1}$

$q_0 \parallel 1 = (10 + (0 + 11)0^*1) \parallel 1$

$= (10) \parallel 1 + (00^*1 + 110^*1) \parallel 1$

$= (10) \parallel 1 + (00^*1) \parallel 1 + (110^*1) \parallel 1$ $\quad \delta(q_0, 1) = \boldsymbol{q_2}$

$= 0 + \emptyset + 10^*1$

$= 0 + 10^*1 = \boldsymbol{q_2}$

(0.5 pt)

$q_1 \parallel 0 = (0^*1) \parallel 0$

$= (0^* \parallel 0)1 + 1 \parallel 0$

$= (0 \parallel 0)0^*1 + \emptyset$ $\quad \delta(q_1, 0) = \boldsymbol{q_1}$

$= 0^*1$

$= 0^*1 = \boldsymbol{q_1}$

$q_1 \parallel 1 = (0^*1) \parallel 1$

$= (0^* \parallel 1)1 + 1 \parallel 1$

$= (0 \parallel 1)0^*1 + \varepsilon$ $\quad \delta(q_1, 1) = \boldsymbol{q_3}$

$= \emptyset + \varepsilon$

$= \varepsilon = \boldsymbol{q_3} \in Q_F$

(0.5 pt)

$q_2 \parallel 0 = (0 + 10^*1) \parallel 0$

$= (0 \parallel 0) + (10^*1) \parallel 0$ $\quad \delta(q_2, 0) = \boldsymbol{q_3}$

$= \varepsilon + \emptyset$

$= \varepsilon = \boldsymbol{q_3}$

$q_2 \parallel 1 = (0 + 10^*1) \parallel 1$

$= (0 \parallel 1) + (10^*1) \parallel 1$ $\quad \delta(q_2, 1) = \boldsymbol{q_1}$

$= \emptyset + 0^*1$

$= 0^*1 = \boldsymbol{q_1}$

(0.25 pt)

$q_3 \parallel 0 = \varepsilon \parallel 0$ $\quad \delta(q_3, 0) = -$

$= \emptyset$

$q_3 \parallel 1 = \varepsilon \parallel 1$ $\quad \delta(q_3, 1) = -$

$= \emptyset$

(0.25 pt)

$A(\{0,1\},\{q_0,q_1,q_2,q_3\},q_0,\delta,\ \{q_3\})$ avec :

δ	**0**	**1**
$\Rightarrow \boldsymbol{q_0}$	q_1	q_2
$\boldsymbol{q_1}$	q_1	q_3
$\boldsymbol{q_2}$	q_3	q_1
$\boldsymbol{q_3 \in Q_F}$	-	-

(0.25 pt)

Dites si :

$\mathbf{110001} \in \boldsymbol{L(AEF)}$? **(0.25 pt)**

$(q_0, 110001) \vdash (q_2, 10001) \vdash (q_1, 0001) \vdash (q_1, 001) \vdash (q_1, 01) \vdash (q_1, 1) \vdash q_3$

On a : $(q_0, 110001) \vdash^* q_3$ et $q_3 \in Q_F$ donc $110001 \in L(AEF)$

$\mathbf{1101} \in \boldsymbol{L(AEF)}$? **(0.25 pt)**

$(q_0, 1101) \vdash (q_2, 101) \vdash (q_1, 01) \vdash (q_1, 1) \vdash q_3$

On a : $(q_0, 1101) \vdash^* q_3$ et $q_3 \in Q_F$ donc $1101 \in L(AEF)$

2. Réduire l'AEF trouvé en **1**). **(0.5 pt)**

a. Eliminer tous les états inaccessibles dans AEF (pas d'états inaccessibles dans AEF).
b. Regrouper les états congruents :

β_0 : (q_0, q_1, q_2) ; (q_3)

β_1 : (q_0) ; (q_1) ; (q_2) ; (q_3)

β_2 : (q_0) ; (q_1) ; (q_2) ; (q_3)

$\beta_2 = \beta_1$ Alors **Arrêt**.

Alors, l'automate AEF **est déjà minimal**.

3. Pour l'AEF trouvé en **1**), **<u>retrouver</u>** à l'aide de **<u>la méthode des équations</u>** le langage qu'il reconnait. **(1.5 pts)**

$$\begin{cases} X_0 = 0X_1 + 1X_2 \\ X_1 = 0X_1 + 1X_3 \\ X_2 = 0X_3 + 1X_1 \\ X_3 = \varepsilon \end{cases}$$

(0.5 pt)

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_3 = \varepsilon \\ X_1 = 0X_1 + 1 \Longrightarrow X_1 = 0^*1 \\ X_2 = 10^*1 + 0 \\ X_0 = 00^*1 + 1(10^*1 + 0) \end{cases}$$

(0.5 pt)

$$Alors\ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{X_0} = \mathbf{00^*1 + 1(10^*1 + 0)}$$

(0.5 pt)

4. Donner pour l'AEF trouvé en **1**) la grammaire G correspondante. **(1 pt)**

$\mathrm{G} = (\{0,1\},\{\mathrm{S},\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2,\mathrm{S}_3\},\ \mathrm{S},\ P)$ avec : $P = \{S \rightarrow\ 0\mathrm{S}_1\|1\mathrm{S}_2$, $\mathrm{S}_1 \rightarrow\ 0\mathrm{S}_1\|1\mathrm{S}_3$, $\mathrm{S}_2 \rightarrow\ 0\mathrm{S}_3\|1\mathrm{S}_1$, $\mathrm{S}_3 \rightarrow\ \varepsilon\}$	$\mathrm{G}' = (\{0,1\},\{\mathrm{S},\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2\},\ \mathrm{S},\ P')$ avec : $P = \{S \rightarrow\ 0\mathrm{S}_1\|1\mathrm{S}_2$, $\mathrm{S}_1 \rightarrow\ 0\mathrm{S}_1\|1$, $\mathrm{S}_2 \rightarrow\ 0\|1\mathrm{S}_1\}$

G est de type 3 régulière à droite, elle est dite <u>normalisée</u> **(0.5 pt)**

car toutes les règles de production sont de la forme :

$U\ \rightarrow\ aV|a|\varepsilon\ ;\ U,V\ \in\ N, a\ \in\ T.$ **(0.5 pt)**

Nom :...............................	Prénom :...............................	Groupe :........	Note (QCM) :	4.5

Questions de compréhension (QCM) : $(4.5\ pts = 18 \times 0.25\ pt)$

Cochez la (les) bonne(s) réponse(s) dans ce qui suit :

1) Lequel des mots suivants est un sous-mot de $abcabcabc$?

	$aabbcc$
	$abacbab$
	$acbba$
X	$acbac$

2) $\{a, b\}^*$ est un langage infini :

X	Vrai
	Faux

3) Deux mots u, w définis sur l'alphabet V sont égaux si et seulement si : $|u| = |w| = n$

	Vrai
X	Faux

4) Soit le mot $w = aabcbbca$. Le facteur $u = bcbb$ n'est pas propre.

	Vrai
X	Faux

5) Le langage engendré par la grammaire hors-contexte $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aSb|bSa|\varepsilon\})$:

	Régulier mais pas algébrique
	Ni algébrique ni régulier
X	Algébrique mais pas régulier
	Régulier et algébrique

6) Les langages équivalents à $\{a, b, aab, bab\}$:

X	$\{a, b\}.\{ab, \varepsilon\}$
	$\{a\}.\{ab, \varepsilon\}.\{b\}$
X	$\{\varepsilon\}.\{a, aab, b, bab\}$
	$\{a, b, aab, bab\}.\{\}$
	$\{a, aa\}\{\varepsilon, b, bb\}$

7) Tout AEF doit avoir au moins un état final :

X	Vrai
	Faux

8) Un automate A *complet* peut avoir plusieurs états puits :

	Vrai
X	Faux

9) La grammaire $G = (\{a, b\}, \{S, S_1, S_2, T\}, S, P)$ avec
$P' = \{S \rightarrow aS_1|bT\ ;\ S_1 \rightarrow aS_2\ ;\ S_2 \rightarrow bS\ ;\ T \rightarrow aS|bb\}$
est régulière à droite normalisée :

	Vrai
X	Faux

10) Le lemme d'Arden sert à résoudre les équations de langages de la forme $L = BL + A$:

	Vrai
X	Faux

11) Pour les AEFs :

	tout langage engendré par une grammaire algébrique peut être reconnu par un AEF
X	tout langage reconnu par un AEF peut être engendré par une grammaire algébrique
X	les langages reconnus par les AEFs sont ceux engendrés par les grammaires régulières
	aucune des réponses proposées n'est correcte

12) Deux grammaires sont équivalentes si et seulement si elles :

	ont les mêmes axiomes, non-terminaux, terminaux et règles
X	engendrent le même langage
	ont les mêmes non-terminaux
	ont les mêmes terminaux

13) La grammaire $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aaSb|ab|bb\})$ est de :

	Type 3 (régulière à droite)
	Type 3 (régulière à gauche)
X	Type 2
	Type 1
	Type 0

14) La grammaire :
$G = (\{a, b, c\}, \{S, A, R, T\}, S, P)$ avec :
$P = \{S \rightarrow aRbc \mid abc|\varepsilon\ ; R \rightarrow aRTb \mid aTb\ ;$
$Tb \rightarrow bT\ ;\ Tc \rightarrow cc|\varepsilon\}$ est de :

	Type 3 (régulière à droite)
	Type 3 (régulière à gauche)
	Type 2
	Type 1
X	Type 0

15) L'expression régulière qui dénote le langage L ={Tous les mots sur $\{0, 1\}$ dans lesquels chaque paire de 0 est suivie d'un 1 et contiennent le préfixe 1010} est :

	$1010(0+1)^*100(0+1)^*$
X	$1010(0+1)^*001(0+1)^*$
	$(0+1)^*01(0+1)^*1010$
	$(0+1)^*1010001(0+1)^*$

16) Lequel des mots suivants appartient au langage dénoté par l'ER $(\mathrm{ab}+\mathrm{ba})^*$ sur l'alphabet $V = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$:

	$abaabb$
X	$abbaab$
	$aaabbb$
	$abbbba$