Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique

Master 1 : Mathématiques Appliquées **Année université 2023-2024**

Examen Finale : Équations aux dérivées Partielles

Exercice 01.

On considère le problème initial et aux limite suivante :

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} u_t - \sqrt{3}u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x - 2, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t.

➢ En appliquant la méthode de séparation des variables résoudre le problème (P) .

Exercice 02.

On considère le problème de Cauchy suivante :

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = \sin(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t.

1. Donner la solution du problème de Cauchy (P).
2. Calculer $u\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$, $u\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 03

On considère le problème initial et aux limite suivante :

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = \alpha u & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

où u est une fonction inconnue réelle de deux variables (x,t) et $\alpha \geq 0$ est une constante.

On définit l'énergie associée au problème (P) par :

$$E(t) \coloneqq \frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(t)dx.$$

1. Démontrer que :

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^\ell \varphi^2(x)dx + \alpha\int_0^t\int_0^\ell u^2(s)dx\,ds, \quad \forall t > 0.$$

2. En utilisant la question 1, démontrer que le problème (P) admet une solution unique pour $\alpha = 0$.