Corrige -type : Équations de la physique mathématique

Exercice 01

$$yu\frac{\partial u}{\partial x}+xu\frac{\partial u}{\partial y}=-xy,\qquad \{x^2+y^2=4;\quad u=1\}.$$

Système Caractéristique :

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{yu}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{xu}}=-\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{xy}}. \qquad \boxed{1}$$

Intégrales Premières :

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{yu}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{xu}}\Longrightarrow \mathrm{xdx}=\mathrm{ydy}\overset{\int}{\Longrightarrow}\frac{1}{2}y^2+\mathrm{c}=\frac{1}{2}x^2\Longrightarrow \varphi_1(\mathrm{x,y})=y^2-x^2=\mathrm{c}_1. \qquad \boxed{1}$$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{yu}}=-\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{xy}}\Longrightarrow \mathrm{xdx}=-\mathrm{udu}\ \overset{\int}{\Longrightarrow}\frac{1}{2}x^2=\mathrm{c}-\frac{1}{2}\mathrm{u}^2\Longrightarrow \varphi_2(\mathrm{x,y})=\mathrm{u}^2+x^2=\mathrm{c}_2. \qquad \boxed{1}$$

D'autre part, on a φ_1 et φ_2 sont indépendante, par conséquent, **la solution général** s'écrit

$$\mathrm{c}_2=\mathrm{G}(\mathrm{c}_1)\Longrightarrow \mathrm{u}^2=-x^2+\mathrm{G}(y^2-x^2). \qquad \boxed{0{,}5}$$

On cherche **la surface intégrale**

On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{c}_1=y^2-x^2 && (1)\\
&\mathrm{c}_2=u^2+x^2 && (2)\\
&x^2+y^2=4 && (3)\\
&u=1 && (4)
\end{aligned}$$

$$(1)+(2):\ \mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2=\mathrm{u}^2+x^2+y^2-x^2 \qquad (5)$$

$$(3)+(4)+(5):\ \mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2=1+4-x^2\Longrightarrow\ \mathrm{c}_2=-\mathrm{c}_1+5-x^2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{c}_1)=-\mathrm{c}_1+5-x^2.$$

Ce qui définit la fonction G comme suit $\mathrm{G}(\alpha)=-\alpha-x^2+5.$ $\boxed{1}$

Par conséquent,

$$\mathrm{u}^2=-x^2+\mathrm{G}(y^2-x^2)=-x^2-(y^2-x^2)-x^2+5=-x^2-y^2+5.$$

D'où,

$$\mathrm{u}^2+x^2+y^2=5. \qquad \boxed{1}$$

Exercice 03

1.

- **Les courbes caractéristiques**

$X_1 = x + \sqrt{3}\,t. \quad X_2 = x - \sqrt{3}\,t.$ 1

- **La forme standard**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0. \quad \boxed{0,5}$$

- **La solution générale**

$$u(x,t) := F(X_1) + G(X_2) = F\left(x + \sqrt{3}\,t\right) + G\left(x - \sqrt{3}\,t\right).$$

2.

- **La solution générale**

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[f\left(x + \sqrt{3}\,t\right) + f\left(x - \sqrt{3}\,t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{x-\sqrt{3}\,t}^{x+\sqrt{3}\,t} g(s)ds. \quad \boxed{1}$$

3.

$$\begin{aligned} u\left(1,\sqrt{3}\right) &= \frac{1}{2}[f(4) + f(-2)] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-2}^{4} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{3} + 0\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-2}^{0} g(s)ds + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{0}^{1} g(s)ds + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{1}^{4} g(s)ds \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-2}^{0} ds + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{0}^{1} 2sds + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{1}^{4} 2ds \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}. \quad \boxed{1,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} u(x,t) &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[f\left(x + \sqrt{3}\ t\right) + f\left(x - \sqrt{3}\ t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{t\to\infty}\int_{x-\sqrt{3}\ t}^{x+\sqrt{3}\ t} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{f(\infty)}_{\infty} + \underbrace{f(-\infty)}_{0}\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds \\ &= \infty + \frac{1}{2\sqrt{3}}\underbrace{\int_{-\infty}^{0} g(s)ds}_{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\underbrace{\int_{0}^{1} g(s)ds}_{\frac{1}{2\sqrt{3}}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\underbrace{\int_{1}^{\infty} g(s)ds}_{+\infty} = +\infty. \quad \boxed{1,5} \end{aligned}$$

Exercice 02

1. On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$, on trouve

$$\frac{T''(t)}{\sqrt{2}T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \qquad \boxed{1}$$

D'autre part, on a

$u_x(0,t) = 0 \Longrightarrow X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow \mathbf{X'(0) = 0}.$ $\quad u_x(1,t) = 0 \Longrightarrow X'(1)T(t) = 0 \Longrightarrow \mathbf{X'(1) = 0}.$

Par conséquent,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in]0,1[, \\ X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases} \qquad \{T'(t) + \lambda\sqrt{2}T(t) = 0 \qquad \boxed{1}$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

On a

Si $\lambda = 0$: $X(x) = a + bx.$ $\quad X'(x) = b.$

$$X'(0) = X'(1) = 0 \Longrightarrow b = 0. \text{ Donc, } X = a. \qquad \boxed{0{,}5}$$

Si $\lambda < 0$: $X(x) = ae^{-\sqrt{-\lambda}\,x} + be^{\sqrt{-\lambda}\,x}.$ $\quad X'(x) = -a\sqrt{-\lambda}\,e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} + b\sqrt{-\lambda}\,e^{\sqrt{-\lambda}\,x}$

$$X'(0) = 0 \Longrightarrow a = -b \text{ et } X'(1) = 0 \Longrightarrow b = 0. \text{ Donc, } X \equiv 0. \qquad \boxed{0{,}5}$$

Si $\lambda > 0$: $X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}\,x + b\sin\sqrt{\lambda}\,x.$ $\quad X'(x) = -a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x + b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x$

$$X'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0.$$

$$X'(1) = 0 \Longrightarrow -\underbrace{a}_{\neq 0}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n \geq 1.$$

Donc, $X_n(x) = a\cos(n\pi x)$, $\sqrt{\lambda_n} = n$, $n \geq 1$. $\boxed{0{,}5}$

D'où, $X_n(x) = \cos(n\pi x)$, $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$, $n \geq 0$. $\boxed{1}$

3. Résoudre

$\{T'(t) + \sqrt{3}\lambda T(t) = 0$ pour $\lambda := \lambda_n = (n\pi)^2$, $n \geq 0$.

L'équation en $T(t)$ est une EDO linéaire du 1[er] ordre, alors les solutions sont donc de la forme

$$T(t) = Ke^{-\sqrt{3}\lambda t} \Longrightarrow T_n(t) = K_n e^{-\sqrt{2}\lambda_n t} = K_n e^{-\sqrt{2}(n\pi)^2 t}, \quad n \geq 0. \qquad \boxed{1}$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la chaleur** sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi x) K_n e^{-\sqrt{2}(n\pi)^2 t}. \qquad \boxed{1}$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) k_n = \sqrt{2} + \cos(\pi x) + \cos(3\pi(x+1)) = \sqrt{2} + \cos(\pi x) - \cos(3\pi x).$$

Par comparaison, on trouve

$k_0 = \sqrt{2}$. $k_1 = 1$. $k_3 = -1$. $k_n = 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1,3\}$. 1,5

Par conséquent,

$u(x,t) = \sqrt{2} + \cos(\pi x)e^{-\sqrt{2}\pi^2 t} - \cos(3\pi x)e^{-\sqrt{2}9\pi^2 t}$. 1