

Corrige -type : Équations aux dérivées Partielles

Exercice 01.

1. On pose $u(x, t) = X(x)T(t)$, on trouve

$$\frac{T'(t)}{\sqrt{3}T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad [0,5]$$

D'autre part, on a

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0. \quad [0,5] \quad u(1, t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

Par conséquent,

$$(P_1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, & x \in]0,1[, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} T'(t) + \lambda\sqrt{3}T(t) = 0. \end{cases} \quad [0,5]$$

2. Résoudre (P_1) . On a

$$\text{Si } \lambda = 0: X(x) = a + bx. \quad X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow a = b = 0. \text{ Donc, } X \equiv 0. \quad [0,5]$$

$$\text{Si } \lambda < 0: X(x) = ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + be^{\sqrt{-\lambda}x}. \quad X(0) = 0 \Rightarrow a = -b \text{ et } X(1) = 0 \Rightarrow b = 0. \text{ Donc, } X \equiv 0. \quad [0,5]$$

$$\text{Si } \lambda > 0: X(x) = a \cos \sqrt{\lambda}x + b \sin \sqrt{\lambda}x. \quad X(0) = 0 \Rightarrow a = 0. \quad [0,5]$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow \underbrace{b}_{\neq 0} \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n \geq 1. \quad [0,5]$$

$$\text{Donc, } X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n \geq 1. \quad [0,5]$$

3. Résoudre (P_2) pour $\lambda := \lambda_n = (n\pi)^2, \quad n \geq 1$.

L'équation en $T(t)$ est une EDO linéaire du 1^{er} ordre, alors les solutions sont donc de la forme

$$T(t) = Ke^{-\sqrt{3}\lambda t} \Rightarrow T_n(t) = K_n e^{-\sqrt{3}\lambda_n t} = K_n e^{-\sqrt{3}(n\pi)^2 t}, \quad n \geq 1. \quad [1]$$

4. On déduit que la solution générale de l'équation de la chaleur sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) K_n e^{-\sqrt{3}(n\pi)^2 t}. \quad [0,5]$$

On utilise la condition initiale

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) k_n = x - 2. \quad [0,5]$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de **Fourier impaire** de la donnée initiale

$$\begin{aligned} k_n &= 2 \int_0^1 (x - 2) \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi} (x - 2) \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} (x - 2) \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + \underbrace{\frac{2}{(\pi n)^2} \sin(n\pi x) \Big|_0^1}_0 = -\frac{2}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 2] = -\frac{2(2 - (-1)^n)}{n\pi}. \end{aligned} \quad [1,5]$$

Par conséquent,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(2 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-\sqrt{3}(n\pi)^2 t}. \quad [0,5]$$

Exercice 02.

1. La solution générale

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] - \frac{1}{2} \cos(s) \Big|_{x-t}^{x+t} = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] - \frac{1}{2} [\cos(x+t) - \cos(x-t)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] - \frac{1}{2} [\cos(x+t) - \cos(x-t)] = \sin(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t). \end{aligned} \quad [2]$$

2.

$$u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad u\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}. \quad [1,5] + [1,5]$$

Exercice 03.

1. En dérivant $E(t)$ par rapport à t , on obtient

$$E'(t) := \frac{d}{dt} E(t) = \int_0^\ell u_t u dx. \quad (1) \quad [0,5]$$

En utilisant l'équation (E), (1) devient

$$E'(t) = \int_0^\ell (c u_{xx} + \alpha u) u dx = c \int_0^\ell u_{xx} u dx + \alpha \int_0^\ell u^2 dx. \quad (2) \quad [0,5]$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^\ell u_{xx} u dx = u_x u \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_x^2 dx = u_x(\ell, t) \underbrace{u(\ell, t)}_0 - \underbrace{u_x(0, t) u(0, t)}_0 - \int_0^\ell u_x^2 dx = - \int_0^\ell u_x^2 dx. \quad (3) \quad [1]$$

En substituant (3) dans (2), on trouve

$$E'(t) = - \int_0^\ell u_x^2 dx + \alpha \int_0^\ell u^2 dx \leq \alpha \int_0^\ell u^2 dx. \quad (4) \quad [1]$$

En intégrant par partie sur $(0, t)$, on obtient

$$E(t) \leq E(0) + \alpha \int_0^t \int_0^\ell u^2(s) dx ds = \frac{1}{2} \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + \alpha \int_0^t \int_0^\ell u^2(s) dx ds. \quad [0,5]$$

2. Soit u_1 et u_2 deux solutions au problème (P). Alors, $w := u_1 - u_2$ est une solution du problème [0,5]

$$(P_1) \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < \ell, t > 0, \\ w_x(0, t) = w(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & 0 < x < \ell, \end{cases} \quad [0,5]$$

D'après la question 1, on a

$$E(t) \leq E(0) \text{ et } E(0) = 0 \text{ il s'ensuit que } E \equiv 0. \quad [0,5] + [0,5]$$

Par conséquent, $w(x, t) = u_1 - u_2 \equiv 0, \forall t \geq 0$ et l'unicité est prouvée. [0,5]