الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

دروس وتمارين في التحليل 1

إعداد الدكتور : نسيب عبد الحليم

السنة الجامعية : 2022 – 2023

الفـــــهـــــــرس

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، أما بعد فهذه مطبوعة تضم مجموعة من الدروس والتمارين الموجهة لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي، تغطي مادة التحليل1 وفق عرض التكوين في ليسانس أكاديمي (نظام ل م د) الصادر من طرف وزارة التعليم العالي في السنة الجامعية 2018-2019.

أهداف المادة: تهدف هذه المادة إلى تعريف الطلبة بمختلف خواص مجموعة الأعداد الحقيقية وكذلك المتتاليات الحقيقية والتوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي.

قسم محتوى هذه المطبوعة إلى ثلاثة أقسام:

القسم الأول : ويضم مجموعة من الدروس، ويتكون من المحاور التالية :

المحور الأول : مجموعة الأعداد الحقيقية

المحور الثاني : المتتاليات الحقيقية

المحور الثالث : التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي

المحور الرابع : التوابع الأولية

القسم الثاني : يضم مجموعة من التمارين المحلولة تغطي المحاور السابقة، وتمثل بعض تمارين الأعمال الموجهة التي قدمت في جامعة أم البواقي خلال السنوات 2018 – 2022 .

القسم الثالث : يضم ثلاثة امتحانات محلولة مع سلم التنقيط.

جزء

الدروس

المحور الأول:مجموعة الأعداد الحقيقية (Nombres réels)

1.1.البنية الجبرية للمجموعة $\mathbb{R}$:

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة نرمز لها بـ $\mathbb{R}$ مزودة بعمليتي جمع " + "و ضرب" · " ومزودة كذلك بعلاقة ترتيب كلي " $\leq$" تحقق المسلمات التالية:

A_1) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x+(y+z)=(x+y)+z$.

A_2) $\forall x,y\in\mathbb{R}: x+y=y+x$.

A_3) $\forall x\in\mathbb{R}: x+0=0+x=x$.

A_4) $\forall x\in\mathbb{R}: x+(-x)=(-x)+x=0$.

A_5) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

A_6) $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\cdot y=y\cdot x$.

A_7) $\forall x\in\mathbb{R}: x\cdot 1=1\cdot x=x$.

A_8) $\forall x\in\mathbb{R}^*: x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$.

A_9) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

A_{10}) $\forall x\in\mathbb{R}: x\leq x$.

A_{11}) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: \left(x\leq y \text{ و } y\leq z\right)\Rightarrow(x\leq z)$.

A_{12}) $\forall x,y\in\mathbb{R}: \left(x\leq y \text{ و } y\leq x\right)\Rightarrow(x=y)$.

A_{13}) $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\leq y \text{ أو } y\leq x$.

A_{14}) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: (x\leq y)\Leftrightarrow(x+z\leq y+z)$.

A_{15}) $\begin{cases}\forall x,y\in\mathbb{R};\forall z\in\mathbb{R}_+^*: (x\leq y)\Leftrightarrow(x\cdot z\leq y\cdot z)\\ \forall x,y\in\mathbb{R};\forall z\in\mathbb{R}_-^*: (x\leq y)\Leftrightarrow(x\cdot z\geq y\cdot z)\end{cases}$.

خواص:

1) $\forall x,y,x',y'\in\mathbb{R}: \left(x\leq y \text{ و } x'\leq y'\right)\Rightarrow(x+x'\leq y+y')$.

2) $\forall x,y,x',y'\in\mathbb{R}_+^*: \left(x\leq y \text{ و } x'\leq y'\right)\Rightarrow(x\cdot x'\leq y\cdot y')$.

3) $\forall x,y,x',y'\in\mathbb{R}_+^*: (0<x<y)\Rightarrow\left(0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\right)$.

2.1.القيمة الطلقة:

تعريف1.1: ليكن $x\in\mathbb{R}$

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ$|x|$والمعرف كمايلي:

$$|x|=\begin{cases}x\ si, x\geq 0\\ -x\ si, x\leq 0\end{cases}$$

خواص:x,y,r أعداد حقيقية حيث $r\geq 0$.

1) $|x|\geq 0;\ |-x|=|x|\,;-|x|\leq x\leq|x|$

2) $|x| = 0 \iff x = 0$

3) $|x.y| = |x||y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y\neq0)$

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$

6) $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

7) $|x| \geq r \iff x \leq -r$ أو $x \geq r$.

3.1.الأجزاء المحدودة من $\mathbb{R}$:

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وغير خالية.

- نقول أن A محدودة من الأعلى إذا، وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\exists b \in \mathbb{R}\,;\ \forall x \in A : x \leq b$$

يسمى bحاد أعلى للمجموعة A.

- نقول أن A محدودة من الأدنى إذا، وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\exists a \in \mathbb{R}\,;\ \forall x \in A : x \geq a$$

يسمى aحاد أدنى للمجموعة A.

- نقول أن A محدودة إذا، وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

ملاحظات:

- إذا كان a حاد من الأعلى للمجموعة A فإن كل عدد a' حيث $a' > a$ هو أيضا حاد من الأعلى للمجموعة A.

- إذا كان b حاد من الأدنى للمجموعة A فإن كل عدد b' حيث $b' < b$ هو أيضا حاد من الأدنى للمجموعة A.

- تكون A غير محدودة من الأعلى إذا، وفقط إذا تحقق ما يلي: $\forall b \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in A : x > b$.

- تكون A غير محدودة من الأدنى إذا، وفقط إذا تحقق ما يلي: $\forall a \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in A : x < a$.

قضية1.1: الشروط الثلاثة الآتية متكافئة.

1) A محدودة.

2) $\exists a \in \mathbb{R}\,;\ \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in A : a \leq x \leq b$.

3) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*\,;\ \forall x \in A : |x| \leq M$.

1.3.1الحد الأعلى و الحد الأدنى-العنصر الأكبر- العنصر الأصغر:

- نسمي حدًا أعلى للمجموعة A ($borne\ supérieure\ de\ A$)،أصغر الحواد العليا لـ A عند وجوده ونرمز له بـ $sup\ A$

نسمي حدًا أدنى للمجموعة A ($borne\ inferieure\ de\ A$)، أكبر الحواد الدنيا لـ Aعند وجوده ونرمزله بـ $inf\ A$.

- اذا كان $sup\ A \in A$ يسمى العنصر الأكبر لـ A ونرمز له بـ $max\ A$.
- اذا كان$inf\ A \in A$ يسمى العنصر الأصغر لـ A ونرمز له بـ $min\ A$.

ملاحظة :

إذا كانت A غير محدودة من الأعلى (من الأدنى ،على التوالي) في $\mathbb{R}$ نكتب: $sup\ A = +\infty$ ($infA = -\infty$ ،على التوالي).

قضية2.1:

1. لتكن A مجموعة محدودة من الأعلى.

$$M = sup\ A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists a \in A : M - \varepsilon < a \end{cases}$$

2. لتكن A مجموعة محدودة من الأدنى.

$$m = inf\ A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq m \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists b \in A : m + \varepsilon > b \end{cases}$$

البرهان:

1) يكون M هو أصغر الحواد العليا للمجموعة Aإذا، و فقط إذا كانت القضية التالية خاطئة:

$\exists M' < M; \forall x \in A : x \leq M'$ أي إذا كانت القضية $\forall M' < M; \exists x \in A : x > M'$ صحيحة.

بوضع $\varepsilon = M - M'$ فإن $0 < \varepsilon$ و منه فإن القضية الأخيرة تكتب على الشكل:

$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists x \in A : M - \varepsilon < x$.

بنفس الطريقة نبرهن على الحالة الثانية.

أمثلة:

1) $A = [1,2[$

غير موجود $max\ A =$; *in A=1* $inf\ A = 1$; $sup\ A$ =2

2) $A = \{\frac{1}{n} \ ; n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq 1 \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ بما أن $1 \in A$ فإن $sup\ A = max\ A = 1$.

لنبرهن أن $inf A = 0$.

لدينا
$$0 = inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq 0 \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists b \in A : 0 + \varepsilon > b \end{cases}$$

و لدينا من جهة أخرى $\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists b \in A : 0 + \varepsilon > b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}^* : \varepsilon > \frac{1}{n}$ و هذه القضية الأخيرة صحيحة، لأنه حسب مسلمة أرخميدس لدينا: $\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}^* : 1 < n\varepsilon$.

بما أن $0 \notin A$ فإن غ.م $min\ A =$.

2.3.1:مسلمة الحد الأعلى والحد الأدنى:

- كل مجموعة غير خالية A جزئية من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأعلى تقبل حدًا أعلى في $\mathbb{R}$.
- كل مجموعة غير خالية A جزئية من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأدنى تقبل حدًا أدنى في $\mathbb{R}$.

4.1 مسلمة أرخميدس: (***Axiome d'Archimed***)

نظرية 1.1: $\forall x > 0; \ \forall y \in \mathbb{R} \ ; \exists n \in \mathbb{N}^* : y < n\, x$.

البرهان: (نستعمل البرهان بالخلف)

نفرض أن $\exists x > 0; \ \exists y \in \mathbb{R} \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* : y \geq n\, x$ أو $\exists x > 0; \ \exists y \in \mathbb{R} \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq \frac{y}{x}$.

إن هذه القضية الأخيرة تعني أن المجموعة $\mathbb{N}^*$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ فهي تقبل حدا أعلى في $\mathbb{R}$ نرمز له بـ M

و منه $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M - \varepsilon < n_0$ بوضع $\varepsilon = 1$ نحصل على الآتي $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M - 1 < n_0$

أو $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : M < n_0 + 1$ لكن $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$ و هذا يناقض الفرضية $sup\ A = M$.

5.1:الجزء الصحيح لعدد حقيقي :

من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح واحد و واحد فقط نرمز له بـ $E(x)$(أو $[x]$) يحقق :

$E(x) \leq x < E(x) + 1$ يسمى $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

بعبارة أخرى $E(x)$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x.

أمثلة:

1) $E(0,1) = 0$ لأن $0 \leq 0,1 < 0 + 1$.

2) $E(-0,1) = -1$ لأن $-1 \leq -0,1 < -1 + 1$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*: E\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ لأن $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq \frac{1}{n+1} < 0 + 1$.

6.1 المجموعات الكثيفة في $\mathbb{R}$:

نظرية2.1: بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق.

البرهان:

ليكن y, x عددين حقيقيين حيث $x < y$.

حسب مسلمة أرخميدس فإنه $\exists n \in \mathbb{N}^*: 1 < n(y - x)$ أو $nx + 1 < ny$.

من جهة أخرى لدينا $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$ و منه $nx < E(nx) + 1 \leq nx + 1 < ny$

أي أن $nx < E(nx) + 1 < ny$ إذن $x < \frac{E(nx)+1}{n} < y$.

ومنه فإن العدد الناطق $\frac{E(nx)+1}{n}$ محصور بين العددين الحقيقيين y, x.

تعريف 2.1: نسمي كل عدد غير ناطق عددًا أصمًا نرمز لمجموعة الأعداد الصماء بـ Iأو Q^c.

نظرية 3.1: بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد أصَم.

البرهان: لبرهان هذه النظرية نحتاج للقضيتين التاليتين.

قضية 3.1: العدد $\sqrt{2}$، عدد غير ناطق.

قضية 4.1: إذا كان $x \in I$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ فإن $rx \in I$.

برهان القضية 3.1

نفرض أن $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$، إذن توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية (p, q) حيث $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ و $PGCD\ (p, q) = 1$.

ومنه

$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$من هذه العلاقة نستنتج أن q^2 يقسم p^2 و بما أنq^2 و p^2 أوليان فيما بينهما فإن q^2 يقسم 1 أي أن $q = 1$بالتعويض في المساواة السابقة نحصل على $p^2 = 2$ وهذا تناقض لأنه لا يوجد عدد طبيعي مربعه يساوي 2.

برهان القضية 4.1

نفرض أن $x \in I$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ و أن $rx \notin I$ أي أن $rx \in \mathbb{Q}$ و منه فإن:

$$\left(\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}^* \text{ و } rx \in \mathbb{Q}\right) \Rightarrow \frac{1}{r}rx \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

و هذا تناقض لأن $x \in I$.

<u>نأتي الآن إلى برهان النظرية 3.1</u>

ليكن y, x عددين حقيقيين حيث $x < y$، حسب النظرية 2.1 فإنه يوجد على الأقل عدد ناطق r (يمكن اختيار r حيث $r \neq 0$) يحقق $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ و منه $x < r\sqrt{2} < y$، حسب القضية 4.1 فإن العدد $r\sqrt{2}$، عدد أصم وهو محصور بين العددين x و y.

<u>ملاحظة:</u> يمكن صياغة النظريتين (2.1) و(3.1) كما يلي:

إن المجموعتين Iو $\mathbb{Q}$ كثيفتين في $\mathbb{R}$.

<u>7.1 المجالات في $\mathbb{R}$:</u>

ليكن b, a عددين حقيقيين حيث $a < b$.

المجموعة $\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ تسمى مجال مغلق طرفاه a و b و يرمز له بـ $[a, b]$، بنفس الطريق نعرف المجالات:

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ مجال مفتوح.

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ مجال مغلق عند a ومفتوح عند b.

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ مجال مفتوح عند a ومغلق عند b.

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ مجال مغلق عند a وغير محدود من الأعلى.

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ مجال مفتوح عند a وغير محدود من الأعلى.

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$ مجال مغلق عند b وغير محدود من الأدنى.

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$ مجال مفتوح عند b وغير محدود من الأدنى.

نقبل أن: $[a, a] = \{a\}$، $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$، المجموعة الخالية هي أيضا مجال.

<u>نظرية 4.1:</u>

تكون مجموعة I غير خالية و جزئية من $\mathbb{R}$، مجالا إذا و فقط إذا كانت محققة للخاصية التالية:

$$\forall a, b \in I\ (a \leq b);\ \forall x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$$

<u>البرهان:</u>

<u>الشرط اللازم:</u> إذا كانت المجموعة I مجال فإن الخاصية محققة.

<u>الشرط الكافي:</u> نفرض أن الخاصية محققة و نبرهن أن I مجال من $\mathbb{R}$.

لدينا أربع حالات ممكنة و هي: 1) I محدودة ، 2) I محدودة من الأعلى و ليست محدودة من الأدنى، 3) I محدودة من الأدنى و ليست محدودة من الأعلى، 4) I ليست محدودة لا من الأعلى و لا من الأدنى.

لنبرهن أنه في الحالة الأولى فإن: إما $I = [a, b]$ و إما $I = [a, b[$ و إما $I =]a, b]$ و إما $I =]a, b[$ حيث

$a = inf\ I$ و $b = sup\ I$.

لدينا
$$b = sup\ I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I : x \leq b \\ \text{و} \\ \forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists b' \in I : b - \varepsilon < b' \ldots\ldots (1) \end{cases}$$ و
$$a = inf\ I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I : x \geq a \\ \text{و} \\ \forall \delta > 0\ ;\ \exists a' \in I : a + \delta > a' \ldots\ldots (2) \end{cases}.$$

ا) إذا كان $a \in I$ و $b \in I$ فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in I \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b] \Rightarrow I \subset [a,b]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I \Rightarrow [a,b] \subset I$$

و منه $I = [a,b]$.

ب) إذا كان $a \in I$ و $b \notin I$ فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in I \Rightarrow a \leq x < b \Rightarrow x \in [a,b[\Rightarrow I \subset [a,b[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in [a,b[\Rightarrow a \leq x < b \Rightarrow b - x > 0$$

بوضع $\varepsilon = b - x$في (1)نحصل على $x < b'$ و بما أن $a, b' \in I$ فإن:

$$a \leq x < b' \Rightarrow x \in I \Rightarrow [a,b[\subset I$$

و منه $I = [a,b[$.

ج) إذا كان $a \notin I$ و $b \in I$ فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in I \Rightarrow a < x \leq b \Rightarrow x \in]a,b] \Rightarrow I \subset]a,b]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in]a,b] \Rightarrow a < x \leq b \Rightarrow x - a > 0$$

$$a = inf\ I \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists a' \in I : a + \varepsilon > a'$$

بوضع $\delta = x - a$ في (2) نحصل على $x > a'$ و بما أن $a, a' \in I$ فإن:

$$a' < x \leq b \Rightarrow x \in I \Rightarrow]a,b] \subset I$$

و منه $I =]a,b]$.

د) إذا كان $a \notin I$ و $b \notin I$ فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in I \Rightarrow a < x < b \Rightarrow x \in]a,b[\Rightarrow I \subset]a,b[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \in]a,b[\Rightarrow a < x < b \Rightarrow x - a > 0 \text{ و } b - x > 0$$

بوضع $\varepsilon = b - x$ في (1) و $\delta = x - a$ في (2) نحصل على $x < b'$ و $x > a'$ و بما أن $a', b' \in I$ فإن:

$$a' < x \leq b' \Rightarrow x \in I \Rightarrow]a,b[\subset I.$$

و منه $I =]a,b[$.

بنفس الطريقة نبرهن أن I مجال في الحالات الثلاثة الأخرى.

المحور الثاني:المتتاليات الحقيقية(suites numériques)

1.2عموميات:

تعريف1.2:

- نسمي متتالية حقيقية كل دالة uللمجموعة $\mathbb{N}$ في المجموعة $\mathbb{R}$.
- نرمز لصورة العدد الطبيعي n بالمتتالية بالرمز u_n ويسمى الحد العام للمتتالية u، كما نرمزللمتتالية بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) وإذا كانت المتتالية معرفة من أجل كل $n \geq n_0$ نرمز لها بـ$(u_n)_{n\geq n_0}$.
- إن الحد العام لـ(u_n) قد يكون معرفًا صراحة أو بواسطة علاقة تراجعية.

أمثلة:

1) $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة بحدها العام: $\forall n \geq 2 :\ u_n = \sqrt{n-2}$

$$\dots ; u_{10} = \sqrt{8} ; \dots\dots ; u_4 = \sqrt{2} ; u_3 = 1 ; u_2 = 0$$

2)$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالعلاقة التراجعية :

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}\ ; v_0 = 1$$

$$\dots\dots ; v_3 = \frac{1/3}{1/3 + 1} = \frac{1}{4}\ ;\ v_2 = \frac{1/2}{1/2 + 1} = \frac{1}{3} ; v_1 = \frac{1}{2}\ ; v_0 = 1$$

(أثبت أن$\forall n \in \mathbb{N}: v_n = \frac{1}{n+1}$)

تعريف2.2:

- نقول عن متتالية (u_n)أنها محدودة من الأعلى إذا، وفقط اذا تحقق:
  $\exists M \in \mathbb{R}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \leq M$
- نقول عن متتالية (u_n)أنها محدودة من الأسفل إذا، وفقط إذا تحقق:
  $\exists m \in \mathbb{R}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \geq m$
- نقول عن متتالية (u_n) أنها محدودة اذا، وفقط اذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

قضية1.2:(((u_n) محدودة) $\Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M)$.

تعريف3.2:

- نقول عن متتالية (u_n) أنها متزايدة (متناقصة ، على الترتيب) إذا كان$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_n \leq u_{n+1}$

($\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq u_{n+1}$ ،على الترتيب)، إذا كانت المتراجحة تامة نقول أن المتتالية متزايدة تمامًا (متناقصة تمامًا،على الترتيب).

- نقول عن متتالية (u_n) أنها ثابتة إذا كان$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_n = u_{n+1}$.

2.2المتتاليات المتقاربة:

تعريف4.2:

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي ℓ إذا، وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ أو اختصارًا $\lim u_n = \ell$.

كل متتالية غير متقاربة نقول أنها متباعدة.

<u>مثال:</u>لتكن المتتالية: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \frac{3n+1}{n+2}$، لنثبت أن $\lim u_n = 3$

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ حيث $|u_n - 3| < \varepsilon$ لدينا

$$|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{3n+1}{n+2} - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$$

حسب مسلمة أرخميدس فإنه: $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \frac{5}{\varepsilon} - 2 < N_0$ وعليه فإنه يكفي أخذ $N = N_0$ حتى يتحقق الأتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N(N = N_0) \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: [n > N \Longrightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن تحديد N بطريقة أخرى كما هو موضح في الآتي:

بما أن $\left|\frac{5}{\varepsilon} - 2\right| \le \frac{5}{\varepsilon} - 2$ و $\left|\frac{5}{\varepsilon} - 2\right| < E\left(\left|\frac{5}{\varepsilon} - 2\right|\right) + 1 \in \mathbb{N}$ فإنه يكفي أخذ

$$N = E\left(\left|\frac{5}{\varepsilon} - 2\right|\right) + 1$$

<u>نظرية1.2:</u>

إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فإن نهايتها وحيدة.

<u>البرهان:</u>

نفرض أن (u_n) تقبل نهايتين ℓ و ℓ' حيث $\ell' < \ell$.

من أجل $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$ فإن

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \frac{\ell-\ell'}{2} \Longrightarrow \frac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \frac{3\ell-\ell'}{2}.$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_2 \Longrightarrow |u_n - \ell'| < \frac{\ell-\ell'}{2} \Longrightarrow \frac{3\ell'-\ell}{2} < u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}.$$

بوضع $N = \max\{N_1, N_2\}$ فإن $\forall n > N: \frac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$ و هذا تناقض.

<u>نظرية2.2:</u>

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

<u>البرهان:</u>

نفرض (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ.

من أجل $\varepsilon = 1$ فإن $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow \ell - 1 < u_n < \ell + 1$.

نضع $A = \{u_0, u_1, u_2, \dots\dots, u_N, \ell - 1, \ell + 1\}$ المجموعة A منتهية فهي تقبل عنصر أكبر و عنصر أصغر، عندئذ فإن $\forall n \in \mathbb{N}: \min A < u_n < \max A$.

<u>نظرية3.2:</u>

- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة حيث $\lim u_n = Sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى هي متتالية متقاربة حيث $\lim u_n = inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

البرهان: (لنبرهن على الحالة الأولى)

لتكن (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى، إذن المجموعة $A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ محدودة من الأعلى فهي تقبل حدا أعلى نرمز له بـ ℓ.

لدينا $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}: \ell - \varepsilon < u_N$ و منه $\forall n > N: \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$.

إذن $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

بنفس الطريقة نبرهن على الحالة الثانية.

مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ:

$$u_0 = \alpha > 1 \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة (لا يطلب حساب النهاية)

-نثبت أولا وراثية الصفة $u_n > 1$ أي أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > 1$ بإستعمال البرهان بالتراجع، ثم نثبت بعدها أن (u_n) متناقصة تمامًا، ينتج حسب النظرية (3.2) أن المتتالية (u_n) متقاربة.

نظرية4.2:

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نحو ℓ و ℓ' على الترتيب فإن المتتاليات $(u_n + v_n)$ ، $(u_n v_n)$ ، (λu_n) ، $(|u_n|)$ متقاربة نحو $\ell + \ell'$، $\ell\ell'$، $\lambda\ell$، $|\ell|$ على الترتيب وإذا كانت $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \neq 0$ و $\ell' \neq 0$ فإن المتتالية $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة نحو $\frac{\ell}{\ell'}$.

البرهان: **(** لنبرهن على الحالة الأخيرة**)**

- بما أن $\lim v_n = \ell' \neq 0$، من أجل $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2}$ فإن $\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2}$

و منه

$$|v_n - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow \big||v_n| - |\ell'|\big| < \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow \frac{|\ell'|}{2} < |v_n| < 3\frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|v_n|} < \frac{2}{|\ell'|}.$$

- لدينا من جهة أخرى من أجل $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ فإن:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \text{ و } \exists N_3 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_3 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon$$

نضع $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$،

$$\forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \left|\frac{(u_n-\ell)}{v_n} - \frac{\ell(v_n-\ell')}{v_n\ell'}\right| \leq \left|\frac{(u_n-\ell)}{v_n}\right| + \left|\frac{\ell(v_n-\ell')}{v_n\ell'}\right| < \left(\frac{2}{|\ell'|} + \frac{\ell}{|\ell'|^2}\right)\varepsilon.$$

بوضع $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\varepsilon' = \left(\frac{2}{|\ell'|} + \frac{\ell}{|'\ell'|^2}\right)\varepsilon$ فإن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ و منه

$$\forall \varepsilon' > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| < \varepsilon'.$$

نظرية5.2:

- إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين حيث: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq v_n$ و كانت $\lim v_n = \ell'$ و $\lim u_n = \ell$ عندئذٍ فإن $\ell \leq \ell'$.

- إذا كانت (u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات متقاربة وتحقق: $\forall n \in \mathbb{N}: w_n \leq u_n \leq v_n$ وكانت

فإن $\lim w_n = \lim v_n = \ell$ فإن $\lim u_n = \ell$.

البرهان:

- لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين حيث: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq v_n$ و $\lim v_n = \ell'$ و $\lim u_n = \ell$

نفرض أن $\ell > \ell'$، من أجل $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{2}$ فإن:

$\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$ و $\exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N_0 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$n > N_1 \Rightarrow \frac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \frac{\ell 3-\ell'}{2}$ و $n > N_0 \Rightarrow \frac{3\ell'-\ell}{2} < v_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$.

بوضع $N = \max\{N_0, N_1\}$ فإنه من أجل $n > N$: $u_n < \frac{\ell+\ell'}{2} < v_n$ و هذا تناقض (لأن $u_n \leq v_n$).

ملاحظة: الحالة الثانية هي نتيجة مباشرة للحالة الأولى.

3.2 المتتاليات الجزئية:

تعريف5.2:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولتكن $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة تماما من الأعداد الطبيعية نقول عن المتتالية $(u_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ أنها متتالية جزئية من المتتالية (u_n).

نظرية 6.2:

كل متتالية جزئية لمتتالية متقاربة هي متتالية متقاربة ولها نفس النهاية(العكس غير صحيح).

البرهان:للبرهان على هذه النظرية نحتاج للقضية التالية

قضية2.2:

إذا كانت$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الطبيعية متزايدة تماما فإن: $\forall k \in \mathbb{N}: n_k \geq k$.

برهان القضية 2.2:

$n_0 \geq 0$ محققة لأن $n_0 \in \mathbb{N}$.

نفرض $n_k \geq k$ ونبرهن أن $n_{k+1} \geq k+1$.

بما أن $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة تماما فإن $n_{k+1} > n_k$ و منه $n_{k+1} > k$ أي أن $n_{k+1} \geq k+1$.

نأتي الآن إلى برهان النظرية 6.2.

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي ℓ.

لدينا$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$ و منه

$\forall k \in \mathbb{N}: k > N \Rightarrow n_k > n_N \geq N \Rightarrow |u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall k \in \mathbb{N}: k > N \Rightarrow |u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$ إذن $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \ell$.

مثال01: $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

المتتاليتين $u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$; $u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$ متتاليتين جزئيتين للمتتالية (u_n) بما أن (u_n) متقاربة نحو 1 فإن كلًا من المتتاليتين $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ متقاربتين نحو 1.

ملاحظة: باستعمال العكس النقيض للاستلزام الوارد في النظرية (6.2) يمكننا إثبات تباعد بعض المتتاليات.

مثال02: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \frac{n+1}{n+2} sin \frac{n\pi}{2}$

لننشئ المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ و $(u_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ حيث $\forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{2k} = 0 \\ u_{4k+1} = \frac{4k+2}{4k+3} \end{cases}$.

لدينا $\lim u_{2k} = 0$ و $\lim u_{4k+1} = 1$ و منه $\lim u_{2k} \neq \lim u_{4k+1}$ إذن المتتالية (u_n) متباعدة.

5.2 تعميم إلى النهايات اللا منتهية:

تعريف 6.2:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow u_n > A.$$

تعريف 7.2:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow u_n < -A.$$

مثال: α عدد حقيقي حيث $\alpha > 1$ ، (v_n) متتالية عددية معرفة بـ $\forall n \in \mathbb{N}: v_n = \alpha^n$.

لنثبت أن: $\lim v_n = +\infty$ (استعمل متراجحة برنولي: $\forall n \in \mathbb{N}; \forall a > -1: (1+a)^n \geq 1 + na$).

ليكن $A \in \mathbb{R}_+^*$، بوضع $a = \alpha - 1 > 0$ فإن $\forall n \in \mathbb{N}: (1+a)^n \geq 1 + na$ و منه

$$|v_n| > A \Leftrightarrow \alpha^n > A \Leftrightarrow (1+a)^n > A$$

يكفي أخذ $1 + na > A$ و منه

$$1 + na > A \Leftrightarrow n > \frac{A-1}{a} = \frac{A-1}{\alpha - 1}$$

ومنه يكفي اختيار $N = E\left(\left|\frac{A-1}{\alpha-1}\right|\right) + 1$.

نظرية 7.2:(بولزانو- فايرشترايس *BOLZANO-WEIERSTRASS*)

من كل متتالية حقيقية محدودة يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.

البرهان: لتكن (u_n) متتالية محدودة، نضع $a_0 = inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ و $b_0 = sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: a_0 \leq u_n \leq b_0$، نضع $I_0 = [a_0, b_0]$.

لنقسم المجال I_0 إلى مجالين متساويين في الطول، واحد على الأقل من هذين المجالين يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية (u_n) نرمز له بـ $I_1 = [a_1, b_1]$، ليكن u_{n_1} حدا من حدود المتتالية (u_n) حيث $u_{n_1} \in I_1$.

لنقسم المجال I_1 إلى مجالين متساويين في الطول، واحد على الأقل من هذين المجالين يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية (u_n) نرمز له بـ $I_2 = [a_2, b_2]$، ليكن u_{n_2} حدا من حدود المتتالية (u_n) حيث $u_{n_2} \in I_2$ و $n_2 > n_1$ (و هذا ممكن لأن I_2 يحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية (u_n)) و هكذا ننشئ متتالية مجالات $I_k = [a_k, b_k]$ حيث I_k هو أحد نصفي المجال I_{k-1} الذي يحوي على عدد غير منتهي من حدود المتتالية (u_n) و u_{n_k} حد من حدود المتتالية (u_n) حيث $u_{n_k} \in I_k$ و $n_k > n_{k-1}$ عندئذ نحصل على متتالية (u_{n_k}) جزئية من المتتالية (u_n) تحقق $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$.

لدينا $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{b_0-a_0}{2^k} = 0$ و بما أن $I_k \subset I_{k-1}$ فإن المتتالية (a_k) متزايدة و المتتالية (b_k) متناقصة إذن المتتاليتين (a_k) ، (b_k) متجاورتينوبالتالي المتتالية (u_{n_k}) متقاربة و نهايتها هي النهاية المشتركة للمتتاليتين (a_k) و (b_k).

4.2.المتتاليات المتجاورة:

تعريف 8.2:

نقول عن متتاليتين(u_n) و (v_n) أنهما متجاورتين إذا، وفقط إذا كانت إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة وكانت:

$\lim(u_n - v_n)=0$.

نظرية 8.2:

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتين متقاربتين ولهما نفس النهاية.

البرهان:

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متجاورتين حيث (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة.

إن المتتالية $(v_n - u_n)$ متناقصة، فهي إذن متقاربة نحو حدها الأدنى 0 و منه فإن $\forall n \in \mathbb{N}: v_n - u_n \geq 0$.

أي أن $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \geq u_n$ و منه نستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_0 < u_n < v_n < v_0$.

إذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) رتيبتين و محدودتين فهما متقاربتين.

نفرض أن $\lim u_n = \ell$ و$\lim v_n = \ell'$ بما أن $\lim(u_n - v_n) = 0$ فإن $\ell - \ell' = 0$ و منه $\ell = \ell'$.

مثال: لتكن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) المعرفتين بـ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \ ; \ v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Leftarrow (u_n)$ متزايدة تمامًا.

$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \Leftarrow (v_n)$ متناقصة تمامًا.

$\lim(u_n - v_n) = \lim\frac{1}{n} = 0$.

إذن المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) متجاورتين، فهما متقاربتين ولهما نهاية مشتركة.

(يبرهن على أن$\lim u_n = \lim v_n = \frac{\pi^2}{6}$)

5.2.متتالية كوشي:(Suite de Cauchy)

تعريف9.2:

نقول عن متتالية (u_n) أنها متتالية كوشي (أو كوشية) إذا، وفقط إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall\varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall p; q \in \mathbb{N}: (p > N \wedge q > N) \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

صيغة ثانية:

$$\forall\varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n; p \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

نظرية 9.2:

تكون متتالية أعداد حقيقة متقاربة إذا، وفقط إذا كانت متتالية كوشي.

البرهان:

الشرط اللازم: لتكن (u_n) متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي ℓ.

لدينا $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ و منه $\forall p; q \in \mathbb{N}$ فإن:

$(p > N \wedge q > N) \Longrightarrow |u_p - u_q| = |u_p - \ell - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

الشرط الكافي: نفرض (u_n) متتالية كوشي

أولا: من أجل $\varepsilon = 1$ فإن:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall n; q \in \mathbb{N}: (n > N_0 \wedge q > N_0) \Longrightarrow |u_n - u_q| < 1$$

و من أجل $q = N_0 + 1$ فإن:

$$\forall n \in \mathbb{N}: n > N_0 \Longrightarrow |u_n - u_{N_0+1}| < 1$$

$$\Longrightarrow \left||u_n| - |u_{N_0+1}|\right| < 1$$

$$\Longrightarrow |u_n| < |u_{N_0+1}| + 1$$

إن المجموعة $A = \{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots\dots, |u_{N_0}|, |u_{N_0+1}| + 1\}$ منتهية فهي تقبل عنصر أكبر

نرمز له بـ M، عندئذ فإن: $\forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M$ إذن (u_n) محدودة.

ثانيا: بما أن (u_n) محدودة، حسب النظرية **7.2** يمكن استخراج من المتتالية (u_n) متتالية جزئية (u_{n_k}) متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ.

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ عندئذ فإن

$\exists k_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > k_0 \Longrightarrow |u_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ و

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall p; q \in \mathbb{N}: (p > N_1 \wedge q > N_1) \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل $N = \max\{k_0, N_1\}$ فإن:

$$\forall p \in \mathbb{N}: p > N \Rightarrow \begin{cases} p > k_0 \\ n_p \geq p > N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u_{n_p} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |u_p - u_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

و منه

$$\forall p \in \mathbb{N}: p > N \Rightarrow |u_p - \ell| = |u_p - u_{n_p} + u_{n_p} - \ell| < |u_p - u_{n_p}| + |u_{n_p} - \ell| < \varepsilon.$$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ.

نتيجة 1.2:

تكون متتالية (u_n) متباعدة إذا، وفقط إذا تحقق مايلي:

$\exists \varepsilon > 0; \forall N \in \mathbb{N}; \exists p; q \in \mathbb{N}: p > N \wedge q > N \wedge |u_p - u_q| \geq \varepsilon$.

مثال01: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

لنثبت أن (u_n) متتالية متباعدة.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$u_{2n} - u_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: |u_{2n} - u_n| \geq \frac{1}{2}$$

إذا اخترنا $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، $p = 2n$ ، $q = n$ يتحقق الأتي:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*; \forall n \in \mathbb{N}^*; \exists p; q \in \mathbb{N} : p \geq n \text{ و } q \geq n \text{ و } |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

مثال02:

لتكن (u_n) متتالية حقيقية حيث: $\forall n \in \mathbb{N} : \ |u_{n+1} - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n$

أثبت أن (u_n) متتالية كوشي.

من أجل p ، $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$$|u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \cdots + u_{n+1} - u_n|$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} + \cdots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

بما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$ فإن $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \Longrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \varepsilon$.

إذًا $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}; \forall n; p \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$.

6.2 المتتاليات التراجعية:

تعريف 10.2:

ليكن $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع، حيث $f(D) \subset D$ و $\alpha \in D$.

نقول عن متتالية (u_n)، أنها متتالية تراجعية إذا كانت معرفة بإعطاء $u_0 = \alpha$ و العلاقة التراجعية:

$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n)$.

اتجاه التغير: إن دراسة رتابة المتتالية (u_n) ترد إلى دراسة رتابة التابع f، باستعمال البرهان بالتراجع يمكن البرهان على صحة النتائج التالية.

- إذا كان f متزايد فإن المتتالية (u_n) رتيبة و تكون متزايدة إذا كان $f(u_0) - u_0 \geq 0$ و متناقصة إذا كان $f(u_0) - u_0 \leq 0$.

- إذا كان f متناقص فإن إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالبة و موجبة بالتناوب أي أن (u_n) غير رتيبة في هذه الحالة.

التقارب:

قضية 3.2: نفرض أن f مستمر على D إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو نهاية ℓ من D فإن هذه النهاية هي حل للمعادلة $f(x) = x$.

البرهان:

إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ من D عندئذ فإن: $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$.

بما أن f مستمر عند ℓ فإن: $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

لدينا من جهة أخرى: $u_{n+1} = f(u_n) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \Longrightarrow \ell = f(\ell)$.

ملاحظات:

- يرد إذن البحث عن نهاية المتتالية (u_n) إلى حل المعادلة $f(x) = x$ ذات المجهول x في المجموعة D.

- إذا لم تقبل المعادلة حلول فإن المتتالية لا تقبل نهاية، أما إذا قبلت المعادلة حل أو أكثر فإن المسألة تؤول إلى دراسة إمكانية أن يكون أحد هذه الحلول هو نهاية للمتتالية (u_n).

- إذا قبلت المعادلة $f(x) = x$ حلولا فهذا لا يعني بالضرورة أن المتتالية (u_n) متقاربة.

مثال 1:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = a \geq 0$ و $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

نضع: $f(x) = \sqrt{x+2}$، $D = [-2, +\infty[$.

بما أن التابع f معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال D و $f(D) \in D$ فإن المتتالية (u_n) معرفة و رتيبة و اتجاه تغيرها تحدده إشارة الفرق $f(u_0) - u_0$.

لدينا: $f(u_0) - u_0 = f(a) - a = \sqrt{a+2} - a = \frac{-a^2+a+2}{\sqrt{a+2}+a} = \frac{(1+a)(2-a)}{\sqrt{a+2}+a}$، إذن إشارة الفرق $f(u_0) - u_0$ من إشارة $2 - a$ و المعادلة $\sqrt{x+2} = x$، تقبل حل وحيد هو $x = 2$ و منه النتائج التالية:

1) $a < 2$ المتتالية متزايدة و يمكننا إثبات وراثية هذه الخاصية (أي أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n < 2$) إذن المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2.

2) $a > 2$ المتتالية متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 2.

3) $a = 2$ المتتالية ثابتة.

إذن المتتالية متقاربة في جميع الحالات و نهايتها 2.

مثال 2:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = a > 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = (u_n)^2$.

نضع: $\forall x \in D = [0, +\infty[: f(x) = x^2$.

بما أن التابع f معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال D و $f(D) \in D$ و $f(a) - a = a^2 - a > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة و متزايدة تماما.

و المعادلة $x = x^2$، تقبل حلين هما: $x = 0$ و $x = 1$، لكن المتتالية (u_n) متباعدة لأن:

باستعمال البرهان بالتراجع نبرهن على أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = a^{(2^n)}$ ومنه فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

المحور الثالث:التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي(Fonctions réelles d’une variable réelle)

1.3عموميات

تعريف1.3:

- نسمي تابعًا حقيقيا لمتغير حقيقي، كل تطبيق f لمجموعة جزئية D من $\mathbb{R}$ في المجموعة $\mathbb{R}$. تسمىD مجموعة تعريف f .
- نسمي بيان التابع f المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^2$ والتي نرمز لها بـ Γ_fوَ المعرفة كمايلي: $\Gamma_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x \in D \wedge y = f(x)\}$ أو $\Gamma_f = \{(x;f(x)); x \in D\}$.
- نرمز بـ $f(D)$ لصورة المجموعة D حيث $f(D) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D: y = f(x)\}$.

1.1.3 التوابع المحدودة، التوابع الرتيبة:

تعريف2.3:

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ تابع $(D \subset \mathbb{R})$.

- نقول أن التابع f محدود من الأعلى (محدود من الأدنى، على الترتيب) إذا، وفقط إذا كانتالمجموعة $f(D)$محدودة من الأعلى (محدود من الأدنى، على الترتيب) أي $\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in D: f(x) \leq M$ ($\exists m \in \mathbb{R}; \forall x \in D: f(x) \geq m$، الترتيبعلى).
- نقول أن التابع f محدود إذا، وفقط إذا كان محدودًا من الأعلى و من الأسفل أي $\exists M \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in D: |f(x)| \leq M$.

نتيجة1.3:

إذا كان التابع f محدود على D فإن الجزء $f(D)$محدود في $\mathbb{R}$ ، فهو يقبل حدًا أعلى و حدًا أدنى نرمز لهما بـ $Sup_D\ f$ وَ $Inf_D\ f$ على الترتيب.

تعريف3.3:

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ تابع $(D \subset \mathbb{R})$

- نقول أن f متزايد على D (متزايد تمامًا،على الترتيب) إذا، وفقط إذا كان:

$\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.

- نقول أن f متناقص على D (متناقص تمامًا،على الترتيب) إذا، وفقط إذا كان:

$\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(\forall x; y \in D: x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$ ، على الترتيب).

- نقول أن f ثابت على D إذا، وفقط إذا كان: $\forall x; y \in D: x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

تعريف4.3:

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ تابع $(D \subset \mathbb{R})$.

نقول أنَ f يقبل قيمة عظمى محلية (قيمة صغرى محلية، على الترتيب) عند النقطة x_0 من D إذا تحقق:

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in D: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ ($|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ ، على الترتيب).

وإذا كان: $\forall x \in D: f(x) \leq f(x_0)$. ($\forall x \in D: f(x) \geq f(x_0)$ على الترتيب)

نقول أنَ f يقبل قيمة عظمى (صغرى، على الترتيب) مطلقة عند x_0.

2.3 نهاية تابع:

1.2.3 النهاية المنتهية:

تعريف5.3:

- نقول عن جزء من$\mathbb{R}$، أنه جوار للنقطة x_0 من $\mathbb{R}$ إذا احتوى على مجال مفتوح يشمل x_0 نرمز لجوار النقطة x_0 بالرمز V_{x_0}.
- نقول عن تابع f معرف في جوار V_{x_0} لـx_0،باستثناء محتمل لـ x_0، أن له نهاية $\ell(\ell \in \mathbb{R})$عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall\varepsilon > 0\ ; \exists\delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

ملاحظة: نقول أن f لا يقبل العدد ℓ كنهاية عند x_0 إذا، و فقط إذا كان:

$$\exists\varepsilon > 0\ ; \forall\delta > 0; \exists x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \text{ و } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

قضية 1.3:

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ ، فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل$]x_0 - \alpha, x_0[\ \cup\ ]x_0, x_0 + \alpha[$

مع $\alpha > 0$، تكون فيه لـ $f(x)$ نفس إشارة ℓ.

البرهان:

من أجل $\varepsilon = |\ell|$ فإنه $\exists\alpha > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < |\ell|$ و منه

$$\exists\alpha > 0; \forall x \in V_{x_0}: x \in\ ]x_0 - \alpha, x_0[\ \cup\ ]x_0, x_0 + \alpha[\ \Rightarrow \begin{cases} 2\ell < f(x) < 0\ ;\ \ell < 0 \\ 0 < f(x) < 2\ell\ ;\ \ell > 0 \end{cases}.$$

أمثلة:

1. ليكن $f: x \to 5x - 7$، أثبت بإستعمال التعريف أن: $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

بما أن f معرفة على $\mathbb{R}$ ، يمكن أخذ $V_2 = \mathbb{R}$ جوار لـ 2، ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$لدينا:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x - 7 - 3| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\ |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

إذا يكفي أخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ حتى يتحقق الأتي:

$$\forall\varepsilon > 0; \exists\delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

2. ليكن $f: x \to \frac{1}{x+1}$، أثبت بإستعمال التعريف أن: $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

بما أن f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ يمكن أخذ $V_1 = [0; +\infty[$ جوار لـ 1، ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، لدينا:

$$\forall x \in V_1: \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{|x-1|}{2}$$

يكون$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ إذا كان $\frac{|x-1|}{2} < \varepsilon$ ومنه $\left|\frac{x-1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < 2\varepsilon$.

إذًا يكفي أخذ $\delta = 2\varepsilon$ حتى يتحقق الأتي :

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_1: \ 0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

تعريف6.3:

- ليكن f تابع معرف في جوار V_{x_0} لـ x_0 من اليمين ، نقول أن f يقبل نهاية ℓ من اليمين عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: \quad 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

- ليكن f تابع معرف في جوار V_{x_0} لـ x_0 من اليسار ، نقول أن f يقبل نهاية ℓ من اليسار عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: \quad 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

نتيجة2.3:

تكون للتابع f نهاية عندx_0 إذا، وفقط إذا كان يقبل نهايتين من اليمين و من اليسار عندx_0 تكونا متساويتين.

مثال:

ليكن التابعf المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{6}{x+2} & si \quad x > 1 \end{cases}$.

أثبت أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$ وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 2$،ماذا تستنتج ؟

1. لنثبت أن:$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 2$

ليكن $V_1 =]-\infty; 1]$ جوار لـ 1 من اليسار و $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، لدينا:

$$\forall x \in V_1: \ |f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3| < \varepsilon$$
$$|3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\Leftrightarrow 0 < -x + 1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

يكفي أخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ حتى يتحقق الأتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_1: \ 0 < 1 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

2. لنثبت أن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$

ليكن $V_1 = [1; +\infty[$ جوار لـ 1 من اليمين و $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، لدينا:

$\forall x \in V_1: \ |f(x) - 2| = \frac{2|x-1|}{x+2} < \frac{2}{3}|x - 1|$ومنه

$$\frac{2}{3}|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 < x - 1 < \frac{3}{2}\varepsilon$$

إذن يكفي أخذ $\delta = \frac{3\varepsilon}{2}$ حتى يتحقق الاتي:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V:\ 0 < 1 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

الاستنتاج: بما أن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ فإن fيقبل نهاية عند 1 وهي 2.

نظرية 1.3:

إذا قبل تابع f نهاية منتهية عند x_0 فإن هذه النهاية وحيدة.

البرهان:

نفرض f يقبل نهايتين مختلفتين ℓ'و ℓ حيث $\ell > \ell'$ ، من أجل $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{2}$ فإن:

$\exists \delta_1 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow\ |f(x) - \ell| < \frac{\ell-\ell'}{2}$و منه

$$|f(x) - \ell| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x) < \frac{3\ell - \ell'}{2}$$

$\exists \delta_2 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow\ |f(x) - \ell'| < \frac{\ell-\ell'}{2}$و منه

$$|f(x) - \ell'| < \frac{\ell - \ell'}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell + 3\ell'}{2} < f(x) < \frac{\ell + \ell'}{2}$$

من أجل $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ فإن

$$\forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < \frac{\ell + \ell'}{2} \text{و} \frac{\ell + \ell'}{2} < f(x)$$

و هذا تناقض.

2.2.3 نهاية تابع باستعمال المتتاليات:

نظرية 2.3:

ليكن $f: D \to \mathbb{R}$ تابع وَ $x_0 \in D$ إن الشرطين التاليين متكافئين

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$
2. من أجل كل متتالية (x_n) حيث $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D\ \wedge\ x_n \neq x_0$ فإن:

$$(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell)$$

البرهان:

الشرط اللازم: نفرض $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ و لتكن (x_n) متتالية حيث $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D\ \wedge\ x_n \neq x_0$ و $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right)$ و لنبرهن أنَ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell\right)$.

لدينا $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ و

$$\exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |x_n - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

و منه

$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Longrightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

الشرط الكافي:نفرض الآن أنه من أجل كل متتالية (x_n) حيث $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in D\ \wedge\ x_n \neq x_0$ فإن:
$(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell)$.

و لنبرهن أن $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ نفرض أن $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$ أي أن

$\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0; \exists x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta$ و $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$ أو

$|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$ و $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ و $x \neq x_0$، و من أجل $\delta = \frac{1}{n}$ فإن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists\, x_n \neq x_0 \text{ و } x_n \in V_{x_0}:\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ و } |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$$

أي أن $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ لكن $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \ell$ وهذا تناقض.

<u>نتيجة 3.3:</u>

لإثبات أن تابع f ليس له نهاية عند x_0 يكفي إيجاد متتاليتين (x_n) وَ (x'_n) متقاربتان نحو نفس النهاية x_0 لكن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ أو نبحث عن متتالية (x_n) متقاربة نحو x_0 لكن المتتالية $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

<u>مثال:</u>

أثبت أن التابع $f: x \to \cos\frac{1}{x}$ لا يقبل نهاية عند 0

لتكن المتتاليتين (x_n) و(x'_n)حيث $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ، $x'_n = \frac{1}{2\pi n+\pi}$

لدينا من جهة : $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$

من جهة أخرى فإن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: f(x'_n) = -1\ ;\ f(x_n) = 1$

ومنه $\lim f(x'_n) = -1\ ;\ \lim f(x_n) = 1$

إذن: $\lim f(x'_n) \neq \lim f(x_n)$ أي أن f لا يقبل نهاية عند0.

<u>3.2.3 النهايات غير المنتهية:</u>

نسمي جوار لـ $+\infty$ (لـ $-\infty$،على الترتيب) كل جزء من $\mathbb{R}$ يحتوي مجال من الشكل $]a; +\infty[$ ($]-\infty; a[$،على الترتيب) حيث $a \in \mathbb{R}$ و نرمز له بـ $V_{+\infty}$ ($V_{-\infty}$، على الترتيب).

<u>تعاريف 7.3:</u>

$$(\forall \varepsilon > 0; \exists A > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell)$$

$$(\forall \varepsilon > 0; \exists A > 0; \forall x \in V_{-\infty}: x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell)$$

$$\left(\forall A > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A\right) \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty)$$

$$\left(\forall A > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A\right) \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow f(x) > A) \Leftrightarrow (\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow f(x) < -A) \Leftrightarrow (\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty)$$

$$(\forall A > 0; \exists B > 0; \forall x \in V_{-\infty}: x < -B \Rightarrow f(x) > A) \Leftrightarrow (\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty)$$

$$(\forall A>0; \exists B>0; \forall x \in V_{-\infty}: x<-B \Longrightarrow f(x)<-A) \Leftrightarrow (\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty)$$

أمثلة:

1. أثبت أن: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2$.

الدالة $x \to \frac{2x}{x-1}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ليكن $V_{+\infty}=]1\,;+\infty[$ جوار لـ $+\infty$ و $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$\forall x \in V_{+\infty}: |f(x)-2|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{|x-1|}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x-1}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{2}{\varepsilon}+1$$

إذن يكفي اختيار $B=\frac{2}{\varepsilon}+1$ حتى يتحقق الاتي:

$$\forall \varepsilon>0;\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*\,; \forall x \in V_{+\infty}: x>B \Longrightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$$

2. أثبت أن: $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{2x}{x-1}=-\infty$.

ليكن $\mathrm{V}_1=]0\,;1[$ جوار لـ 1 من اليسار وَ $A \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$\forall x \in \mathrm{V}_1: f(x)<-A \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}<-A \Leftrightarrow 2+\frac{2}{x-1}<-A$$
$$\Leftrightarrow 0>x-1>\frac{2}{-A-2}$$
$$\Leftrightarrow 0<1-x<\frac{2}{A+2}$$

إذن يكفي أخذ $\varepsilon=\frac{2}{A+2}$ حتى يتحقق الآتي:

$$\forall A>0;\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \forall x \in \mathrm{V}_1: 0<1-x<\delta \Longrightarrow f(x)<-A$$

4.2.3 نظريات على النهايات:

نظرية 3.3:

- ليكن f وَ g تابعين معرفين على نفس الجوار V_{x_0} للنقطة x_0 ، بإستثناء محتمل لـ x_0، حيث $\forall x \in \mathrm{V}_{x_0}: f(x)<g(x)$.

1. إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ وَ $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'$ فإن $\ell \le \ell'$.
2. إذا كانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.
3. إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

- إذا كانت f،g،h توابع معرفة على نفس الجوار V_{x_0} لـx_0، باستثناء محتمل لـ x_0، حيث $\forall x \in \mathrm{V}_{x_0}: h(x)<f(x)<g(x)$ و كانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=\ell$ فإن $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

البرهان:

1) نفرض $\forall x \in \mathrm{V}_{x_0}: f(x)<g(x)$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'$ وَ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و لنبرهن أن $\ell \le \ell'$.

نفرض $\ell>\ell'$، من أجل $\varepsilon=\frac{\ell-\ell'}{2}$

$$\exists \delta_1>0: 0<|x-x_0|<\delta_1 \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Longrightarrow \frac{\ell+\ell'}{2}<f(x)<\frac{3\ell-\ell'}{2}$$
$$\exists \delta_2>0: 0<|x-x_0|<\delta_2 \Longrightarrow |g(x)-\ell'|<\varepsilon \Longrightarrow \frac{3\ell'-\ell}{2}<g(x)<\frac{\ell+\ell'}{2}$$

من أجل $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ فإن

$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow g(x)<\frac{\ell+\ell'}{2}<f(x)$ و هذا تناقض لأن $\forall x \in \mathrm{V}_{x_0}: f(x)<g(x)$.

بنفس الطريقة نبرهن على باقي الحالات الأخرى.

نظرية 4.3:

إذا كان f وَ g تابعين معرفين على نفس الجوار V_{x_0} للنقطة x_0، بإستثناء محتمل لـx_0، وكانت نهايتا f وَ g عند x_0 هما ℓ ، ℓ' على الترتيب فإن نهايات التوابع: $f + g$ ، $f g$ ، λf ، $|f|$ عند x_0 هي $\ell + \ell'$، $\ell \ell'$، $\lambda\ell$، $|\ell|$،على الترتيب.

وإذا كانت $\ell' \neq 0$ وَ $\forall x \in V_{x_0}: f(x) \neq 0$ فإن نهاية التابع $\frac{1}{f}$ عند x_0 هي $\frac{1}{\ell}$.

البرهان: لنبرهن على الحالة الأخيرة

نفرض $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \neq 0$ وَ $\forall x \in V_{x_0}: g(x) \neq 0$ من أجل $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2}$ فإن

$$\exists \delta_1 > 0: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2}$$
$$\Rightarrow ||g(x)| - |\ell'|| < \frac{|\ell'|}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{|\ell'|}{2} < |g(x)| < \frac{3|\ell'|}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|\ell'|}$$

لدينا أيضا:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta_2 > 0; \forall x \in V_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

من أجل $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ فإن:

.

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - g(x)}{\ell' g(x)}\right| < \frac{2|g(x) - \ell'|}{|\ell'|^2} < \frac{2\varepsilon}{|\ell'|^2} = \varepsilon'.$$

5.2.3 معيار كوشي الخاص بالتوابع:

نظرية 5.3:

تكون للتابع f نهاية منتهية عند x_0 إذا، وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: \big(0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta\big)$$
$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

البرهان:

الشرط اللازم: لنفرض أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ إذن:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: \big(0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta\big)$$
$$\Rightarrow |f(x') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |f(x'') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و منه

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - \ell - (f(x'') - \ell)| < |f(x') - \ell| + |(f(x'') - \ell)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

الشرط الكافي: نفرض أن

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in V_{x_0}: \big(0 < |x' - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'' - x_0| < \delta\big)$$

$$\Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

و لتكن (x_n) متتالية من عناصر V_{x_0} حيث $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ و منه

مقابل العدد δ يوجد عدد طبيعي N_0 حيث $\forall n \in \mathbb{N}; n > N_0 \Longrightarrow |x_n - x_0| < \delta$ و ليكن q وp عددين طبيعيين حيث $q > N_0$ و $p > N_0$ عندئذ فإن $0 < |x_q - x_0| < \delta$ و$0 < |x_p - x_0| < \delta$ و منه فإن

$|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$ أي أن المتتالية $(f(x_n))$ كوشية و بالتالي فهي متقاربة.

لنبين الآن أن النهاية $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ مستقلة عن اختيار المتتالية (x_n).

لتكن (x_n) و (x'_n) متتاليتين حيث $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ و منه يوجد عدد طبيعي N حيث

$$\forall n > N: (0 < |x_n - x_0| < \delta \text{ و } 0 < |x'_n - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

6.2.3 مقارنة التوابع بجوار نقطة - ترميز لاندو:

ليكن f و g تابعين معرفين في جوار V_{x_0} للنقطة x_0، باستثناء محتمل لـx_0.

تعريف8.3:

نقول أنَ f مهمل أمام g عندما $x \longrightarrow x_0$، ونكتب $f = o(g)$، إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$$

تعريف9.3:

نقول أنَ g مسيطرعلى f عندما $x \longrightarrow x_0$، ونكتب $f = O(g)$، إذا كان

$$\exists k > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \le k|g(x)|$$

يسمى الرمزان o و O رمزي لاندو.

ينتج من التعريف أنه إذا لم ينعدم g على V_{x_0} فإن

$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ و $f = O(g) \Leftrightarrow$ $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ محدود في V_{x_0}.

و إذا كان $g = 1$ فإن $f = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و $f = O(1) \Leftrightarrow$ $|f(x)|$ محدود في V_{x_0}.

تعريف10.3:

ليكن f و g تابعين معرفين في جوار $V_{+\infty}$ لـ x_0 ($V_{-\infty}$ لـ x_0، على الترتيب) عندئذ فإن

($f = o(g)$ لما $x \longrightarrow +\infty$) $\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > \delta \Longrightarrow |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|)$.

($f = O(g)$ لما $x \longrightarrow +\infty$) $\Leftrightarrow$ $(\exists k > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{+\infty}: x > \delta \Longrightarrow |f(x)| \le k|g(x)|)$.

بنفس الطريقة نعرف العلاقتين $f = o(g)$ و $f = O(g)$ لما $x \longrightarrow -\infty$.

أمثلة:

1) لما $x \longrightarrow 0$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 = o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right) \text{ ، } x^2 \cos\frac{1}{x} = O(x^2) \text{ ، } x^3 = o(x^2)$$

2) لما $x \longrightarrow +\infty$:

$$x^2 = o(x^3) \text{ ، } x^2 \sin x = O(x^2) \text{ ، } \left(\frac{1}{x}\right)^4 = o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$$

<u>نظرية 6.3:</u>

1) $f = o(g) \Leftrightarrow f = gh$ حيث $h = o(1)$.

2) $f = O(g) \Leftrightarrow f = gh$ حيث $h = O(1)$.

<u>البرهان:</u> (لنبرهن على 1 مثلا)

1) **<u>الشرط اللازم:</u>** نفرض $f = o(g)$ و نبين أنَ $f = gh$ حيث $h = o(1)$.

نضع $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases}$

لدينا $f = o(g) \Leftrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \Longleftarrow 0 < |x - x_0| < \delta$:$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}$.

أولا: لنبين أنَ $f = gh$.

إذا كان $g(x) = 0$ فإن من المتباينة $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ نحصل على $f(x) = 0$ أي أنَ $f = gh$.

و إذا كان $g(x) \neq 0$ فإن $f(x) = g(x)\frac{f(x)}{g(x)}$ و منه $f = gh$.

ثانيا: لنبين أنَ $h = o(1)$ أي أن $|h(x)| \leq \varepsilon \Longleftarrow 0 < |x - x_0| < \delta$:$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}$.

إذا كان $g(x) = 0$ فإن $h(x) = 0$ و منه $|h(x)| \leq \varepsilon$.

إذا كان $g(x) \neq 0$ فإن $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ و منه $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon$ أي أنَ $|h(x)| \leq \varepsilon$.

<u>الشرط الكافي:</u> نفرض $f = gh$ و $h = o(1)$ ونبين أنَ $f = o(g)$.

لدينا $h = o(1) \Leftrightarrow |h(x)| \leq \varepsilon \Longleftarrow 0 < |x - x_0| < \delta$:$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in V_{x_0}$ و منه

$|f(x)| = |h(x)g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ أي أنَ $f = o(g)$.

بنفس الطريقة نبرهن على الخاصية 2.

<u>ملاحظة:</u> إن الخاصيتين السابقتين تختصران في الكتابة التالية.

$o(g) = g.o(1)$ و $O(g) = g.O(1)$.

<u>خواص:</u>

1) $f = O(g)$ و $h = O(g) \Longrightarrow f + h = O(g)$.

2) $f = o(g)$ و $h = o(g) \Longrightarrow f + h = o(g)$.

3) $f = o(g)$ و $h = O(1) \Longrightarrow fh = o(g)$.

4) $f = o(g)$ و $h = O(g) \Longrightarrow f + h = O(g)$.

5) $f = O(g)$ و $h = O(1) \Longrightarrow fh = O(g)$.

6) $h = O(g)$ و $f = o(g) \Longrightarrow h = o(g)$.

7) $h = o(g)$ و $f = O(g) \Rightarrow h = o(g)$.

ملاحظة: إن الخواص السابقة تختصر في الكتابة التالية.

1) $O(g) + O(g) = O(g)$.

2) $o(g) + o(g) = o(g)$.

3) $o(g)\, O(1) = o(g)$.

4) $o(g) + O(g) = O(g)$.

5) $O(g).O(1) = O(g)$.

6) $O\big(o(g)\big) = o(g)$.

7) $o\big(O(g)\big) = o(g)$.

7.2.3 التوابع المتكافئة:

تعريف 11.3:

ليكن f و g تابعين معرفين في جوار V_{x_0} للنقطة x_0، باستثناء محتمل لـx_0.

نقول أن f يكافئ g لما $x \longrightarrow x_0$ و نكتب $g \sim f$، إذا كان $f - g = o(f)$ لما $x \longrightarrow x_0$.

نتائج:

1) $f - g = o(f) \Leftrightarrow f - g = o(g)$.

2) العلاقة ~ هي علاقة تكافؤ في مجموعة التوابع المعرفة على جوار V_{x_0} للنقطة x_0، باستثناء محتمل لـx_0.

3) إذا وجد جوار V_{x_0} للنقطة x_0 بحيث لا تنعدم f و g في $\mathrm{V}_{x_0} - \{x_0\}$ فإن $f \sim g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

نظرية 7.3:

لتكن f ، g ، f_1 ، g_1 توابع معرفة في جوار V_{x_0} للنقطة x_0، باستثناء محتمل لـx_0 حيث $f \sim f_1$ و $g \sim g_1$ لما $x \longrightarrow x_0$، إذا وجدت النهاية: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ تكون أيضا موجودة و يكون لدينا

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

البرهان:

بما أن $\frac{f(x)}{g(x)}$ تقبل نهاية لما $x \longrightarrow x_0$ فإنه يوجد جوار V_{x_0} للنقطة x_0 بحيث g لا تنعدم على $\mathrm{V}_{x_0} - \{x_0\}$ و كون $g \sim g_1$ (أي أن $|g(x)| \leq \varepsilon |g_1(x)|$) فإن g_1 لا ينعدم أيضا و منه

$$\begin{cases} f \sim f_1 \\ g \sim g_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 \sim f \\ g_1 \sim g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = f\big(1 + o(1)\big) \\ g_1 = g\big(1 + o(1)\big) \end{cases} \Rightarrow \frac{f_1}{g_1} = \frac{f}{g} \frac{(1+o(1))}{(1+o(1))}.$$

و بما أن $\frac{(1+o(1))}{(1+o(1))}$ لما $x \longrightarrow x_0$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

ملاحظة: يستعمل مفهوم التوابع المتكافئة حساب النهايات خاصة إذا تعلق الأمر بإزالة حالات عدم التعيين.

أمثلة:

1) أحسب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

لدينا لما $x \to 0$ فإن $\sqrt{4+x}-2 \sim \frac{1}{2}x$ و $\sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x$ و منه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} = \frac{3}{2}.$$

2) أحسب النهاية $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{2+xe^{\frac{1}{x}}}$.

لدينا لما $x \to +\infty$ فإن $\sqrt{x^2-2x}+x \sim 2x$ و $2+xe^{\frac{1}{x}} \sim x$ و منه

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{2+xe^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x} = 2.$$

3.3 التوابع المستمرة:

تعريف12.3:

- ليكن f تابع معرف على جوار V_{x_0} للنقطة x_0 نقول أن f مستمرة عند x_0 إذا، وفقط إذا كان: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(أو $\forall\varepsilon > 0; \exists\delta > 0; \forall x \in \mathrm{V}_{x_0}: 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$)

- ليكن f تابع معرف على جوار V_{x_0} من اليمين للنقطة x_0 نقول أن f مستمرة عند x_0 من اليمين إذا وفقط إذا تحقق : $\lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$
- ليكن f تابع معرف على جوار V من اليسار للنقطة x_0 نقول أن f مستمرة عند x_0 من اليسار إذا وفقط إذا تحقق : $\lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$

نتيجة 4.3:

يكون تابع f مستمر عند x_0 إذا، وفقط إذا كان مستمرا عند x_0 من اليمين ومن اليسار.

أمثلة:

1. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\quad x = 1 \end{cases}$

$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = 2 = f(1) \Leftarrow f$ مستمر عند 1 من اليمين.

$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = -2 \neq f(1) \Leftarrow f$ غيرمستمر عند 1 من اليسار.

ومنه فإن f غير مستمر في النقطة $x_0 = 1$.

تعريف 13.3:

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$.

- نقول أن التابع f مستمر على المجال I إذا وفقط إذا كان مستمر عند كل نقطة من هذا المجال،نرمز لمجموعة التوابع المستمرة على مجال I بـ $\mathrm{C}(I)$.
- نقول أن التابع f مستمر بانتظام على المجال I،إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in I: |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

واضح من التعريف أن كل تابع مستمر بانتظام على المجال I فهو مستمر على هذا المجال (العكس غير صحيح دوما)

1.3.3 التوابع المستمرة على مجال مغلق:

نظرية 8.3: كل تابع مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ يكون مستمر بانتظام على هذا المجال.

البرهان: نفرض أن f مستمر و غير مستمر بانتظام على $[a,b]$، أي أن

$$\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0: \exists x', x'' \in [a,b]: |x' - x''| < \delta \text{ و } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

نضع $\delta = \frac{1}{n} > 0$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و منه

$$\exists \varepsilon > 0; \forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x'_n, x''_n \in [a,b]: |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ و } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

إن المتتالية (x'_n) محدودة، حسب نظرية بولزانو- فاير شتراس إذن يمكن استخراج منها متتالية جزئية $\left(x'_{n_k}\right)$ متقاربة نحو $\bar{x}$ من $[a,b]$ و بما أن $\forall k \in \mathbb{N}: \left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ فإن المتتالية الجزئية $\left(x''_{n_k}\right)$ متقاربة بدورها نحو $\bar{x}$ و كون f مستمر عند $\bar{x}$ فإن $\lim_{k\to\infty} \left(f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$ و هذا تناقض لأن

$\forall k \in \mathbb{N}: \left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon$.

نظرية 9.3: كل تابع مستمر على المجال المغلق $[a\,;b]$ يكون محدود على هذا المجال.

البرهان: نفرض أن f مستمر و غير محدود على $[a,b]$ ، أي أن $\forall n \in \mathbb{N}; \exists x_n \in [a,b]: |f(x_n)| > n$

إن المتتالية (x_n) محدودة،يمكن استخراج منها متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ متقاربة نحو $\bar{x}$ من $[a,b]$ و بما أن f مستمر عند $\bar{x}$ فإن $\lim_{k\to\infty}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| = |f(\bar{x})|$ وهذا تناقض لأن $\forall k \in \mathbb{N}: |f(n_k)| > n_k \geq k$ أي أن $\lim_{k\to\infty}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| = +\infty$.

نظرية 10.3: يدرك كل تابع مستمر على المجال المغلق $[a\,;b]$، مرة على الأقل حديه الأعلى و الأدنى أي أنه يوجد على الأقل x_1 وَ x_2 من المجال $[a\,;b]$ حيث: $f(x_1) = \sup_{x\in[a\,;b]} f(x)$ وَ $f(x_2) = inf_{x\in[a\,;b]} f(x)$.

البرهان: ليكن $M = \sup_{x\in[a\,;b]} f(x)$ نفرض أن $\forall x \in [a\,;b]: f(x) \neq M$ أي أن

$\forall x \in [a\,;b]: f(x) < M$ عندئذ يكون التابع g حيث $\forall x \in [a\,;b]: g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ مستمر و موجب تماما على المجال $[a\,;b]$ و بالتالي فهو محدود ومنه $\exists m > 0; \forall x \in [a\,;b]: g(x) \leq m$ أي أن

$\forall x \in [a\,;b]: f(x) \leq M - \frac{1}{m}$ و هذا يناقض الفرض $M = \sup_{x\in[a\,;b]} f(x)$.

نظرية 11.3: ليكن f تابع مستمر على المجال $[a;b]$، إذا كانت إشارتي $f(a)$ وَ $f(b)$ مختلفتين فإنه توجد على الأقل نقطة c من المجال $]a\,;b[$ تحقق: $f(c) = 0$.

البرهان:

نفرض $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ و لتكن المجموعة $\mathrm{E} = \{x \in [a;b]/f(x) > 0\}$، إنَ $\mathrm{E} \neq \emptyset$ لأنَ $b \in \mathrm{E}$.

نضع $\inf \mathrm{E} = c$ لنبرهن أنَ $f(c) = 0$.

نفرض $f(c) \neq 0$ بما أن f مستمر عند c فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل $I =]c - \alpha; c + \alpha[\subset [a;b]$ حيث $\alpha > 0$ ، يكون فيه لـ $f(x)$ و $f(c)$ نفس الإشارة (أنظر القضية 1.3).

- إذا كان $f(c) > 0$ فإن $\forall x \in I: f(x) > 0$، بوضع $x = c - \frac{\alpha}{2}$ فإن $f\left(c - \frac{\alpha}{2}\right) > 0$

و منه $c - \frac{\alpha}{2} \in \mathrm{E}$ و بالتالي فإن $c - \frac{\alpha}{2} \geq c = \inf \mathrm{E}$ وهذا تناقض.

- إذا كان $f(c) < 0$ فإن $\forall x \in I: f(x) < 0$.

لدينا $\inf \mathrm{E} = c \Longrightarrow \exists x_0 \in \mathrm{E}: c + \alpha > x_0 \geq c \Longrightarrow x_0 \in I$ ومنه $f(x_0) < 0$

و هذا تناقض أيضا لأن $f(x_0) > 0$ كون أنّ $x_0 \in \mathrm{E}$.

إذن $f(c) = 0$.

نظرية 12.3:

ليكن f تابع مستمر على المجال $[a\,;b]$، من أجل كل عدد حقيقي λ محصور بين$f(a)$ وَ $f(b)$فإنه يوجد على الاقل عدد حقيقي c من المجال $[a\,;b]$ يحقق: $f(c) = λ$.

البرهان:

1) إذا كان $λ = f(a)$ يكفي أخذ $c = a$، أما إذا كان $λ = f(b)$ يكفي أخذ $c = b$.

2) إذا كان $λ \neq f(b)$ و$λ \neq f(a)$ نبين أن التابع $g(x) = f(x) - λ$ يحقق شروط النظرية 9.3 على المجال $[a\,;b]$.

قضية 2.3:

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$، f تابع حقيقي.

إذا كان التابع f مستمرعلى I فإن صورة المجال I بالتابع f هو مجال من $\mathbb{R}$ أي أن المجموعة $f(I)$ هي مجال من $\mathbb{R}$.

البرهان:

ليكن $y_1; y_2$ من $f(I)$ حيث $y_1 \leq y_2$ إذن يوجد على الأقل عنصرين $x_1; x_2$ من المجال I حيث $y_1 = f(x_1)$ و$y_2 = f(x_2)$، حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه من أجل كل عنصر y حيث $y_1 \leq y \leq y_2$ يوجد على الأقل عنصر x محصور بين x_1 وx_2 (أي $x \in I$) حيث $y = f(x)$ ومنه $y \in f(I)$.

2.3.3 التمديد بالاستمرار:

تعريف 14.3:

ليكن f تابع معرف على مجال I، باستثناء النقطة x_0 من I، نفرض أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

إن التابع $\tilde{f}$ المعرف بـ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq x_0 \\ \ell & ; x = x_0 \end{cases}$ يتطابق مع f على $I - \{x_0\}$ وهو مستمر عند x_0، يسمى التابع $\tilde{f}$ امتدادلـ f بالإستمرار عند x_0.

مثال:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ ، بما أن $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

فإنه يمكن تمديد f بالإستمرار عند 0 إلى التابع $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x \neq 0 \end{cases}$

3.3.3 التوابع الرتيبة على مجال:

نظرية 13.3:

ليكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ تابعا رتيبا، حيث $-\infty < a < b < +\infty$ عندئذ فإن النهايتين$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)$ ،$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)$ موجودتين (منتهيتين أو غير منتهيتين) و يكون:

$$-\infty \le \inf_{x\in]a,b[} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) \le \lim_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x) \le +\infty$$

إذا كان f متزايد و

$$-\infty \le \inf_{x\in]a,b[} f(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) \le \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x) \le +\infty$$

إذا كان f متناقص.

البرهان:

نفرضf متزايد و $\sup_{x\in]a,b[} f(x) = M < +\infty$ و لنبين أن $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) = M$.

لدينا $M \le f(\alpha) < M-\varepsilon :[a,b] \ni \alpha\exists ;0 < \forall\varepsilon$، بوضع $\delta = b-\alpha > 0$و بما أن f متزايد فإن

$$b-\delta < x < b \Rightarrow \alpha < x < b \Rightarrow f(\alpha) < f(x) \Rightarrow M-\varepsilon < f(\alpha) < f(x) \le M < M+\varepsilon$$

إذن $\forall\varepsilon > 0; \exists\delta > 0: -\delta < x-b < 0 \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon$ أي أن $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) = M$.

البرهان يكون بنفس الطريقة من أجل $M = +\infty$ و كذالك نبرهن على أن $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$ في حالة f متناقص.

نتائج:

1) ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعا رتيبا، عندئذ فإن:

ا) $f(a) \le \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) \le \lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) \le f(b)$ إذا كان f متزايد.

ب) $f(b) \le \lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x) \le \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) \le f(a)$ إذا كان f متاقص.

2) ليكن Iمجال كيفي من $\mathbb{R}$ حداه b و a $(a < b)$ و ليكن $f:I\to\mathbb{R}$ تابعا متزايدا عندئذ من أجل كل x_0حيث $a < x_0 < b$فإن:

ا) $-\infty < f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0) < +\infty$.

ب) $f(a) \le f(a+0) < +\infty$ إذا كان $a\in I$.

ج) $-\infty < f(b-0) \le f(b)$إذا كان $b\in I$.

ملاحظة:نحصل على نتيجة مماثلة للنتيجة 2 في حالة f متناقص على المجال I.

نظرية 14.3:

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$و $f:I\to\mathbb{R}$ تابع رتيب عندئذ يكون f مستمر على I إذا، و فقط إذا كان $f(I)$ مجال.

البرهان:

الشرط اللازم: حسب القضية 2.3 إذا كان f مستمر فإن $f(I)$ مجال.

الشرط الكافي: نفرض f متزايد و $f(I)$ مجال و نثبت أن f مستمر على I.

نفرض العكس و لتكن x_0 نقطة تقطع لـ f، بما أن f متزايد و استنادا الى النتيجة 2 فإن إحدى العلاقتين التاليتين على الأقل محققة: $f(x_0)<f(x_0+0)$ ، $f(x_0-0)<f(x_0)$.

نفرض مثلا أن $f(x_0)<f(x_0+0)$ في هذه الحالة فإنه من أجل كل x من I:

$x>x_0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0+0)$ و $x\leq x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$ أي أن $]f(x_0),f(x_0+0)[\cap f(I)=\emptyset$.

ليكن $x_1\in I$ حيث $x_1>x_0$ عندئذ فإن $f(x_0)\in f(I)$ و $f(x_1)\in f(I)$ و منه $[f(x_0),f(x_1)]\subset f(I)$ (لأن $f(I)$ مجال) وبما أن $f(x_1)>f(x_0+0)$ فإن $]f(x_0),f(x_0+0)[\subset[f(x_0),f(x_1)]$ أي أن $]f(x_0),f(x_0+0)[\cap f(I)\neq\emptyset$ و هذا تناقض.

4.3.3 التابع العكسي لتابع مستمر ورتيب تمامًا:

نظرية 15.3:

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ وَ $f:I\to\mathbb{R}$ تابع

إذا كان f مستمر ورتيب تمامًا على المجال I فإن f يكون تقابلا من المجال I في المجال $f(I)$ و بالتالي فهو يقبل تابعا عكسيا نرمز له بـ f^{-1}، يكون بدوره معرفًا ومستمرًا و رتيبًا تماما على المجال $f(I)$ وبنفس اتجاه تغير f ولدينا:
$\forall x\in I;\forall y\in f(I): y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \ldots.(*)$.

ملاحظة: تستعمل الخاصية $(*)$ في إعطاء عبارة التابع f^{-1} إذا أمكن ذلك.

البرهان:

- بما أن f رتيب تماما على I فهومتباين و من تعريف المجموعة $f(I)$ فهو غامر إذن f تقابل.

- بما أن f مستمر فإن $f(I)$ مجال و لما كان f رتيب تماما فإن f^{-1} كذالك و منه $I=f^{-1}(f(I))$ إذن $f^{-1}(f(I))$ مجال و f^{-1} رتيب تماما ينتج من النظرية 12.3 أن f^{-1} مستمر على $f(I)$.

مثال1: ليكن التابع f المعرف على المجال $I=[0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^2+3$، إن f مستمر ورتيب تمامًا(متزايد تمامًا) على المجال $I=[0;+\infty[$ حيث $f(I)=[3;+\infty[$ حسب النظرية (13.3) فإن f تقابل من المجال $[0;+\infty[$ في المجال $[3;+\infty[$ فهو يقبل تابع عكسي f^{-1} ولدينا:

$$\forall x\in[0;+\infty[;\forall y\in[3;+\infty[: y=x^2+3\Leftrightarrow x^2=y-3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\sqrt{y-3} \\ \vee \\ x=-\sqrt{y-3}<0 (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

إذن $f^{-1}(y)=\sqrt{y-3}$، بعد استبدال x بـ y فإن التعريف النهائي للتطبيق العكسي f^{-1} يكون كالأتي:

$$\begin{aligned} f^{-1}: [3;+\infty[&\to[0;+\infty[\\ x&\to\sqrt{x-3} \end{aligned}$$

تطبيق*:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & si\ x\leq 1 \\ \frac{-x+1}{2x-1} & si\ x>1 \end{cases}$

1. أثبت أن f مستمر ورتيب تماما على $\mathbb{R}$.
2. استنتج أن f يقبل تابع عكسي f^{-1}، عبرعن العبارة $f^{-1}(x)$ بدلالة x.

حل مختصر:

1. تؤول دراسة استمرار f على $\mathbb{R}$ إلى دراسة استمراره عند 1

لدينا: $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} (x) = f(1) = 0$

يمكن التحقق بسهولة منالنتائج التالية: f متناقص تماما على $I = \mathbb{R}$، $f(I) =]\frac{-1}{2}; +\infty[$،

$$f^{-1}:]\frac{-1}{2}; +\infty[\to \mathbb{R} \ : \ f^{-1}(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{x} & si \quad x \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{2x+1} & si \dfrac{-1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

<u>4.3 التوابع القابلة للاشتقاق:</u>

<u>1.4.3 العدد المشتق-الدالة المشتقة:</u>

<u>تعريف 15.3:</u>

- ليكن f تابع معرف على جوار V_{x_0} للنقطة x_0 نقول أن التابع f قابل للإشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذاكانت النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة عند x_0 تسمى هذه النهاية بالعدد المشتق للتابع f عند x_0 ونرمز له بـ $f'(x_0)$ نستعمل أحيانا الرموز $Df(x_0)$، $\frac{df}{dx}(x_0)$، $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}$ حيث $y = f(x)$.

<u>ملاحظات:</u>

1. بوضع $x - x_0 = h$ فإن النهاية السابقة تكتب $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
2. يكون التابع f قابلا للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد تابع ε معرف على جوار V_{x_0} للنقطة x_0 حيث

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ و } \forall x \in V_{x_0}: f(x) - f(x_0) = \big(f'(x_0) + \varepsilon(x)\big)(x - x_0).$$

- إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة عند x_0 من اليمين (من اليسار، على الترتيب) نقول أن التابع f يقبل الإشتقاق عند x_0 من اليمين(من اليسار،على الترتيب)، ونرمز لها بالرمز $f'(x_0+0)$($f'(x_0-0)$، على الترتيب)

<u>نتيجة 5.3:</u>

يكون التابع f قابل للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان $f'(x_0-0)$ وَ $f'(x_0+0)$ موجودتين وكان $f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$.

<u>مثال:</u>

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 1|$ لندرس قابلية اشتقاق f عند النقطة $x_0 = 1$

لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -2$$

التابع f يقبل الاشتقاق من اليمين وكذلك من اليسار عند 1 لكنه لا يقبل الاشتقاق عند 1 لأن:

$f'(1+0) \neq f'(1-0)$.

<u>التفسير الهندسي:</u>

-إذا كان التابع f قابل للإشتقاق عند x_0 فإن تمثيله البياني (C_f) يقبل مماسًا (T)في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه $f'(x_0)$ وتكون للمستقيم(T) معادلة من الشكل : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

-قابلية الاشتقاق من اليمين واليسار تفسر بوجود أنصاف مماسات.

-ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ إذا قبل التابع f الإشتقاق عند كل نقطة من المجال I نقول أن f يقبل الإشتقاق على المجال I.

-يسمى التابع الذي يرفق بكل عدد حقيقي x من المجال I العدد المشتق $f'(x)$ بـ التابع المشتقونرمز له بـf'.

نظرية 16.3:

إذا كان التابع f قابلا للاشتقاق عند x_0 فإنه يكون مستمرا عند x_0.

البرهان:ليكن f قابل للاشتقاق عند x_0 عندئذ يوجد جوار V_{x_0} حيث

$$\forall x\in V_{x_0}: f(x)-f(x_0)=\big(f'(x_0)+\varepsilon(x)\big)(x-x_0) \text{ و } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$$

و منه $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}\big(f'(x_0)+\varepsilon(x)\big)(x-x_0)=0$ أي أن fمستمرا عند x_0.

2.4.3 المشتقات ذات الرتب العليا:

ليكنf تابع قابل للإشتقاق على المجال Iإذا قبل f' بدوره الإشتاق على المجال Iفإننا نرمز لمشقته بـ f'' ويسمى المشتق الثاني وبنفس الطريقة نعرف المشتقات المتتابعة للتابع f كمايلي:

$$f^{(0)}(x)=f(x) \text{ و } \forall n\in\mathbb{N}:\ f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$$

حيث نرمز للمشتق من الرتبة n للتابع f بـ $f^{(n)}$ كما تستعمل أيضا الرموز $\frac{d^ny}{dx^n}$، D_ny، $y^{(n)}$، ......

مثال: (أثبت بالتراجع أن)

$$1.\ \ cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right) \text{ ، } \quad 2.\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ \left[\frac{1}{x}\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

تعريف 16.3:

- نقول عن تابع f معرف على المجال I أنه من الصنف C^n إذا، وفقط إذا كان قابلا للإشتقاق إلى المرتبة n وكان المشتق $f^{(n)}$ مستمرا على I نرمز لمجموعة التوابع من الصنف C^n على المجال I بـ $C^n(I)$.
- لدينا تعريفا:$C^0(I)=C(I)$.
- $C^\infty(I)$ يرمز لـ مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق إلى مالانهاية على المجال.

3.4.3 عمليات على التوابع القابلة للاشتقاق:

نظرية 17.3:

- ليكن f و g توابع قابلة للإشتقاق على مجال I عندئذ فإن التوابع αf، $f+g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ تقبل الإشتقاق على I ولدينا :

$$(\alpha f)'=\alpha f' \quad , \quad (f+g)'=f'+g'$$

$$(fg)'=f'g+fg' \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

البرهان: لنبرهن على الحالة الأخيرة.

ليكن x_0 من Iلدينا:

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}}{g(x)g(x_0)}.$$

و لما $x\to x_0$ فإن $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\to f'(x_0)$ و $\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}\to g'(x_0)$ و $f(x)\to f(x_0)$ و $g(x)\to g(x_0)$.

أي أن $\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}\longrightarrow\frac{f'(x_0)g(x_0)-(x_0)fg'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

نظرية 18.3: المشتقة النونية لـ جداء تابعين (دستور ليبنتز)

$$\forall n\in\mathbb{N}:(fg)^{(n)}=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\,f^{(n-p)}g^{(p)}$$

البرهان: نستعمل البرهان بالتراجع و بملاحظة أن $\forall n,p\in\mathbb{N}\ (\ 1\le p\le n-1\ ):C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$.

نظرية 19.3:

ليكن f وَ g توابع حيث f قابل للإشتقاق على المجال I وَ g قابل للإشتقاق على المجال $f(I)$ عندئذ فإن التابع $g\circ f$ يكون قابلا للإشتقاق على المجال I وَ $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.

البرهان: ليكن x_0 من I بما أن f يقبل الاشتقاق عند x_0 و gيقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ فإن:

$$f(x)-f(x_0)=\big(f'(x_0)+\varepsilon_1(x)\big)(x-x_0)$$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon_1(x)=0$ و

$$g(y)-g(y_0)=\big(g'(y_0)+\varepsilon_2(y)\big)(y-y_0)$$ مع $\lim_{y\to y_0}\varepsilon_2(y)=0$ أو

من أجل $y=f(x)$ فإن $y\to y_0$ عندما $x\to x_0$ (لأن f مستمر عند x_0) و منه

$$g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)=\Big(g'\big(f(x_0)\big)+\varepsilon_2(y)\Big)\big(f'(x_0)+\varepsilon_1(x)\big)(x-x_0)$$

$$\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0}=\Big(g'\big(f(x_0)\big)+\varepsilon_2(y)\Big)\big(f'(x_0)+\varepsilon_1(x)\big)$$

لما $x\to x_0$ فإن $y\to y_0$ و منه $\varepsilon_1(x)\to 0$ و $\varepsilon_2(y)\to 0$ إذن $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\to g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$.

مثال:

ليكن التابع h المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\cos\big(3\sqrt{x}+x^2\big)$

التابع h هو مركب التابعين : $f(x)=3\sqrt{x}+x^2$ وَ $g(x)=\cos x$ بهذا الترتيب حيث $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}+2x$ وَ $g'(x)=-sin\ x$ ومنه فإن:

$$h'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)=-\sin\big(3\sqrt{x}+x^2\big)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}+2x\right)$$

$$h'(x)=-\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}+2x\right)\sin\big(\sqrt{x}+x^2\big)$$

نظرية 20.3:

إذا كان f تابع مستمر و رتيب تماما على المجال Iو يقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 من Iحيث $f'(x_0) \neq 0$ فإن التابع العكسي f^{-1} يقبل الإشتقاق عند النقطة $y_0 = f(x_0)$ من $f(I)$ ولدينا :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}.$$

<u>البرهان:</u>

نفرض أن f يقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 حيث $f'(x_0) \neq 0$ ولتكن النقطة y_0 من $f(I)$ حيث $y_0 = f(x_0)$، من أجل كل y من $f(I)$يوجد عدد حقيقي وحيد x من I حيث $y = f(x)$ و بما أن f مستمر و رتيب على Iفإن f^{-1}مستمر و رتيب على $f(I)$ استنادا إلى النظرية (13.3) ينتج من ذلك أن $\forall y \in f(I): y \neq y_0 \Rightarrow x \neq x_0$و لما $y \longrightarrow y_0$فإن $x \longrightarrow x_0$.

نضع $g = f^{-1}$عندئذ فإن $x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$و $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$و منه

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>مثال1:</u>

ليكن التابع fالمعرف على المجال $I = [0, +\infty[$ بـ $f(x) = x^n$ (حيث $n \geq 2$)

إن التابع f مستمرومتزايد تماما على المجال Iو منه فإن f يقبل تابع عكسي f^{-1} معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال $f(I) = [0, +\infty[$ يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{.}$ (أو $(\,.\,)^{\frac{1}{n}}$) و يسمى تابع الجذر النوني وبما أن:

$$\forall x \in]0, +\infty[: (x^n)' = nx^{n-1} \neq 0$$

فإن التابع f^{-1} يقبل الاشتقاق عند كل عدد y من المجال $]0, +\infty[$ حيث $y = x^n$ و لدينا:

$$\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\left((y)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

إذن التابع$x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$معرف و مستمر و متزايد تماما على المجال $[0, +\infty[$ و يقبل الاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

و لدينا: $\forall x \in]0, +\infty[: \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

<u>مثال2:</u>

ليكن التابع المعرف على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بـ $h(x) = \tan x$

إن التابع h مستمرومتزايد تماما على المجال I حيث $h(I) = \mathbb{R}$ومنه فإن التابع h يقبل تابع عكسي h^{-1} نرمز له بـ "$arctan$" وهو معرف ومستمر ومتزايد تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[: (\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x \neq 0.$$

إذن التابعh^{-1} يقبل الإشتقاق عند كل قيمة y من $\mathbb{R}$حيث $y = \tan x$ و لدينا:

$$\forall y \in \mathbb{R} : (\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

باستبدال x بـ y نحصل على النتيجة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R}: (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

<u>نظرية 21.3:</u>

إذا كان لـ f قيمة حدية عند النقطة x_0 وكان f يقبل الاشتقاق عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

البرهان:

إن وجود $f'(x_0)$ يستلزم وجود $f'(x_0+0)$ و $f'(x_0-0)$.

و بفرض $f(x_0)$ قيمة عظمى أي أنه يوجد جوار V_{x_0} للنقطة x_0 حيث يكون $\forall x \in V_{x_0}: f(x) \leq f(x_0)$ و منه

من أجل $x > x_0$ فإن $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ و من أجل $x < x_0$ فإن $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ و منه

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0) = f'(x_0) \geq 0$$ و

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0) = f'(x_0) \leq 0$$

إذن $f'(x_0) = 0$.

4.4.3 نظرية التزايدات المنتهية – التزايدات المنتهية المعممة:

نظرية 22.3: (رول)

إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a;b]$ وقابل للإشتقاق على المجال $]a;b[$ وكان $f(a) = f(b)$ فإنه توجد على الأقل نقطة c من المجال $]a;b[$ تحقق $f'(c) = 0$.

التفسير الهندسي:

توجد على الأقل نقطة من التمثيل البياني للتابع f فاصلتها c حيث $a < \text{c} < \text{b}$ يكون المماسفيها للبيان موازيا لمحور الفواصل.

البرهان:

- إذا كان f ثابت على المجال $[a;b]$ فإن $\forall x \in]a;b[: f'(x) = 0$.

- إذا كان f غير ثابت على المجال $[a;b]$ و بما أنه مستمر في هذا المجال فهو يقبل على الأقل قيمة حدية تختلف عن القيمتين $f(a)$ و $f(b)$ و لتكن هذه القيمة $f(\text{c})$ حيث $a < \text{c} < \text{b}$ و كون f قابل للاشتقاق عند c (لأنه قابل للاشتقاق على المجال $]a;b[$) فإن $f'(c) = 0$.

نظرية 23.3: (لاغرانج)

إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a;b]$ وقابل للإشتقاق على المجال $]a;b[$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $]a;b[$ يحقق :

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (أو تكتب : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

البرهان:

يكفي التحقق من أن التابع g المعرف على المجال $[a;b]$ بـ $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$، يحقق شروط النظرية **19.3**.

إذن يوجد على الأقل عدد c من المجال $]a\,;b[$ يحقق $g'(c) = 0$ و منه نحصل على العلاقة $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ملاحظة:

تستعمل هذه النظرية في الحسابات التقريبية وفي إثبات الكثير من المتباينات.

مثال:

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن $\forall x \geq 0 : \ln(x+1) \leq x$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0;x]$ حيث $x \geq 0$ نجد:

$$\forall x \geq 0 : \ln(x+1) - \ln 1 = f'(c)(x-0) \; ; \; f(x) = \ln(x+1)$$

$$\ln(x+1) = f'(c)x = \frac{1}{1+c} \cdot x \quad ; \quad 0 < c < x$$

لدينا $c > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+c} x \leq x$

ومنه $\forall x \geq 0 \; : \; \ln(x+1) \leq x$

<u>نظرية 24.3</u>: (كوشي)

إذا كان f وَ g تابعين مستمران على المجال $[a\,;b]$ وقابلين للإشتقاق على المجال $]a\,;b[$ وكان g' لا ينعدم على المجال $]a\,;b[$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $]a\,;b[$ يحقق $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>البرهان:</u>

لدينا $\left(\forall x \in]a\,;b[: g'(x) \neq 0\right) \Longrightarrow \left(g(b) \neq g(a)\right)$ و منه يكفي التحقق من أن التابع φ المعرف على المجال $[a;b]$ بـ $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$، يحقق شروط النظرية **19.3**.

إذن يوجد على الأقل عدد cمن المجال $]a\,,b[$ يحقق $\varphi'(c) = 0$ و منه نحصل على العلاقة $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>نظرية 25.3</u>: (قاعدة لوبيتال)

إذا كان f وَ g تابعين مستمران على جوار V_a للنقطة a وقابليين للإشتقاق على $V - \{a\}$ عندئذ إذا قبلت النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ نهاية عند a فإن النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ تقبل نفس النهاية عند a ، بمعنى آخر:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$$

وبالخصوص إذا كان $f(a) = g(a) = 0$ فإن النتيجة السابقة تكتب :

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

<u>البرهان:</u>

من أجل $x > a$ نطبق النظرية **22.3**على المجال $[a,x]$ نحصل على:

$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ حيث $c \in]a,x[$

عندما $x \overset{>}{\to} a$ فإن $c \overset{>}{\to} a$ ومنه $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \ell$ و بالتالي فإن $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$.

من أجل $x < a$ نطبق النظرية **22.3**على المجال $[x,a]$ نحصل على:

عندما $x \overset{<}{\to} a$ فإن $c \overset{<}{\to} a$ ومنه $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \ell$ و بالتالي فإن $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$

إذن عندما $x \longrightarrow a$ فإن $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$.

ملاحظات:

1. تبقى النتيجة السابقة صحيحة في حالة f وَ g غير معرفين عند a لكن يقبلان نهايتين محدودتين
2. يمكن تطبيق النتيجة 6.3 عدة مرات متتابعة.
3. يمكن تطبيق النتيجة 6.3 في الحالات التالية:

أ. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ وَ $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

ب. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وَ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

جـ. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ وَ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

أمثلة:

1. حساب $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1} = \frac{1}{4}$$

2. حساب $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

3. حساب $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^2}{x^3-x+1}$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^2}{x^3-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2x}{3x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} e^x \frac{e^x+1}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

4. حساب $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln\frac{x-1}{x+2}$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\infty.0$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln\frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+3} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = (\text{تعح} \frac{0}{0})$$

و منه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\frac{x-1}{x+2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{(x+2)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = -3$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x+3} \ln\frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+3} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = 2\times(-3) = -6.$$

المحورالرابع: التوابع الأولية (fonctions élémentaires)

1.4 التوابع الدائرية العكسية:(fonctions circulaires réciproques)

1.1.4 التابع: « arcsin »

تعريف 1.4: ليكن التابع f المعرف على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $f(x) = \sin x$، بما أن f مستمر و متزايد تماما على المجال I فهو يقبل تابع عكسي f^{-1} معرف و مستمر ومتزايد تماما على المجال $f(I) = [-1;1]$ يرمز للتابع f^{-1} بالرمز arcsin.

لدينا: $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \forall y \in [-1;1] : y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$

المشتقة: باستعمال نظرية مشتق التابع العكسي لدينا:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: (\sin x)' = \cos x \neq 0$$

و منه فإن التابع $f^{-1} = \arcsin$ يقبل الاشتقاق عند كل عدد y من المجال $]-1;1[$حيث $y = \sin x$ و لدينا:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

إذن

$$.\forall x \in]-1;1[: (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.1.4 التابع: « arccos »

تعريف 2.4: ليكن التابع g المعرف على المجال $I = [0;\pi]$ بـ $g(x) = \cos x$، بما أن g مستمر و متناقص تمامًا على المجال I فهو يقبل تابع عكسي g^{-1} معرف و مستمر ومتناقص تماما على المجال $g(I) = [-1;1]$، يرمز للتابع g^{-1} بالرمز arccos.

لدينا: $\forall x \in [0;\pi]; \forall y \in [-1;1] : y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$

المشتقة: بنفس الطريقة السابقة يمكن البرهان على أن:

$$.\forall x \in]-1;1[: (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.1.4 التابع: « arctan »

تعريف 3.4: ليكن التابع h المعرف على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $h(x) = \tan x$، بما أن h مستمر ومتزايد تماما على المجال I فهو يقبل تابع عكسي h^{-1} معرف ومستمر ومتزايد تمامًا على المجال $h(I) = \mathbb{R}$ يرمز للتابع h^{-1} بالرمز arctan.

لدينا: $.\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[; \forall y \in \mathbb{R} : y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$

المشتقة: يبرهن على أن:

$$.\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4.1.4 التابع« arccotan »

تعريف 4.4: ليكن التابع k المعرف على المجال $I = [0;\pi]$ بـ $k(x) = \text{cotan}\, x$، بما أن k مستمر ومتناقص تمامًا على المجال I فهو يقبل تابع عكسي k^{-1} معرف ومستمر ومتناقص تماما على المجال $k(I) = \mathbb{R}$ يرمز للتابع k^{-1} بالرمز arccotan.

لدينا: $x = \text{arccotan}\, y \Leftrightarrow y = \cot x : \forall y \in \mathbb{R} ; \forall x \in]0;\pi[$.

المشتقة: يبرهن على أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\text{arccotan}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

5.1.4 خواص:

1. $\forall x \in [-1;1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in [-1\,;1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\forall x \in [-1;1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} : \text{arc}\tan x + \text{arc cotan}\, x = \frac{\pi}{2}$.
5. $\forall x > 0 : \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
6. $\forall x < 0 : \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

البرهان:

1) نضع $\forall x \in [-1\,;1]: f(x) = \arcsin x + \arccos x$

$$\forall x \in]-1;1[: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

إذن التابع f ثابت على المجال $[-1\,;1]$ و منه $\forall x \in [-1\,;1]: f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

2) لدينا $\forall x \in [-1;1] : \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ و منه $\cos(\arcsin x) \geq 0$ و بالتالي فإن:

$$\forall x \in [-1;1]: \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\left(\sin(\text{arc}\sin x)\right)^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

6) نضع $\forall x < 0 : f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$

$$\forall x < 0 : f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$

إذن التابع f ثابت على المجال $]-\infty\,;0[$ و منه $\forall x \in]-\infty\,;0[: f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

ملاحظة: إن خواص التوابع العكسية للتوابع الدائرية تستنتج من خواص التوابع الدائرية، على سبيل المثال فإن الخاصية **1** تستنتج من الخاصية: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ و هو ما سنوضحه لاحقا.

لدينا $\alpha \in [0,\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ، بوضع $\cos\alpha = x$ فإن $\alpha \in [0,\pi] \Leftrightarrow x \in [-1;1]$ و منه

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha = \text{arc}\sin x \ldots\ldots (*)$$

و لدينا من جهة أخرى $\cos\alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \arccos x$ بالتعويض في $(*)$ نحصل على الخاصية **1**.

2.4 التوابع الزائدية وتوابعها العكسية(fonctions hyperboliques et leurs inverse)

1.2.4 التوابع الزائدية:(fonctions hyperboliques)

- التابع "hyperboliques **cosinus** " يرمز له بـ ch معرف بـ $\forall x \in \mathbb{R}: \text{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

- التابع "sinus hyperboliques " يرمز له بـ sh معرف بـ $\forall x \in \mathbb{R}: \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- التابع "tangente hyperboliques" يرمز له بـ th معرف بـ $\forall x \in \mathbb{R}: \mathrm{th}\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$
- التابع "cotangente hyperboliques" يرمز له بـ coth معرف بـ $\forall x \in \mathbb{R}^*: \coth x = \frac{ch\, x}{sh\, x}$

2.2.4 خواص: من أجل كل عددين حقيقيين y, x لدينا:

1. $ch\,(-x) = ch\, x$ ، $sh\,(-x) = -sh\, x$.
2. $\mathrm{ch}^2 x - sh^2 x = 1$ ،$1 - th^2\, x = \frac{1}{ch^2 x}$.
3. $ch(x+y) = ch\, x\, ch\, y + sh\, x\, sh y$.
4. $sh(x+y) = ch\, x\, sh\, y + sh\, x\, ch\, y$
5. $th(x+y) = \frac{th\, x + th\, y}{1 + th\, x\, th\, y}$.
6. $(ch\, x)' = sh\, x$ ،$(sh\, x)' = ch\, x$ ،$(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$.

3.2.4 التوابع الزائدية العكسية:(fonctions hyperboliques réciproques)

- ليكن التابع f المعرف على المجال$I = [0; +\infty[$ بـ $f(x) = \mathrm{ch}\, x$، بما أنfمستمر ومتزايد تمامًا على المجالIفهو يقبل تابع عكسي f^{-1} مستمر ومتزايد تماما علىالمجال $f(I) = [1; +\infty[$ نرمز للتابع f^{-1} بالرمز "arg ch" .

  لدينا: $\forall x \geq 0; \forall y \geq 1: y = ch\, x \Leftrightarrow x = \mathrm{arg\, ch}\, y$ و منه

$$y = ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \\ x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \end{cases}$$

  و منه $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ (لأن $\ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \leq 0$).

  إذن $\forall x \geq 1 : \mathrm{arg\, ch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

  المشتقة: $\forall x \in]1; +\infty[: (\mathrm{arg\, ch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
- ليكن التابع g المعرف على المجال$I = \mathbb{R}$ بـ $g(x) = \mathrm{sh}\, x$، بما أنgمستمر ومتزايد تمامًا على المجال $I = \mathbb{R}$ فهو يقبل تابع عكسي g^{-1} مستمر ومتزايد تماما على المجال $g(I) = \mathbb{R}$، نرمز للتابع g^{-1} بالرمز "arg sh" حيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{arg\, sh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

  المشتقة: $\forall x \in \mathbb{R} : (\mathrm{arg\, sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- ليكن التابع h المعرف على المجال$I = \mathbb{R}$ بـ $h(x) = \mathrm{th}\, x$، بما أنhمستمر ومتزايد تمامًا على المجالIفهو يقبل تابع عكسي h^{-1} مستمر ومتزايد تماما على المجال$h(I) =]-1; 1[$، نرمز للتابع h^{-1} بالرمز "arg th" حيث:

  $\forall x \in]-1; 1[: \mathrm{arg\, th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

  المشتقة: $\forall x \in]-1; 1[: (\mathrm{arg\, th}\, x)' = \frac{1}{1 - x^2}$.

جزء
التمارين

تمارين حول المحور الأول (الأعداد الحقيقية)

تمرين01:

أثبت مايلي:

1) $\forall x; y \in \mathbb{R}: \ ||x| - |y|| \leq |x+y|$.

2) $\forall x; y \in \mathbb{R}: \ \forall \varepsilon > 0: xy \leq \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} y^2$ (تسمى هذه المترجحة بمترجحة كوشي مع ε).

3) $(\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$.

4) $\forall x; y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

5) $(|x+y| = |x| + |y|) \Leftrightarrow (xy \geq 0)$.

*6) $\forall x_1; x_2 \ldots; x_n; y_1; y_2; \ldots\ldots; y_n \in \mathbb{R}: (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$.

(تسمى هذه المتراجحة بمتراجحة كوشي شوارتز).

تمرين02:

1/ اثبت ما يلي:

أ/ $\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ب) $\forall x; y \in \mathbb{R}: (x < y) \Rightarrow (E(x) \leq E(y))$

جـ/* $\forall x; y \in \mathbb{R}: E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

د/ $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq E(x) + E(-x) \leq 0$.

هـ/ $Min\,(x; y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \ ; Max(x; y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

و-*/ $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x \in \mathbb{R}: E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

2/ حدد إن أمكن *Min , Max , inf, Sup* لكل مجموعة من المجموعات التالية:

أ/ $A = \left\{\frac{2n+1}{n} \ ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ جـ*/ $C = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ ; n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

ب/ $B = \left\{\frac{1}{x^2+1}; x \in \mathbb{R}\right\}$ د* / $D = \left\{-2 < x + \frac{1}{2x} < 2 \ ; x \in \mathbb{R}^*\right\}$

تمرين03:

1)) أثبت أنَ:

أ) إذا كان العدد الطبيعي n ليس مربعًا تامًا فإن العدد$\sqrt{n}$ غير ناطق.

ب) إذا كان $x \notin \mathbb{Q}$ و $r \in \mathbb{Q}$ فإنَ: $r + x \notin \mathbb{Q}$.

جـ) إذا كان $x \notin \mathbb{Q}$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ فإنَ: $rx \notin \mathbb{Q}$.

د) هل العدد $\sqrt{15} + \sqrt{12}$ ناطق(علل).

*2) لتكن المجموعة A المعرفة مكايلي: $A = \{1 < x < \sqrt{8} \ ; x \in \mathbb{Q}\}$

أثبت أنَ A تقبل حدا أدنى ولا تقبل حدا أعلى في $\mathbb{Q}$.

تمرين04:

1) لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين و محدودتين في $\mathbb{R}$ ، أثبت أنَ :

أ) $(E \subseteq F) \Rightarrow (InfF \leq InfE \leq SupE \leq SupF)$.

ب) $Sup(E \cup F) = Max\{SupE, SupF\}$.

جـ*) $Inf(E \cup F) = Min\{InfE, InfF\}$.

2) نضع $-F = \{-x; x \in F\}$ و $E - F = \{x - y; x \in E \text{ و } y \in F\}$.

أثبت أنَ:

أ) $Sup(E - F) = SupE - InfF$.

ب) $Inf(E - F) = InfE - SupF$.

جـ*) $Sup(-F) = -InfF$.

د*) $Inf(-F) = -SupF$.

3) نفرض $E \subset \mathbb{R}_+^\star$ ، نضع $\frac{1}{E} = \left\{\frac{1}{x}; x \in E\right\}$ ، أثبت أنَ :

أ) $Inf\,\frac{1}{E} = \frac{1}{SupE}$.

ب*) إذا كان $InfE \neq 0$ فإنَ $Sup\,\frac{1}{E} = \frac{1}{InfE}$.

تمرين05*:

أثبت أنَ:

1) $\forall x; y; z \in \mathbb{R}_+^\star (: x + y + z = 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9\right)$.

2) $\forall x; y \in \mathbb{R}: \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

3) المعادلة $x^3 - x + 1 = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Q}$.

4) العدد $\frac{\ln 5}{\ln 6}$ غير ناطق.

5) $\forall x; y \in \mathbb{R}: E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$.

6) $\forall n \in \mathbb{N}: E\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) = E\left(\sqrt{4n+2}\right)$.

حلول تمارين المحور الأول

تمرين01:

أثبت مايلي:

1) $\forall x \in \mathbb{R}: |x| = |x+y-y| \leq |x-y| + |-y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x+y|$

$\forall y \in \mathbb{R}: |y| = |y+x-x| \leq |y-x| + |-x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x+y|$

ومنه $\forall x; y \in \mathbb{R} : -|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$

أو $\forall x; y \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.

2) $\forall a; b \in \mathbb{R}: (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

من أجل$0 < \varepsilon$ بوضع $y \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = b$ و $a = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon 2}}$ نحصل على المتباينة :

$$\forall x; y \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : xy \leq \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} y^2$$

3)نستعمل البرهان بالعكس النقيض

يكفي إثبات أنَ: $(x \neq 0) \Rightarrow \big(\exists \varepsilon > 0: |x| \geq \varepsilon\big)$.

إنَ القضية $\big(\exists \varepsilon > 0: |x| \geq \varepsilon\big)$ صحيحة ، يكفينا اختيار $\varepsilon = |x|$.

4) لدينا $|a+b| \leq |a| + |b|$و$|a-b| \leq |a| + |b|$: $\forall a; b \in \mathbb{R}$.

ومنه $|a+b| + |a-b| \leq 2|a| + 2|b|$.

بوضع $b = \frac{x-y}{2}$ و $a = \frac{x+y}{2}$ نحصل على المتباينة المطلوبة.

5) لدينا$(xy \geq 0) \Leftrightarrow (|x+y|^2 = (|x| + |y|)^2) \Leftrightarrow (|x+y| = |x| + |y|)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2|xy|)$$

$$\Leftrightarrow xy = |xy|$$

$$\Leftrightarrow xy \geq 0$$

تمرين02:

1/ أ) بوضع $x = \varepsilon$ و $y = 1$ في مسلمة أرخميدس $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \forall y \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}^*: y < nx)$

نحصل على $\varepsilon n > 1 > 0 : {}^*\exists n \in \mathbb{N} ; 0 < \forall \varepsilon$ و منه المتباينة المطلوبة.

ب) لدينا $(E(x) \leq x < y) \Leftarrow (x < y) :\forall x; y \in \mathbb{R}$ و بما أنَ $E(y)$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي y فإنَ $E(x) \leq E(y)$.

د/ بوضع $y = -x$ في المتباينة جـ) نحصل على :

ومنه $\forall x \in \mathbb{R}: E(x) + E(-x) \leq E(0) \leq E(x) + E(-x) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq E(x) + E(-x) \leq 0$ أو $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq -E(x) - E(-x) \leq 1$

هـ/ لدينا $\begin{cases} Max(x;y)=\frac{x+y+|x-y|}{2} \\ Min\,(x;y)=\frac{x+y-|x-y|}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=Max(x;y)+Min\,(x;y) \\ |x-y|=Max(x;y)-Min\,(x;y) \end{cases}$

2/ حدد إن أمكن *Min , Max , inf, Sup* لكل مجموعة من المجموعات التالية:

أ/ $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*: 3\geq 2+\frac{1}{n}>2$

بما أنَ 3 حاد من الأعلى للمجموعة Aو $3\in A$ فإنَ $MaxA=SupA=3$

لدينا 2 حاد من الأسفل للمجموعة A و $2\notin A$،لنبرهن أنَ $infA=2$

حسب مسلمة أرخميدس فإن $\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists n\in\mathbb{N}^*:1<\varepsilon n$ و منه

$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists n\in\mathbb{N}^*: \varepsilon+2>\frac{2n+1}{n}$ أو $\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists a\in A: \varepsilon+2>a$

ب/لدينا $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2\geq 0\Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$.

بما أنَ 1 حاد من الأعلى للمجموعة B و $1\in B$ فإنَ $MaxB=SupB=1$.

لدينا 0 حاد من الأسفل للمجموعة B و $0\notin B$،لنبرهن أنَ $infB=0$.

علينا إثبات أنَ: $\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists a\in B: \varepsilon+0>a$ أو $\forall\varepsilon>0; \exists x\in\mathbb{R}: \varepsilon+0>\frac{1}{x^2+1}$.

لدينا من جهة أخرى $x^2>\frac{1}{\varepsilon}-1 \Leftrightarrow \varepsilon>\frac{1}{x^2+1}$ ومنه

- إذا كان $\varepsilon\geq 1$ يكفي اختيار $x\in\mathbb{R}^*$.

- إذا كان $\varepsilon<1$ فإنَ $\left(x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\text{أو}x<-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right)\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}-1$ في هذه الحالة يكفي اختيار x من إحدى المجالين $\left]\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1},+\infty\right[$ أو $\left]-\infty,-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right[$.

تمرين03:

1) نفرض n عدد طبيعي ليس مربعا تاما أي أنَ: $\forall m\in\mathbb{N}: n\neq m^2$ و نبرهن بالخلف أنَ $\sqrt{n}$ عدد غير ناطق.

نفرض $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ حيثq,p عددان طبيعيان غير معدومان و أوليان فيما بينهما.

لدينا

$$\sqrt{n}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow p^2=nq^2$$

$$\Rightarrow q^2\backslash p^2$$

$$\Rightarrow q^2=1$$

$$\Rightarrow p^2=n$$

أي أنَ n مربع تام وهذا يناقض الفرض.

ب) نفرض $x\notin\mathbb{Q}$ و$r\in\mathbb{Q}$ ونبرهن بالخلف أنَ: $r+x\notin\mathbb{Q}$.

نفرض $r+x\in\mathbb{Q}$ ولدينا $-r\in\mathbb{Q}$ ومنه $-r+r+x\in\mathbb{Q}$ أي أنَ $x\in\mathbb{Q}$ وهذا يناقض الفرض

جـ) بنفس الطريقة

د) العدد $\sqrt{12}+\sqrt{15}$ غير ناطق

نفرض $\sqrt{12}+\sqrt{15}\in\mathbb{Q}$ ومنه $\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)^2=27+2\sqrt{180}\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض لأنَ

180 ليس مربعا تاما وبالتالي: $\sqrt{180}\notin\mathbb{Q}$ ومنه $27+2\sqrt{180}\notin\mathbb{Q}$.

تمرين04:

1) أ) لدينا $\forall x\in F: x\geq InfF$ وبما أنَ $E\subseteq F$ فإنَ $\forall x\in E: x\geq InfF$أي أنَ العدد $InfF$ حاد أدنى للمجموعة E وبما أنَ $InfE$ هو أكبر الحواد الدنيا للمجموعة E فإنَ $InfF\leq InfE$.

لدينا $\forall x\in F: x\leq SupF$ وبما أنَ $E\subseteq F$ فإنَ $\forall x\in E: x\leq SupF$ أي أنَ العدد $SupF$ حاد أعلى للمجموعة E وبما أنَ $SupE$ هو أصغر الحواد العليا للمجموعة E فإنَ $SupE\leq SupF$.

إذا $(E\subseteq F)\Rightarrow(InfF\leq InfE\leq SupE\leq SupF)$.

ب) لدينا $x\in F$ أو $x\in E \Leftrightarrow x\in E\cup F$ ومنه $x\leq SupF$ أو $\forall x\in E\cup F: x\leq SupE$ ومنه $\forall x\in E\cup F: x\leq Max\{SupE,SupF\}$ إذا $Sup(E\cup F)\leq Max\{SupE,SupF\}$.

من جهة أخرى

$$\begin{cases}E\subseteq E\cup F\Rightarrow SupE\leq Sup(E\cup F)\\ F\subseteq E\cup F\Rightarrow SupF\leq Sup(E\cup F)\end{cases}\Rightarrow Max\{SupE,SupF\}\leq Sup(E\cup F)$$

و منه $Sup(E\cup F)=Max\{SupE,SupF\}$.

2) أ)
$$SupE=m\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in E: x\leq m\ \ldots\ldots\ldots(1)\\ \forall\varepsilon>0;\exists a\in E: a\geq m-\frac{\varepsilon}{2}\ \ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

$$InfF=n\Leftrightarrow\begin{cases}\forall y\in F: y\geq n\\ \forall\varepsilon>0;\exists b\in F: b\leq n+\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall y\in F: -y\leq -n\ \ldots\ldots\ldots(3)\\ \forall\varepsilon>0;\exists b\in E: -b\geq -n-\frac{\varepsilon}{2}\ \ldots\ldots\ldots(4)\end{cases}$$

بالجمع بين(1) و (3) وكذلك بين (2) و (4) نحصل على:

$$\begin{cases}\forall x\in E;\forall y\in F: x-y\leq m-n\\ \forall\varepsilon>0;\exists a\in E;\exists b\in F: a-b\geq m-n-\varepsilon\end{cases}$$

ومنه $Sup(E-F)=n-m=SupE-InfF$.

جـ) نضع $E=\{0\}$ في الخاصية أ) نحصل على:

$Sup(\{0\}-F)=Sup\{0\}-InfF$ ومنه $Sup(-F)=-InfF$

(لأنه حسب تعريف $E-F$ فإنَ $\{0\}-F=-F$).

3) أ) لدينا $\forall x\in E: x\leq SupE\Leftrightarrow\frac{1}{x}\geq\frac{1}{SupE}$ أي أنَ $\forall\frac{1}{x}\in\frac{1}{E}:\frac{1}{x}\geq\frac{1}{SupE}$ وبما أن $Inf\frac{1}{E}$،حسب التعريف ،هو أكبر الحواد الدنيا للمجموعة $\frac{1}{E}$ فإنَ $Inf\frac{1}{E}\geq\frac{1}{SupE}$......... (*).

لدينا من جهة أخرى: $\forall \frac{1}{x} \in \frac{1}{E}: \frac{1}{x} \geq Inf\frac{1}{E}$ أو $\forall x \in E: x \leq \frac{1}{Inf\frac{1}{E}}$ لكن $SupE$ هو أصغر الحواد العليا للمجموعة E

إذا $SupE \leq \frac{1}{Inf\frac{1}{E}}$ أو $Inf\frac{1}{E} \leq \frac{1}{SupE}$......... (**).

من (*) و (**) نستنتج أنَ: $Inf\frac{1}{E} = \frac{1}{SupE}$.

تمارين حول المحور الثانى(المتتاليات الحقيقية)

تمرين01:

أدرس رتابة المتتاليات التالية:

$$*f_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ ، } k_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ، } (\propto\in\mathbb{R})w_n=\propto n+(-1)^n \text{ ، } v_n=\frac{\sqrt{n+1}}{2n} \text{ ، } *u_n=\frac{3n+4}{2n-1}$$

(بالنسبة للمتتاليتين (k_n) و (f_n) نستعمل متراجحة برنولي $\forall n\in\mathbb{N};\forall a>-1:(1+a)^n\geq 1+na$)

تمرين02:

أحسب نهاية كل متتالية من المتتاليات التالية:

$$(|a|<1\,;|b|<1)\ *\ c_n=\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \text{ ، } b_n=\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n^2+n} \text{ ، } a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2^n+2(-1)^n}$$

$$.g_n=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n} \text{ ، } (a\in\mathbb{R})*f_n=\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^n \text{ ، } (\,p\in\mathbb{N}^*)*e_n=\sqrt[n]{n^p} \text{ ، } d_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\text{،}$$

تمرين03:

1) باستعمال الحصر أحسب نهاية كل متتالية من المتتاليات التالية:

أ)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}: u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ ب) $(x\in\mathbb{R})(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}: v_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)$

جـ) $.(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}: w_n=\frac{n!}{n^n}$

2) مستعملًا التعريف أثبت أن:

أ) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$ ب) $\lim\frac{n^2-1}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$ جـ)* $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$

د) $(a>1)\ \lim\ a^n=+\infty$ هـ)* $\lim\ \frac{2n-1}{n+3}=2$ و) $.\lim\ \frac{2^n+(-1)^n}{2^n}=1$

3) أثبت أن المتتالية (u_n)متباعدة في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $u_n=(-1)^n\frac{n+2}{n}$، ب)* $u_n=sin\left(\frac{n^2+1}{4n}\pi\right)$

تمرين04:

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0=1$ وَ $.\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$

1) أثبت أنَ $.\forall n\in\mathbb{N}: u_n\geq 1$

2) نرمز بـ a للحل الموجب للمعادلة $x=1+\frac{1}{x}$

أ) أثبت أنَ $\forall n\in\mathbb{N}:\ |u_{n+1}-a|\leq\frac{1}{a}|u_n-a|$ وأنَ $.\forall n\in\mathbb{N}: |u_n-a|\leq\frac{1}{a^n}|u_0-a|$

ب) ماذا تستنتج؟

تمرين05:

1) أثبت أنه إذا كانت المتتاليتين الجزئيتين (u_{2n})وَ(u_{2n+1}) متقاربتين نحو ℓ فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة نحو ℓ.

2) **(تطبيق1)** لتكن (u_n) متتالية حيث: $\forall p\in\mathbb{N}^*;\forall n\in\mathbb{N}^*: 0\leq u_{n+p}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$

أثبت أنَ (u_n) متقاربة نحو 0.

3) **(تطبيق2)** لتكن (v_n) متتالية متناقصة و متقاربة نحو 0، ولتكن المتتالية (S_n) المعرفة كما يلي:

$S_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i v_i$.

أثبت أنَ المتتاليتين الجزئيتين (S_{2n}) و (S_{2n+1}) متجاورتان، ماذا تستنتج ؟

(التطبيق2 هو برهان لنظرية ليبنتز في السلاسل العددية).

<u>تمرين06:</u>

ليكن a،b عددين حقيقيين حيث $0 < a < b$.

نعرف المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) كمايلي:

$u_0 = a$، $v_0 = b$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n}$.

أثبتما يلي:

1) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$.

2) المتتاليتين (u_n) وَ (v_n)رتيبتان.

3) $\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}: v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$، ماذا تستنتج ؟

<u>تمرين07:</u>

1) لتكن (u_n) متتالية حيث : $\forall n \in \mathbb{N}: |u_{n+1} - u_n| \leq a^n$ حيث $(0 < a < 1)$

أثبت أن (u_n)متتالية كوشية.

2*) لتكن (v_n) متتالية حيث: $(0 < K < 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*: |v_{n+1} - v_n| \leq K|v_n - v_{n-1}|$ ، أثبت أن (v_n)متتالية كوشية.

<u>تمرين08*:</u>

ليكن α عدد حقيقي و $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية الحقيقية المعرفة بـ $u_1 = \alpha$و

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2}u_n + \frac{2(n^2+n+1)}{(n+1)^2}$$

1) أ) أثبت أن المتتالية (u_n) رتيبة ومحدودة ب) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$(نرمز لهذه النهاية بـ ℓ).

2) أ) أوجد علاقة بسيطة بين $u_{n+1} - \ell$ وَ $u_n - \ell$ ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n و α.

<u>تمرين09*:</u>

1) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$متتاليتين حيث $\forall n \in \mathbb{N}^*: v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

أثبت ما يلي:

أ) إذا كانت (u_n) رتيبة فإنَ (v_n) رتيبة و لها نفس اتجاه تغير (u_n).

ب) إذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ فإنَ (v_n)متقاربة نحو ℓ.

2) لتكن $a_1, a_2 \dots\dots, a_m$ ، أعداد حقيقية موجبة ليست كلها معدومة حيث $m \in \mathbb{N}^*$.

أثبت أنَ $\max\limits_{1\leq i\leq m} a_i = \lim\limits_{n\to\infty}({a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n)^{\frac{1}{n}}$.

تمارين المحور الثاني حلول

تمرين01:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{\sqrt{n+2}}{2n+2}-\frac{\sqrt{n+1}}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}\right)\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}\right)\left(-\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2}\right))<0$$

$$w_{n+1}-w_n=(\propto(n+1)+(-1)^{n+1})-(\propto n+(-1)^n)=\propto-2(-1)^n$$

$$=\begin{cases}\propto-2 & si\quad n=2k\\ \propto+2 & si\quad n=2k+1\end{cases}$$

* إذا كان $\propto\leq 2$ فإنَ $\propto+2\leq 0$ و $\propto-2<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: w_{n+1}-w_n\leq 0$.

* إذا كان $\propto\geq 2$ فإنَ $\propto+2>0$ و $\propto-2\geq 0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: w_{n+1}-w_n\geq 0$.

* إذا كان $-2<\propto<2$ فإنَ (w_n)ليست رتيبة.

$$\frac{k_{n+1}}{k_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{n+1}{n}\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\geq\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)$$

$$\geq\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\geq 1$$

تمرين02:

$$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2^n+2(-1)^n}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n}\Rightarrow \lim a_n=+\infty$$

$$b_n=\frac{\frac{n}{2}(1+2n-1)}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+n}\Rightarrow\lim(b_n)=1$$

$$\lim(\ln d_n)=\lim\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)=1\Rightarrow\lim(d_n)=e$$

$$g_n=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}=\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}\Rightarrow\lim(g_n)=2$$

تمرين03:

ب) $(x\in\mathbb{R}))(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}: v_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*;\forall k\in\{1,2,3,\dots\dots,n\}: E(kx)\leq kx<E(kx)+1$ و منه

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*;\forall k\in\{1,2,3,\dots\dots,n\}: kx-1<E(kx)\leq kx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{n}{2}(x-1+nx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{n}{2}(x+nx)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{x-2}{2n}+\frac{x}{2} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{x}{2n}+\frac{x}{2}$$

بما أنَ $\lim\left(\frac{x-2}{2n}+\frac{x}{2}\right) = \lim\left(\frac{x}{2n}+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ فإنَ $\lim\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right) = \frac{x}{2}$.

جـ) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}: w_n = \frac{n!}{n^n}$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \{2,3,\dots\dots,n\}: n \geq k$

و منه $\prod_{k=2}^{n}(n) \geq \prod_{k=2}^{n}(k)$ أو $n^{n-1} \geq n!$

إذا $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ أي أنَ $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq w_n \leq \frac{1}{n}$ و بما أنَ $\lim\frac{1}{n} = 0$ فإنَ $\lim w_n = 0$..

2) <u>التعريف</u>: $(\lim\ u_n = l) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\right)$

أ) $\lim \quad \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 0$.

لدينا $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

ليكن $\varepsilon > 0$ حيث $|u_n - 0| < \varepsilon$

$$|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$$

بما أنَ $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ يكفي أخذ $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ و لدينا $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$

إذا يكفي اختيار $\mathrm{N} = E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right)+1$ حتى تكون القضية

$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon\right)$ صحيحة.

ب) $\lim\ \frac{n^2-1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$

ليكن $\varepsilon > 0$ حيث $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$، لدينا $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+2}{2n^2+n} < \varepsilon$

بما أنَ $\frac{n+2}{2n^2+n} < \frac{4n+2}{2n^2+n} = \frac{2}{n}$ يكفي أخذ $\frac{2}{n} < \varepsilon$ و لدينا $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$، إذا يكفي اختيار $\mathrm{N} = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1$.

د) $\lim\ a^n = +\infty$ $(a > 1)$

<u>التعريف</u>: $(\lim\ u_n = +\infty) \Leftrightarrow (\forall A > 0\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n > \mathrm{N} \Rightarrow u_n > A)$

بما أنَ $a > 1$ نضع $a = 1+\propto$ حيث $\propto > 0$، حسب متباينة برنولي فإنَ $\forall n \in \mathbb{N}: a^n = (1+\propto)^n \geq 1+n\propto$

ليكن $A > 0$ حيث $u_n > A$.

لدينا $u_n > A \Leftrightarrow a^n > A$ و بما أنَ $\forall n \in \mathbb{N}: a^n \geq 1+n\propto$ يكفي أخذ $1+n\propto > A$ ومنه

$$1+n \propto > A \Leftrightarrow n > \frac{A-1}{\propto}$$

إذا يكفي أخذ $\mathrm{N}=E\left(\left|\frac{A-1}{\propto}\right|\right)+1$ أو $\mathrm{N}=E\left(\left|\frac{A-1}{a-1}\right|\right)+1$

و) $\lim \frac{2^n+(-1)^n}{2^n}=1$.

حسب متباينة برنولي فإنَ $\forall n \in \mathbb{N}: 2^n=(1+1)^n \geq 1+n$ أو $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n}$.

ليكن $\varepsilon > 0$ حيث $|u_n-1|<\varepsilon$، لدينا $|u_n-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}<\varepsilon$

بما أنَ $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n}$ يكفي أخذ $\frac{1}{1+n}<\varepsilon$ و لدينا $\frac{1}{1+n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$، إذا يكفي اختيار $\mathrm{N}=E\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|\right)+1$.

3) لإثبات أن متتالية (u_n)متباعدة يكفي استخراج منها متتالية جزئية متباعدة أو استخراج متتاليتين جزئيتين منها متقاربتين لكن لهما نهايتين مختلفتين.

أ) $u_n=(-1)^n \frac{n+2}{n}$.

لتكن المتتاليتين الجزئيتين (u_{2n})و (u_{2n+1}) حيث $\forall n \in \mathbb{N}: u_{2n+1}=-\frac{2n+3}{2n+1}$و$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_{2n}=\frac{2n+2}{2n}$.

لدينا $\lim u_{2n+1}=-1$و $\lim u_{2n}=1$ إذا $\lim u_{2n} \neq \lim u_{2n+1}$ ومنه فإن المتتالية (u_n) متباعدة.

<u>تمرين04:</u>

1) نفرض $u_0=1 \geq 1$ و $u_n \geq 1$ و نبرهن أنَ $u_{n+1} \geq 1$.

لدينا $2 \leq 1+\frac{1}{u_n} < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{u_n} < 0 \Rightarrow u_n \geq 1$ إذا $u_{n+1} \geq 1$.

2) الحل الموجب للمعادلة $x=1+\frac{1}{x}$ هو $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ لاحظ أنَ $a>1$.

أ) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: \ |u_{n+1}-a|=\left|1+\frac{1}{u_n}-\left(1+\frac{1}{a}\right)\right|=\frac{1}{au_n}|u_n-a| \leq \frac{1}{a}|u_n-a|$.

$P(0): |u_0-a| \leq |u_0-a| \Leftrightarrow |u_0-a| \leq \frac{1}{a^0}|u_0-a|$محققة.

نفرض $\forall n \in \mathbb{N}: \ |u_n-a| \leq \frac{1}{a^n}|u_0-a|$ و نبرهن أنَ $|u_{n+1}-a| \leq \frac{1}{a^{n+1}}|u_0-a|$.

لدينا $|u_{n+1}-a| \leq \frac{1}{a}|u_n-a| \Rightarrow |u_{n+1}-a| \leq \frac{1}{a}\frac{1}{a^n}|u_0-a \leq \frac{1}{a^{n+1}}|u_0-a|$

ب) <u>الاستنتاج</u>: بما أنَ $\forall n \in \mathbb{N}: 0<|u_n-a| \leq \frac{1}{a^n}|u_0-a|$ و $\lim \frac{1}{a^n}|u_0-a|=0$ فإنَ $\lim |u_n-a|=0$ ومنه نستنتج أنَ $\lim u_n=a$.

<u>تمرين05:</u>

1) $\left(\forall \varepsilon>0; \begin{cases}\exists \mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}: n>\mathrm{N}_1 \Rightarrow |u_{2n}-\ell|<\varepsilon \\ \exists \mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}: n>\mathrm{N}_2 \Rightarrow |u_{2n}-\ell|<\varepsilon\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\lim u_{2n}=\ell \text{ و } \lim u_{2n+1}=\ell\right)$.

باختيار $\mathrm{N}=\max(2\mathrm{N}_1, 2\mathrm{N}_2+1)$ليكن n عدد طبيعي حيث $n>\mathrm{N}$.

- إذا كان $n=2k$ فإنَ $n>\mathrm{N} \geq 2\mathrm{N}_1 \Rightarrow 2k>2\mathrm{N}_1 \Rightarrow k>\mathrm{N}_1$ ومنه فإنَ

$.n > \mathrm{N} \Rightarrow k > \mathrm{N}_1 \Rightarrow |u_{2k} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

- إذا كان $n = 2k + 1$ فإنَ $k > \mathrm{N}_2 \Leftarrow 2k + 1 > 2\mathrm{N}_2 + 1 \Leftarrow n > \mathrm{N} \geq 2\mathrm{N}_2 + 1$ ومنه فإنَ

$.n > \mathrm{N} \Rightarrow k > \mathrm{N}_2 \Rightarrow |u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

إذا $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}: n > \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$ (حيث $\mathrm{N} = \max(2\mathrm{N}_1, 2\mathrm{N}_2 + 1)$).

2) **(تطبيق1)** (u_n) متتالية حيث: $\forall p \in \mathbb{N}^*; \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$

بوضع $p = n$ ثمَ $p = n + 1$ على التوالي في المتباينة السابقة نحصل على $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2}{n}$ و

$\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ و بما أنَ $\lim \frac{2}{n} = 0$ و $\lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 0$ فإنَ

$\lim\ u_{2n+1} = \lim\ u_{2n} = 0$ و منه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0.

3) **(تطبيق2)** (v_n) متتالية متناقصة و متقاربة نحو 0، و (S_n)معرفة كما يلي: $S_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i v_i$

<u>أولا</u>: بما أنَ (v_n) متتالية متناقصة فإنَ

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i v_i - \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i v_i = \sum_{i=2n+1}^{2n+2}(-1)^i v_i = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+3}(-1)^i v_i - \sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i v_i = \sum_{i=2n+2}^{2n+3}(-1)^i v_i = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0$$

<u>ثانيا</u>: بما أنَ (v_n) متتالية متقاربة نحو 0 فإنَ

$$\lim\,(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim\ v_{2n+1} = 0$$

إذا المتتاليتين (S_{2n}) و (S_{2n+1}) متجاورتان.

، نستنتج أنَ المتتالية (S_n) متقاربة.

<u>تمرين06:</u>

1) $0 < u_0 < v_0 \Leftrightarrow 0 < a < b$

نفرض $0 < u_n < v_n$ و نبرهن أنَ $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n} > 0$

و من جهة أخرى $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2} > 0$ إذا $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$

$.\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) > 0$

3) $.\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

4) $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (b - a) \Leftrightarrow b - a \leq (b - a)$ محققة.

نفرض $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$ و نبرهن أنَ $.v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$

$.v_{n+1}-u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$ و منه $v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n-u_n) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(b-a)$

5) بما أنَ $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n}(b-a)=0$ فإنَ $\lim (v_n-u_n)=0$

نستنتج أنَ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين07:

1) $\forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}: \left|u_{n+p}-u_n\right| = \left|u_{n+p}-u_{n+p-1}+u_{n+p-1}-u_{n+p-2}+\cdots+u_{n+1}-u_n\right|$

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \le \left|u_{n+p}-u_{n+p-1}\right|+\left|u_{n+p-1}-u_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|u_{n+1}-u_n\right|$$

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \le a^{n+p-1}+a^{n+p-2}+\cdots+a^{n+1}+a^n = a^n\frac{1-a^p}{1-a} \le \frac{a^n}{1-a}$$

لدينا $a^{n+p-1}+a^{n+p-2}+\cdots+a^{n+1}+a^n = a^n\frac{1-a^p}{1-a} \le \frac{a^n}{1-a}$ و منه $.\left|u_{n+p}-u_n\right| \le \frac{a^n}{1-a}$

بما أنَ $0<a<1$ فإنَ $\frac{a^n}{1-a} \longrightarrow 0$ إذا $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}: n>\mathrm{N} \Rightarrow \frac{a^n}{1-a}<\varepsilon$ ومنه

$.\forall \varepsilon>0; \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}: n>\mathrm{N} \Rightarrow \left|u_{n+p}-u_n\right|<\varepsilon$

تمارين حول المحورين الثالث والرابع (التوابع الحقيقية والتوابع الأولية)

تمرين 01: حدد ميدان تعريف التابع f في كل حالة من الحالات التالية:

1°) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ، *2°) $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$ ، 3°) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ ، *4°) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{6-x}}$ ،

5°) $f(x)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$ ، *6°) $f(x)=\sqrt{1-x}+2\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}$ ، 7°) $f(x)=\frac{x^2+1}{E(x)}$ ،

8°) $f(x)=\frac{1}{\ln(1-x)}+\sqrt{2+x}$ ، *9°) $f(x)=\ln(-\ln(x^2-5x+5))$ ، 10°) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

تمرين 02: باستعمال التعريف أثبت أنَ:

$\lim_{x\to3}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{4}{5}$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$ ، $\lim_{x\to1}\frac{x+2}{(x-1)^2}=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}=-\infty$.

* $\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x+2}=2$ ، * $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2-3x}=2$ ، * $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{2x^2-x-2}{x^2-x}=-\infty$ ، * $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+1}{1-3x}=+\infty$.

تمرين 03: أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ ، * $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$ ،

* $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-1}\right)$ ، $\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ ، * $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$ ، $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{E(x)+1}$.

تمرين 04: بين أن الدالة f لا تقبل نهاية عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1°) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ و $x_0=0$ ، *2°) $f(x)=\cos x$ و $x_0=\infty$ ، *3°) $f(x)=x-E(x)$ و $x_0=\infty$.

4°) $f=v\circ u$ و $x_0=0$ حيث $v(x)=\begin{cases}1\ , & x=0\\ 0\ , & x\neq0\end{cases}$ و $u(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

تمرين 05: هل يمكن تمديد التابع f بالاستمرار عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

1°) $f(x)=\frac{x^3+5x+6}{x^5+1}$ و $x_0=-1$ ، *2°) $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin(x-1)}$ و $x_0=1$ ، 3°) $f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$ و $x_0=0$.

تمرين 06: عين a و b حتى يكون التابع f مستمر على ميدان تعريفه، في كل حالة من الحالات التالية:

1°) ب $f(x)=\begin{cases}x & si\ |x|\le1\\ x^2+ax+b & si\ |x|>1\end{cases}$ ، *2°) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & si\ x\le0\\ ax+b & si\ 0<x<1\\ \sqrt{x} & si\ x>1\end{cases}$.

تمرين 07: بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية أثبت ما يلي:

1°/ $\forall x\in]0;1[\ :\ 1+x<e^x<\frac{1}{1-x}$

*2°/ $\forall x\ge0\ :\ 2\le\sqrt{4+x^2}\le2+\frac{x^2}{2}$

تمرين 08: باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية:

1°) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ ، 2°) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ ، 3°) $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{2x+1}{x^2}}-1\right)$ ، *4°) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$ ،

*5°) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3-3x^2+x-1)}{2x-1}$ ، 6°) $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\right]$ ، *7°) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\pi cotan\,\pi x\right)$ ، 8°) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$ ، 9°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}$ ، 10°)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

تمرين 09: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases}\frac{-x^2}{x+2} & si\ \ x\geq 0\\ \ln\frac{2x^2+1}{x^2+1} & si\ \ x<0\end{cases}$.

1°/ أدرس استمرارية f على $\mathbb{R}$.

2°/ هل f يقبل الاشتقاق عند 0 ؟

3°/ أكتب عبارة $f'(x)$ بدلالة x.

4°/ بين أن f يقبل تابع عكسي f^{-1}. يطلب تحديد مجموعة تعريفه وكذلك تعيين عبارة $f^{-1}(x)$ بدلالة x.

تمرين 10*: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x} & si\ x<0\\ e^{bx}-x\ \ si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

حيث a ، b عددين حقيقيين

أ/ عين a حتى يكون f مستمر عند 0.

ب/ عين قيمة b حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند 0.

تمرين 11: أثبت ما يلي:

1) $\forall x\in\,]-1,1[\ :\ \tan Arc\sin x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2)* $\forall x\in[-1,0[\,\cup\,]0,1]\ :\ \tan Arc\cos x=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \cos Arc\tan x=\sin Arc\,co\tan x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4)* $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \sin Arc\tan x=\cos Arc\,co\tan x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) $\forall x\geq 0\ :\ Arc\tan(x+1)-Arc\tan x=Arc\tan\frac{1}{1+x+x^2}$.

6)* $\forall x\in[-1,1]: Arc\cos x+Arc\cos(-x)=\pi$.

تمرين 12: باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{Arc}\sin x^2}{x\cos x-\sin x}$، 2°)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{xArc\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)$، 3°) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ ، 4°)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ ،

5°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}$ ، 6°) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x-x^2}{x^6}$ ، 7°)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2Arc\tan x}{\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

حلول تمارين المحورين الثالث والربع

تمرين01: ميدان تعريف التابع f

$D_f = \mathbb{R}$ (°1

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: |x-1| \geq 0\} = \mathbb{R}$ (°3

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -x \geq 0 \text{ و } 2 + x > 0\} =]-2,0]$ (°5

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: E(x) \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ (°7

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2 + x \geq 0 \text{ و} 1 - x > 0 \text{ و } \ln(1-x) \neq 0\} = [-2,0[\cup]0,1[$ (°8

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \text{ و } \sin \pi x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \text{ و} \pi x \neq \frac{\pi k}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ (°10

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \text{ و} x \neq k/k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}^*_+ - \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty}]n, n+1[$$

تمرين02: النهاية بالتعريف

1) **التعريف:**

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+; \exists \delta \in \mathbb{R}^*_+; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell\right)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$$

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ و$V_3 =]2,4[$ جوار للعدد 3 لدينا:

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{4}{5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left|\frac{x^2-9}{x^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{5}\frac{|(x+3)|}{x^2+1}|(x-3)| < \varepsilon$$

لدينا من جهة أخرى $\forall x \in V_3: \frac{|(x+3)|}{x^2+1} < \frac{7}{5}$ و منه $\frac{1}{5}\frac{|(x+3)|}{x^2+1}|(x-3)| < \frac{1}{5}\frac{7}{5}|(x-3)| < \varepsilon$

و منه $|(x-3)| < \frac{25}{7}\varepsilon$ إذن يكفي اختيار $\delta = \frac{25}{7}\varepsilon$.

2) **التعريف:**

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+; \exists B \in \mathbb{R}^*_+; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell\right).$$

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+; \exists B \in \mathbb{R}^*_-; \forall x \in V_{-\infty}: x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell\right).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ و $V_{+\infty} =]1, +\infty[$ جوار لـ $+\infty$ لدينا:

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2}{x^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

لدينا من جهة أخرى $\forall x \in V_{+\infty}: x^2 + 1 > x^2$ و منه $x^2 + 1 > x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$

$x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Leftrightarrow x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$ إذن يكفي اختيار $B = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

ليكن $V_{-\infty} =]-\infty,-1[$ جوار لـ $-\infty$ لدينا: $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2+1 > \frac{2}{\varepsilon}$ و $\forall x \in V_{-\infty}: x^2+1 > x^2$

$x < -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Leftrightarrow x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$ إذن يكفي اختيار $B = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$.

3) **التعريف:**

$$\left(\forall A \in \mathbb{R}^*_+; \exists \delta \in \mathbb{R}^*_+; \forall x \in V_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right)$$

$\lim_{x\to1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty$.

ليكن $A \in \mathbb{R}^*_+$ و $V_1 =]0,2[$ جوار للعدد 1 لدينا: $\frac{(x-1)^2}{x+2} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{x+2}{(x-1)^2} > A$ و $\forall x \in V_1: \frac{1}{x+2} < \frac{1}{2}$

لدينا من جهة أخرى $|x-1| < \sqrt{\frac{2}{A}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 < \frac{1}{A}$ ، إذن يكفي اختيار $\delta = \sqrt{\frac{2}{A}}$.

4)) **التعريف:**

$$\left(\forall A \in \mathbb{R}^*_-; \exists B \in \mathbb{R}^*_+; \forall x \in V_{+\infty}: x > B \Longrightarrow f(x) < A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{-x+1} = -\infty$.

ليكن $A \in \mathbb{R}^*_-$ و $V_{+\infty} =]1,+\infty[$ جوار لـ $+\infty$ لدينا: $\frac{x^2+x+1}{-x+1} = -x - \frac{3}{x-1} - 2$ و منه

$x + \frac{3}{x-1} + 2 > -A \Leftrightarrow -x - \frac{3}{x-1} - 2 < A \Leftrightarrow f(x) < A$ و $\forall x \in V_{+\infty}: x + \frac{3}{x-1} + 2 > x + 2$.

لدينا من جهة أخرى $x > -2 - A \Leftrightarrow x + 2 > -A$ إذن يكفي أخذ $B = -2 - A$. ($-2 - A \in \mathbb{R}^*_+$).

تمرين03: حساب النهايات

1) ح.ع.ت $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = +\infty - \infty$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to1} \frac{1}{1-x}\frac{x^2+x-2}{1+x+x^2} = \lim_{x\to1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1$$

2) ح.ع.ت $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right) = +\infty - \infty$

لدينا

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{-2x\left(x - \sqrt{x^2+2x} + 1\right)}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \frac{-2x\left(x - \sqrt{x^2+2x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x\right)} \frac{\left(x + \sqrt{x^2+2x} + 1\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+2x} + 1\right)}$$

$$= \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x\right)\left(x + \sqrt{x^2+2x} + 1\right)}$$

ومنه $x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=\frac{-2x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(x+\sqrt{x^2+2x}+1\right)}=$

$$\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right)}$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

3) ح.ع.ت $\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=1^{\infty}$

نضع $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ و منه $\ln(f(x))=x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\ln(f(x))=\lim_{x\to\mp\infty}x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)}{\frac{3}{x^2-2}}=3.$$

إذن $\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^3$.

4) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\mathrm{E}(x)+1}$.

لدينا

$\forall x\in\mathbb{R}:\ E(x)\le x<E(x)+1$ ومنه $\forall x\in\mathbb{R}:\ 1+x\ge E(x)+1>x$

- من أجل $x>0$ فإن $1+x\ge E(x)+1>x\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{E(x)+1}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{x}{1+x}\le\frac{x}{E(x)+1}<1$

- من أجل $x<-1$ فإن $1+x\ge E(x)+1>x\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{E(x)+1}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{x}{1+x}\ge\frac{x}{E(x)+1}>1$

بما أنَ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+1}=1$ فإنَ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\mathrm{E}(x)+1}=1$.

<u>تمرين04</u>: تبيان أن الدالة f لا يقبل نهاية عند x_0

1°) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ و $x_0=0$

لتكن المتتاليتين (x_n) و (x'_n) حيث $x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{6}}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: x'_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$.

لدينا من جهة $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}x'_n=0$ و من جهة أخرى

$f(x_n)=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ و $f(x'_n)=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1$ و منه

$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\frac{1}{2}$ و $\lim_{n\to+\infty}f(x'_n)=1$ أي أن $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to+\infty}f(x'_n)$.

إذن التابع f لا يقبل نهاية عن 0.

4°) $f=v\circ u$ و $x_0=0$ حيث $v(x)=\begin{cases}1\ ,\ x=0\\0\ ,\ x\neq0\end{cases}$ و $u(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

لتكن المتتاليتين (x_n) و (x'_n) المعرفتين في السؤال السابق، لدينا $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}x'_n=0$

و لدينا من جهة أخرى $\forall n\in\mathbb{N}: u(x_n)=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{6}}\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi n+\frac{\pi}{6}}\neq0$ أي أن

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: f(x_n)=v\big(u(x_n)\big)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$

و $\forall n\in\mathbb{N}: u(x'_n)=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=0$ أي أن $\forall n\in\mathbb{N}: f(x_n)=v\big(u(x'_n)\big)=1$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)$ إذن التابع f لا يقبل نهاية عن 0.

<u>تمرين05</u>: التمديد بالاستمرار عند x_0

°1) $f(x)=\frac{x^3+5x+6}{x^5+1}$ و $x_0=-1$.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+5x+6}{x^5+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x+6)(x+1)}{(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x+6)}{(x^4-x^3+x^2-x+1)}=\frac{8}{5}$$

و منه f يقبل تمديدا بالاستمرار عند -1 حيث $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq -1\\ \frac{8}{5}, & x=-1\end{cases}$

°3) $f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$ و $x_0=0$.

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*: 0\le \left|x\sin\frac{1}{x}\right|<|x|$ و $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ إذن $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$.

f يقبل تمديدا بالاستمرار عند 0 حيث $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

<u>تمرين06</u>: تعيين a و b حتى يكون التابع f مستمر على ميدان تعريفه

°1) بـ $f(x)=\begin{cases} x & si\ |x|\le 1\\ x^2+ax+b & si\ \ |x|>1\end{cases}$

f مستمر عند 1معناه:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} x^2+ax+b=1\Leftrightarrow a+b=0$.

f مستمر عند -1 معناه:

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} x^2+ax+b=-1\Leftrightarrow -a+b=-2$.

إذن $\begin{cases} a+b=0\\ -a+b=-2\end{cases}$ ومنه $a=1\ ;\ b=-1$.

<u>تمرين07</u>: تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في الحصر

<u>النظرية</u>: إذا كان التابع f مستمر على المجال $[a;b]$ و قابل للاشتقاق على المجال $]a;b[$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $]a;b[$ يحقق: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

°1/ $\forall x\in]0;1[\ :\ 1+x<e^x<\frac{1}{1-x}$.

بتطبيق النظرية السابقة على التابع $f(x)=e^x$ و المجال $[a;b]=[0;x]$ حيث $x\in]0;1[$.

$\exists\ c\in]0;x[: e^x-e^0=e^c(x-0)\Leftrightarrow \exists\ c\in]0;x[: e^x-1=e^cx$.

لدينا

$0<c<x\Rightarrow e^0<e^c<e^x\Rightarrow x<e^cx<xe^x\Rightarrow x<e^x-1<xe^x$.

لدينا من جهة

$$.e^x - 1 < xe^x \Rightarrow e^x(1-x) < 1 \Rightarrow e^x < \frac{1}{(1-x)}$$

و من جهة أخرى

$$.x < e^x - 1 \Rightarrow x + 1 < e^x$$

إذن $\forall x \in]0;1[\, : 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$

<u>تمرين08</u>: قاعدة لوبيتال

1°) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ (حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \text{ح.ع.ت}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \text{ح.ع.ت}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

، 2°) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$ (حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)'}{(1 - 2\cos x)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x} = \frac{\cos(0)}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

، 3°) $\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1\right)$(حالة عدم التعيين من الشكل $0.\infty$).

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1\right)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ح.ع.ت}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{2x+1}{x^2}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{2x+2}{x^3} \frac{e^{\frac{2x+1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 + 2x^2}{x^3} e^{\frac{2x+1}{x^2}} = 2e^0 = 2$$

6°) $\lim_{x\to +\infty} x \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x}\right)\right]$(حالة عدم التعيين من الشكل $0.\infty$).

$$\lim_{x\to +\infty} x \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x}\right)\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ح.ع.ت}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x}\right)\right]\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\pi\left(\tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x}) + 1\right)}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x})} = \frac{\pi\left(\tan^2\frac{\pi}{4} + 1\right)}{\tan\frac{\pi}{4}} = 2\pi$$

8°) $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 12\tan x}{3\sin 4x - 12\sin x}$(حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3\tan 4x-12\tan x)'}{(3\sin 4x-12\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\ \frac{4}{\cos^2 4x}-12\ \frac{1}{\cos^2 x}}{3(4\cos 4x)-12\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 4x}{\cos^2 x\cos^2 4x(\cos 4x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{(\cos 4x+\cos x)}{\cos^2 x\cos^2 4x}=-2$$

9°) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}$ (حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).(ملاحظة: استبدال $x\to\frac{\pi}{2}$ بـ $x\to\frac{\pi}{4}$ في السؤال).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3\right)'}{(1-\sin 2x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{3(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2}{2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}\frac{3(\cos x+\sin x)^2}{2}$$

لدينا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{3(\cos x+\sin x)^2}{2}=\frac{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\text{ح.ع.ت}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)'}{(\cos 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x-\sin x}{-2\sin 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و منه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

تمرين09: التابع العكسي

f معرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases}\frac{-x^2}{x+2} & si\ \ x\geq 0\\ \ln\frac{2x^2+1}{x^2+1} & si\ \ x<0\end{cases}$.

1°/ دراسة استمرارية f على $\mathbb{R}$ تؤول إلى دراسة الاستمرار عند 0

لدينا $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x+2}=0=f(0)$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to -}\ln\frac{2x^2+1}{x^2+1}=0=f(0)$ ومنه فإن f مستمر عند 0.

2°/ دراسة قابلية اشتقاق f عند 0.

$$\lim_{x\to x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x\to 0^+}\frac{\frac{-x^2}{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\to x\to 0^+}\frac{-x}{x+2}=0=f'_d(0)$$

$$\lim_{x\to x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x\to 0^-}\frac{\ln\frac{2x^2+1}{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to x\to 0^-}\frac{\left(\ln\frac{2x^2+1}{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to x\to 0^-}\frac{\frac{2x}{2x^4+3x^2+1}}{1}=0=f_g'(0)$$

و منه f يقبل الاشتقاق عند 0 حيث $f'(0)=0$.

3°/ كتابة عبارة $f'(x)$ بدلالة x: $f'(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+4x}{(x+2)^2} & si\ \ x\geq 0\\ \frac{2x}{2x^4+3x^2+1} & si\ \ x<0\end{cases}$.

4°/ لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*: f'(x)<0$ أي أن f متناقص تماما على $\mathbb{R}$ و بما أنه مستمر على $\mathbb{R}$ فإن f يقبل تابع عكسي f^{-1} معرف و مستمر على $f(\mathbb{R})=]-\infty;\ln 2[$ (نحصل على $f(\mathbb{R})$ من جدول تغيرات f).

-تعيين عبارة $f^{-1}(x)$ بدلالة x:

لدينا $f(\mathbb{R}_+)=]-\infty;0]$ و $f(\mathbb{R}_-)=[0;\ln 2[$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\ ;\ \forall y\in]-\infty;0]: y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{-x^2}{x+2}$$

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\sqrt{y(y-8)}\text{ أو }x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\sqrt{y(y-8)}\ (\text{مرفوض})$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_-\ ;\ \forall y\in]0;\ln 2[: y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln\frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=-\sqrt{-\frac{e^y-1}{e^y-2}}\text{ أو }x=\sqrt{-\frac{e^y-1}{e^y-2}}\ (\text{مرفوض})$$

و منه

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x(x-8)} & si\ \ x\in]-\infty;0]\\ -\sqrt{-\frac{e^x-1}{e^x-2}} & si\ \ x\in]0;\ln 2[\end{cases}$$

<u>تمرين11</u>: التوابع الأولية

1) $\forall x\in]-1,1[\ :\ \tan Arc\sin x=\frac{\sin Arc\sin x}{\cos Arc\sin x}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) . لدينا $\sin^2\alpha=\frac{1}{1+cotan^2\alpha}$ من أجل $\alpha\in]0,\pi[$ فإن $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\text{cotan}^2\alpha}}$ و منه

$\forall x\in\mathbb{R}:\sin Arcco\tan x=\sqrt{\frac{1}{1+\text{cotan}^2 Arcco\tan x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$. من أجل $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$ و منه

5) $\forall x\geq 0: Arc\tan(x+1)-Arc\tan x=Arc\tan\frac{1}{1+x+x^2}$.

لدينا $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \alpha-\beta = Arc\tan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

بوضع $\beta = Arc\tan x$ و$\alpha = Arc\tan(x+1)$ نحصل على

$$\forall x \geq 0 : Arc\tan(x+1) - Arc\tan x = Arc\tan\frac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

تمرين 12: تطبيق قاعدة لوبيتال على دوال أولية

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{Arc}\sin x^2}{x\cos x-\sin x}$ (حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{Arc}\sin x^2}{x\cos x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x\,\mathrm{Arc}\sin x^2)'}{(x\cos x-\sin x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arc}\sin x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arc}\sin x^2}{-x\sin x}+\frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-\frac{\sin x}{x}}\right)$$

لدينا

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arc}\sin x^2}{-x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}-\frac{(\mathrm{Arc}\sin x^2)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}-\frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x} = -1 \text{ و} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-\frac{\sin x}{x}}\right) = -2$$

إذن $\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{Arc}\sin x^2}{x\cos x-\sin x} = -3$.

3°) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ (حالة عدم التعيين من الشكل 1^∞)

نضع $f(x) = (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ ومنه $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(e^x+x)$.

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\text{ح.ع.ت}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(e^x+x)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x} = 2$$

و منه

$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

5°) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2\cos x}$ (حالة عدم التعيين من الشكل ∞^0)

نضع $g(x) = (\tan x)^{2\cos x}$ ومنه $\ln g(x) = 2\cos x\ln(\tan x)$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln g(x) = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ح.ع.ت}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln g(x) = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\ln(\tan x)\right)'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos^2 x\tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\tan x\sin x} = 0$$

و منه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2\cos x} = e^0 = 1$.

جزء

الامتحانات

المحلولة

الامتحان الأول

<u>التمرين الأول:</u>أجب بـ صحيح أو خطأ مع التعليل.

1) (0.75+0.5)كل متتالية محدودة هي متتالية متقاربة.

2) (0.75+0.5) إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$ و متقاربة نحو العدد ℓمن $\mathbb{R}$فإن $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \ell$.

3)(0.75+0.5)إذا كان $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0\right)$ فإن:

$\left(\exists\delta > 0; \forall x \in \left]a-\delta, a\right[\cup \left]a, a+\delta\right[: f(x) > 0\right)$.

4)(0.75+0.5)إذا كان التابع f مستمر عند 0 فإن التابع $g: x \longrightarrow xf(x)$ يقبل الاشتقاق عند 0.

<u>التمرين الثاني:</u>(الهدف في هذا التمرين هو إثبات تباعد متتالية تراجعية، باستخدام متتاليتين جزئيتين).

1) ليكنfالتابع المعرف على المجال$I = [0;1]$ كما يلي : $f(x) = 1 - x^2$.

نعرف المتتالية التراجعية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

أ -(1 نقطة) أدرس اتجاه تغير التابع fعلى Iثم استنتج أنَ: $\forall\, x \in I : 0 \leq f(x) \leq 1$.

ب -(1.5 نقطة) بين أنَ $f \circ f(x) = -x^4 + 2x^2$، ثم حل في المجال I المعادلة: $x = f \circ f(x)$، إذا علمت أن 1 حل لها.

جـ - (2 نقطة) أحسب u_1 ،u_2 ،u_3، ثم بين أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

2)لتكن المتتاليتين$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ،$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$حيث:$\forall n\in\mathbb{N} : v_n = u_{2n}$ و$\forall n\in\mathbb{N}^* : w_n = u_{2n-1}$.

أ - (1نقطة) بين أنَ $\forall n\in\mathbb{N} : v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ و$\forall n\in\mathbb{N}^* : w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

بـ (1 نقطة) بين أنَ المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ،$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبتين و متقاربتين.

جـ - (1.5 نقطة) أحسب نهايتي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$، ماذا تستنتج؟

<u>التمرين الثالث</u>:ليكن التابع fالمعرف بـ $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{x^2+1}}, & x \geq 0 \\ \frac{3(x-\arctan x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$.

1) (0.5 نقطة) عين مجموعة تعريف التابع f.

2) أ - (2نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x-\arctan x}{x^3}$.

ب - (1.5 نقطة) استنتج أنَ f يقبل الاشتقاق عند 0.

3) أ - (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهاية : $\lim_{x \to +\infty} \left(x e^{\frac{x}{x^2+1}} - x \right)$.

ب- (1 نقطة) استنتج أن المنحنى البياني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

<u>التمرين الأول</u>(5 نقاط):	
1) **خطأ**..	0.5
التعليل: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $\forall n\in\mathbb{N} : u_n=(-1)^n$ ، لدينا	
$\forall n\in\mathbb{N}: -1\le u_n\le 1$	0.25
أي أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأنَ المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و	
$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 1 و -1 على الترتيب.	0.5
2) **صحيح**	0.5
التعليل: بما أنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ فإن	
$\forall\varepsilon>0; \exists N\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}: n>N \Longrightarrow \ell-\varepsilon<u_n<\ell+\varepsilon$ ....(1)	
لنبرهن بالخلف أنَ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\ge\ell$	
نفرض أن $\exists n_0\in\mathbb{N}: u_{n_0}<\ell$ و منه $\ell-u_{n_0}>0$، بوضع $\varepsilon=\ell-u_{n_0}$ في (1) نحصل على	
$\exists n_1\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}: n>n_1 \Longrightarrow u_{n_0}<u_n$.	0.5
و بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة فإن $n>n_0 \Longrightarrow u_n\le u_{n_0}$.	0.25
من أجل $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ فإن $\forall n\in\mathbb{N}: n>n_2 \Longrightarrow u_{n_0}<u_n$ و $u_{n_0}\ge u_n$	
و هذا تناقض.	
بوضع $n=N_1=N+1$ في (1) نحصل على $\forall\varepsilon>0; \exists N_1\in\mathbb{N}: u_{N_1}<\ell+\varepsilon$.	
3) **صحيح**	0.5
نفرض $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell>0$ أي أنَ:	
$\forall\varepsilon>0 ; \exists\delta>0: 0<\lvert x-a\rvert<\delta \Longrightarrow \lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon$ ، من أجل $\varepsilon=\ell$	
نحصل على	0.5
$\exists\delta>0: 0<\lvert x-a\rvert<\delta \Longrightarrow \lvert f(x)-\ell\rvert<\ell$	0.25
$\Longrightarrow 0<f(x)<2\ell$	
إذن $\exists\delta>0; \forall x\in\,]a-\delta,a[\,\cup\,]a,a+\delta[: f(x)>0$.	
4) **صحيح**	0.5
إذا كان التابع f مستمر عند 0 فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ و منه فإن:	0.25
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.	0.5
<u>التمرين الثاني</u>(8 نقاط):	0.5
1) أ) $\forall x\in[0;1]: f'(x)=-2x<0$، f متناقص تماما على المجال $[0;1]$.	0.5
لدينا: $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$.	0.5
ب) $\forall x\in[0;1]: f\circ f(x)=1-(1-x^2)^2=-x^4+2x^2$.	0.5
$x=f\circ f(x) \Leftrightarrow x=-x^4+2x^2 \Leftrightarrow x(x^3-2x+1)$	
$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1)=0$	

	$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$ أو $x=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$
	و منه $S=\left\{0,1,\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$.$\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\notin I\right)$.
1	جـ) $u_1=\frac{3}{4}$، $u_2=\frac{7}{16}=0.4375$، $u_3=\frac{207}{256}=0.80859$
	نستعمل البرهان بالتراجع: $0\le u_0=\frac{1}{2}\le 1$
3(0.5)	نفرض $0\le u_n\le 1$ و منه $f(1)\le f(u_n)\le f(0)$ أي أنَ $0\le u_{n+1}\le 1$.
0.5	2) أ) $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=u_{2n+2}=f(u_{2n+1})=f\left(f(u_{2n})\right)=f\circ f(v_n)$.
	$\forall n\in\mathbb{N}: w_{n+1}=w_{2n+1}=f(w_{2n})=f\left(f(w_{2n-1})\right)=f\circ f(w_n)$.
0.5	ب) بما أن f متناقص فإنَ $f\circ f$ متزايد إذن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين
0.5	تماما.
0.5	بما أن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين و محدودتين فهما متقاربتين.
	ج) إنَ نهاتي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هما حلي المعادلة $x=f\circ f(x)$ و منه
0.5	$\left(v_1=u_2=\frac{7}{16}<v_0=u_0=\frac{1}{2}\right)\Leftarrow$ متناقصة تماما $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty}v_n=$
0.5	.0
	$\left(w_2=u_3=\frac{207}{256}>w_1=u_1=\frac{3}{4}\right)\Leftarrow$ متزايدة تماما $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Leftarrow$
	$\lim_{n\to+\infty}w_n=1$.
0.5	بما أن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتين نحو نهايتين
0.5	مختلفتينهما 0 و 1 على الترتيب فإنَ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.
	<u>التمرين الثالث (7 نقاط):</u>
	1) $D_f=\mathbb{R}$.
0.5	2) أ) $\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{3x^2}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{1}{3(x^2+1)}=\frac{1}{3}$.
2	ب) $\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{xe^{\frac{x}{x^2+1}}-0}{x-0}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}e^{\frac{x}{x^2+1}}=1$.
0.5	$\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{\frac{3(x-\arctan x)}{x^2}-0}{x-0}=3\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{x-\arctan x}{x^3}=1$.
0.5	إذن $f'(0-0)=f'(0+0)=1$ و منه f يقبل الاشتقاق عند 0.
0.5	3) أ) $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}}-x\right)=+\infty-\infty$ ح تع
2	$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{x^2+1}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{\frac{x}{x^2+1}}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$
	$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{x^2+1}}\frac{x^4-x^2}{(x^2+1)^2})=1$
0.75	ب) $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}}-x\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$
0.25	$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$

و منه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى البياني (C_f)بجوار $+\infty$.	0.25

الامتحان الثاني

التمرين الأول:(12 نقطة)

1) ليكن f تابع معرف على المجال $I = \left]\frac{1}{2};2\right]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$.

أ) (1+ 1.5 نقطة) ادرس اتجاه تغير التابع f ثم استنتج أنَ: $\forall x \in I \ : \ f(x) \in I$.

ب) (1 نقطة) بين أنَ: $\forall x \in I \ : \ f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{x+2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

جـ) (1.5 نقطة) استنتج أنَ: $\forall x \in I \ : \ f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

2) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث: $u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) (1 نقطة) أحسب u_1،u_2.

ب) (1 نقطة) أثبت أنَ: $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{2} < u_n \leq 2$.

ج) (1 نقطة) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

د) (1+ 1 نقطة) بين أنَ (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها l.

3) أ) (0.5 نقطة) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \frac{1}{2})$.

ب) (1 +0.5 نقطة) استنتج أنَ: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n$، ثم عين أصغر عدد طبيعي n حيث: $u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1000}$.

التمرين الثاني:(8 نقاط) (الأسئلة 1 و 2 و 3 مستقلة).

1) (1.5 نقطة) باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أنَ: $\forall x > 0: \ln(x+1) < x$.

2) ليكن التابع f حيث $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - \sin x}{x\ln(x+1)}, & x \neq 0 \\ 2 , & x = 0 \end{cases}$.

أ) (1 نقطة) عيَن مجموعة تعريف f .

ب) (2 +0.5 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x\ln(x+1)}$ ، هل f مستمرعند 0؟

3) ليكن التابع g المعرف على $]-\infty;-1[\,\cup\,]0;+\infty[$ بـ $g(x) = x^2 \ln\frac{x+1}{x}$ وليكن (C_g) تمثيله البياني.

أ) (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال بين أنَ: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$.

ب) (1 نقطة) استنتج أن (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار ∞ يطلب تعيين معادلة له.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

التمرين الأول:	
1) أ) $f'(x)=\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$	0.5
$x^2+4x-1=0$, $\Delta=20$, $x_1=-\sqrt{5}-2$, $x_2=\sqrt{5}-2$ و منه	0.5
$\forall x\in I: f'(x)>0$ أي أن f متزايد تماما على المجال I.	0.5
لدينا $x\in I \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\le 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<f(x)\le f(2)\Rightarrow \frac{1}{2}<f(x)\le \frac{5}{4}\le 2$	0.5
$\Rightarrow f(x)\in I$	1
ب) $f(x)-\frac{1}{2}=\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{1}{2}=\frac{x^2-\frac{1}{2}x}{x+2}=\frac{x}{x+2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.	
جـ) لدينا $\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$ و منه	1
$\frac{1}{2}<x\le 2 \Rightarrow 1-\frac{2}{\frac{1}{2}+2}<1-\frac{2}{x+2}\le 1-\frac{2}{2+2}\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{x}{x+2}\le\frac{1}{2}$	
2) أ) $u_1=\frac{5}{4}$ ، $u_2=\frac{41}{52}$	2(0.5)
ب) $\frac{1}{2}<u_0\le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<2\le 2$	0.5
$\frac{1}{2}<u_n\le 2 \xRightarrow{\text{من لسؤال 1) أ)}} \frac{1}{2}<f(u_n)\le 2\Rightarrow \frac{1}{2}<u_{n+1}\le 2$	0.5
جـ) بما أن f متزايد تماما و $u_1<u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.	1
د) بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأدنى فهي متقاربة.	1
نفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell$ ، ℓ هي حل للمعادلة $f(x)=x$.	1
$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+2}=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.	
3) أ) من السؤال 1) جـ) لدينا	0.5
$u_{n+1}-\frac{1}{2}=f(u_n)-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$.	0.5
ب) $0<u_0-\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow 0<\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$ نفرض أن $0<u_n-\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.	0.5
$0<u_{n+1}-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.	0.5
حتى يكون $u_n-\frac{1}{2}\le\frac{1}{1000}$ يكفي اختيار $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}$ و منه	0.5
$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow n>\frac{\ln\frac{3}{2}+\ln 1000}{ln2}\cong 10.55$.	
أصغر قيمة لـ n هي 11.	0.5
التمرين الثاني(8 نقاط):	
1) بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع $f(x)=\ln(x+1)$ و المجال $[0,x]$ حيث $x>0$.	

0.5	و منه $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$ $\quad 0<c<x$
0.5	$\ln(x+1)=\frac{1}{c+1}x$ $\quad 0<c<x$
2(0.5)	لدينا أيضا $c>0 \Rightarrow \frac{1}{c+1}<1 \Rightarrow \frac{1}{c+1}x<x$ و منه $\ln(x+1)<x$.
1	2) أ) $D_f=]-1,+\infty[$.
1+1	ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)e^x-\cos x}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)e^x+\sin x}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=1$.
	بما أن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$ فإن f غير مستمر عند 0.
0.5 4(0.5)	3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}$.
0.5	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$.
0.5	ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى البياني (C_g) بجوار $+\infty$

الامتحان الثالث

<u>التمرين الأول</u>:(4 نقطة) أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

1) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 1$.

2) المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ تقبل على الأقل حلا ناطقا.

3) إذا كانت المتتاليتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متجاورتان فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a, b]$، فإنَه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a, b]$ يحقق:

$$\forall x \in [a, b] \ : \ f(x) \leq \ f(c) .$$

<u>التمرين الثاني</u>:(10 نقاط)

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} v_0 = b \\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$$

حيث $0 < a < b$.

1) أثبت ما يلي:

أ) $\forall\, n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < v_n$

ب) المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبتين.

جـ) $\forall\, n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

د) $\forall\, n \in \mathbb{N}: v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$.

هـ) ماذا تستنتج؟

2) نضع $a = 1$ و $b = 4$.

أ) أحسب u_1, v_1 , u_2 , v_2 .

ب) عين أصغر عدد طبيعي n حيث $v_n - u_n \leq \frac{1}{100}$.

<u>التمرين الثالث</u>:(6 نقاط)

ليكن التابع f المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{3x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ \frac{\sin x - x}{x^2} & , \ x < 0 \end{cases}$$

1) حدد مجموعة تعريف التابع f.

2) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهايتين $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

3) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0، هل f مستمر عند 0 (علل).

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

التمرين الأول(4 نقاط):	
1)صحيح	0.5
التعليل: المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = 1 - \frac{1}{n}$ ، متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو $\sup\limits_{n\,\in\,\mathbb{N}^*}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ و منه فإن $\sup\limits_{n\,\in\,\mathbb{N}^*}\left\{1-\frac{1}{n}\right\} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ 1.	0.5
أي أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأنَ المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 1 و -1 على الترتيب.	0.5
2) **خطأ**	
التعليل: نفرض أن المعادلة تقبل حلا ناطقا أي من الشكل $x = \frac{p}{q}$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$ والعددان q و p أوليان فيما بينهما، بالتعويض في المعادلة نحصل على	
$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} - 1 = 0 \Leftrightarrow q(q-p) = p^2$ و منه فإن $q \backslash p^2$ أي أن $q = 1$	0.5
بالتعويض في المعادلة نحصل على $p^2 + p - 1 = 0$ أو $p(1+p) = 1$ و هذا تناقض لأن العدد $p(1+p)$ زوجي.	0.5
3) **صحيح**	
التعليل: بما أن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين فهما	0.5
متقاربتين نحو نهاية مشتركة ℓ أي أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها ℓ.	0.5
4) **صحيح**	
لأنَ كل تابع f مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ يدرك حده الأعلى مرة على الأقل على المجال $[a,b]$ أي أنه	
$\exists\, c \in [a,b];\ \forall x \in [a,b]\ :\ f(x) \leq f(c)$.	0.5
التمرين الثاني(10 نقاط):	
1) أ) لدينا $u_0 > 0$ و $v_0 > 0$.	
نفرض $u_n > 0$ و $v_n > 0$.	0.5
$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) > 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$.	
لدينا أيضا $a < b \Rightarrow u_0 < v_0$.	0.5
نفرض $u_n < v_n$ و لنبرهن أن $u_{n+1} < v_{n+1}$.	1
$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{2}(u_n - v_n)^2 > 0$.	
ب) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) > 0 \Rightarrow (u_n)$ متزايدة تماما.	1
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) < 0 \Rightarrow (u_n)$ متناقصة تماما.	
ج) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) + u_n - \sqrt{u_n v_n}$ $= \frac{1}{2}(v_n - u_n) + \sqrt{u_n}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)$ $\leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ (لأن $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} < 0$)	1.5

1	د) لدينا $v_0 - u_0 = b - a \le b - a$ نفرض $v_n - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$ ونبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$.
1	$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n) \le \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$.
4(0.5)	هـ) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)\right) = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، نستنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.
1	2) أ) $u_1 = 2\ ,\ v_1 = \frac{5}{2}\ ,\ u_2 = \sqrt{5}\ ,\ v_2 = \frac{9}{4}$.
	ب) حتى يكون $v_n - u_n \le \frac{1}{100}$ يكفي أخذ $\left(\frac{1}{2}\right)^n (4-1) < \frac{1}{100}$ و منه $n > \frac{\ln 300}{\ln 2} = 8.22$ أصغر قيم n هي 9.
	التمرين الثالث (6 نقاط):
1	1) $D_f = \mathbb{R}$.
1	2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-\cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+\sin x}{2} = -\frac{1}{2}$.
1	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$.
1	3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{\frac{\sin x - x}{x^2}-0}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} = f'(0-0)$.
1	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6} = f'(0+0)$
1	إذن $f'(0-0) = f'(0+0) = -\frac{1}{6}$ و منه f يقبل الاشتقاق عند 0.

قائمة المراجع

- سلسلة الرياضيات في الجامعة، التحليل، الجزء الثاني، ع. حميدة و ع. بيبي، مطبعة **SPECTRAL**، جبل الوحش- قسنطينة.
- Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, 1983.
- J.-M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris 2003.
- N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.
- K. Allab, Eléments d’Analyse, OPU, Alger, 1984.
- B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d’analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.
- J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, 1978.
- E. Azoulay et J. Avignant, Mathématiques. Tome1, Analyse. McGraw-Hill, 1983.
- S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse: cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.