Université Larbi Ben M'Hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et la Vie
Département mathématique et informatique

Contrôle d'Analyse Numérique 2

Exercice 1. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss.
b) Donner une interprétation matricielle de la méthode.
c) Factoriser la matrice A du système en produit LU où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale principale) et U triangulaire supérieure, puis résoudre ce système.

Exercice 2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant par **la méthode avec pivotement complet** en utilisant l'arithmétique d'arrondi à virgule flottante à trois chiffres significatifs.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 && E_1 \\ 2x_1 - x_2 + 100x_3 &= 100 && E_2 \\ 3x_1 + 50x_2 + x_3 &= 52.5 && E_3 \end{aligned}$$

Comparez le résultat obtenu avec la solution exacte $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Exercice 3. 1. Résoudre l'équation différentielle par **la méthode Euler modifiée (Heun)** :

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \qquad y(1) = 2$$

$(h = 0.1)$. Faites 4 itérations.
2. Ecrire le programme de résolution par Matlab.

Pr. Bouziani Abdelfatah

Solution de l'Exercice 1.

a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss

Le système donné est :

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{gathered}$$

Représentons ce système sous forme de matrice augmentée :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

Étape 1 : Élimination de la première colonne

- Nous utilisons la première ligne pour éliminer les éléments sous le pivot (1) de la première colonne :

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \leftarrow & E_2 - 3E_1 \\ E_3 & \leftarrow & E_3 - E_1 \end{array}$$

0.25 pt

0.25 pt

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}$$

0.25 pt

0.25 pt

Étape 2 : Élimination de la deuxième colonne

- Nous utilisons la deuxième ligne pour éliminer l'élément sous le pivot (-1) de la deuxième colonne :

$$E_3 \leftarrow E_3 - 3E_2$$

0.25 pt

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}$$

0.25 pt

0.25 pt

Étape 3 : Résolution par remontée: Les solutions sont donc :

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 1.$$

0.25 pt +0.25 pt+0.25 pt

b) Posons $A^{(0)} = A$, on calcule $A^{(1)} = P^{(1)}A$, où

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

0.25 pt

0.25 pt

d'où

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

on calcule $A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)}$, où

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{0.25 pt}$$

Donc

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(1)}$ est ainsi triangulaire supérieure, c'est la matrice U recherchee.
D'autre part, on a $A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)} = P^{(2)}P^{(1)}A$,on en déduit donc que

$$A = \underbrace{\left(P^{(1)}\right)^{-1}\left(P^{(2)}\right)^{-1}}_{L}\underbrace{A^{(2)}}_{U} \qquad \textbf{0.25 pt}$$

Ainsi, $A = LU$, avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{0.75 pt}$$

On a ainsi factorise A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \textbf{1.5 pt}$$

Présantation de la méthode d'identification

c) Résoudre $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$. On pose alors

$$\begin{cases} LZ = B \\ UX = Z \end{cases}$$

Les matrices L et U sont donc :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Résoudre $LZ = B$ **0.25 pt**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons :

$$z_1 = 5, \qquad z_2 = -7, \qquad z_3 = 16. \qquad \textbf{0.25 pt+0.25 pt+0.25 pt}$$

Étape 3 : Résoudre $UX = Z$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons :

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 1.$$ **0.25 pt+0.25 pt+0.25 pt**

Solution de l'Exercice 2. (**6 pts**)
Système d'équations
Le système est donné par :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & \qquad E_1 \\ 2x_1 - x_2 + 100x_3 = 100 & \qquad E_2 \\ 3x_1 + 50x_2 + x_3 = 52.5 & \qquad E_3 \end{aligned}$$

Étape 1 : Construction de la matrice augmentée
La matrice augmentée associée au système est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 100 & 100 \\ 3 & 50 & 1 & 52.5 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : Pivotement complet
Itération 1 :
1. **Recherche du plus grand élément (pivot) en valeur absolue dans la matrice augmentée :**

- Le plus grand élément est 100 situé à la position (2.3) **0.25 pt**

2. **Échange de lignes et de colonnes pour amener le pivot en** $(1, 1)$:

- Échangeons les colonnes 1 et 3, puis échangeons les lignes 1 et 2 : **0.25 pt+0.25 pt**

$$\begin{bmatrix} 100 & -1 & 2 & 100 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 50 & 3 & 52.5 \end{bmatrix}$$ **0.25 pt+0.25 pt**

Itération 2 :
1. Normalisation du pivot et élimination des éléments en dessous du pivot :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.010 & 0.020 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 50 & 3 & 52.5 \end{bmatrix}$$ **0.25 pt**

- Utilisons la première ligne pour éliminer les éléments en dessous du pivot de la première colonne :

$$\begin{aligned} E_2 &\leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 &\leftarrow E_3 - E_1 \end{aligned}$$

0.25 pt

0.25 pt

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.010 & 0.020 & 1 \\ 0 & 1.02 & 1.96 & 2 \\ 0 & 50.01 & 2.98 & 51.5 \end{bmatrix}$$

0.25 pt

0.25 pt

Itération 3 :

1. **Recherche du plus grand élément (pivot) en valeur absolue dans les lignes 2 et 3 :**

- Le plus grand élément est 50.03 situé à la position $(3, 2.)$ 0.25 pt

2. **Échange des lignes 2 et 3 :** 0.25 pt

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.010 & 0.020 & 1 \\ 0 & 50.01 & 2.98 & 51.5 \\ 0 & 1.02 & 1.96 & 2 \end{bmatrix}$$

0.25 pt

3. **Normalisation du pivot et élimination des éléments en dessous du pivot :**

$$E_3 \leftarrow E_3 - \left(\frac{1.02}{50.01}\right) E_2$$

0.25 pt

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.010 & 0.020 & 1 \\ 0 & 1 & 0.059 & 1.03 \\ 0 & 0 & 1.901 & 0.99 \end{bmatrix}$$

0.25 pt

0.25 pt

Itération 4 :

Normalisation du pivot et élimination des éléments en dessous du pivot :

$$\begin{aligned} E_1 &\leftarrow E_1 - 0.020E_3 \\ E_2 &\leftarrow E_2 - 0.059E_3 \end{aligned}$$

0.25 pt

0.25 pt

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.010 & 0 & 0.999 \\ 0 & 1 & 0 & 0.999 \\ 0 & 0 & 1 & 0.52 \end{bmatrix}$$

0.25 pt

0.25 pt

0.25 pt

Nous pouvons maintenant résoudre le système par substitution en arrière :

$$x_1 = 0.52, \qquad x_2 = 0.999, \qquad x_3 = 0.999$$

0.25 pt+0.25 pt+0.25 pt

La solution obtenue par la méthode du pivotement complet avec arithmétique d'arrondi à trois chiffres significatifs diffère légèrement des solutions exactes. Cette différence est due à l'arrondi et à l'approximation à chaque étape. 0.25 pt

Solution de l'Exercice 3.

Méthode d'Euler modifiée (Heun)

La méthode d'Euler modifiée (Heun) est une méthode de résolution numérique des équations différentielles. Elle est une amélioration de la méthode d'Euler en utilisant une estimation de la pente au milieu de l'intervalle.

La formule est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)\right], \qquad \textbf{0.5 pt}$$

où

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right) \qquad \textbf{0.5 pt}$$

est l'estimation de la méthode d'Euler simple.

Étape par étape :

1. Initialisation

$x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $h = 0.1$. **0.25 pt**

2. Première itération

Calcul de $y_1^{(0)}$: $y_1^{(0)} = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right)$

$= 2 + 0.1\left(1 - 2^2\right) = 1.7$ **0.25 pt**

Calcul de y_1 : $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right]$

$= 2 + \frac{0.1}{2}\left[\left(1 - 2^2\right) + \left(1.1 - 1.7^2\right)\right] = 1.7605$ **0.25 pt**

3. Deuxième itération

Calcul de $y_2^{(0)}$: $y_2^{(0)} = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right)$

$= 1.7605 + 0.1\left(1.1 - 1.7605^2\right) = 1.560$ **0.25 pt**

Calcul de y_2 : $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_2, y_2^{(0)}\right)\right]$

$= 1.7605 + \frac{0.1}{2}\left[\left(1.1 - 1.7605^2\right) + \left(1.2 - 1.5605^2\right)\right] = 1.5988$ **0.25 pt**

4. Troisième itération

Calcul de $y_3^{(0)}$: $y_3^{(0)} = y_2 + hf\left(x_2, y_2\right)$

$= 1.5988 + 0.1\left(1.2 - 1.5988^2\right) = 1.4632$ **0.25 pt**

Calcul de y_2 : $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_2, y_2\right) + f\left(x_3, y_3^{(0)}\right)\right]$

$= 1.5988 + \frac{0.1}{2}\left[\left(1.2 - 1.5988^2\right) + \left(1.3 - 1.4632^2\right)\right] = 1.489$ **0.25 pt**

5. Quatrième itération

Calcul de $y_4^{(0)}$: $y_4^{(0)} = y_3 + hf\left(x_3, y_3\right) = 1.3971$ **0.25 pt**

Calcul de y_4 : $y_4 = y_3 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_3, y_3\right) + f\left(x_4, y_4^{(0)}\right)\right] = 1.4155$ **0.25 pt**

Programme MATLAB pour la méthode de Heun (2.5pt)

```
% Paramètres
h = 0.1; % pas de temps          0.25 pt
t_final = 1.4; % temps final     0.25 pt
t = 1:h:t_final; % vecteur de temps     0.25 pt
% Initialisation des vecteurs de solutions
y_heun = zeros(1, length(t));        0.25 pt
y_heun(1) =2; % condition initiale   0.25 pt
% Fonction  EDO
```

f = @(x,y) x- y^2;   **0.25 pt**
% Calcul par la mÈthode de Heun
for i = 1:length(t)-1   **0.25 pt**
y_predict = y_heun(i) + h * f(y_heun(i)); % étape **0.25 pt**
y_correct = y_heun(i) + (h/2) * (f(y_heun(i)) +
f(y_predict)); % étape **0.25 pt**
corrective
y_heun(i+1) = y_correct; **0.25 pt**
end