التمرين الأول: (5 pts)

$A = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$

1) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n:

$\frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}$

$\Rightarrow \frac{2n}{3n+1} = \frac{3an+a+b}{3n+1}$ 0,5

بالمطابقة:

$\begin{cases} 3a = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} & 0{,}25 \\ b = -\frac{2}{3} & 0{,}25 \end{cases}$

إذن:

0,25 $\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$n \geq 0 \Rightarrow 3n+1 \geq 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3n+1} \leq 1$ 0,5

$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{-2}{3(3n+1)} < 0$ 0,5

$\Rightarrow 0 \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3n+1}\right) < \frac{2}{3}$ 0,5

إذن A محدودة.

3) $0 \in A$: $\frac{2 \times 0}{3 \times 0 + 1} = 0 \in A$

$\inf(A) = \min(A) = 0$ 0,5 + 0,5

$\sup(A) = \frac{2}{3}$

لدينا:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \; \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)} \in A$

حيث: $\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)} \leq \frac{2}{3}$ 0,25

$\Rightarrow \frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \leq \frac{2}{3}$

$1 - \frac{3}{2}\varepsilon < 1 - \frac{1}{3n+1} \leq 1$ 0,25

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\varepsilon < -\frac{1}{3n+1} \leq 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3n+1} < \frac{3}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow 3n+1 > \frac{2}{3\varepsilon}$ 0,25

$\Rightarrow n > \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$

نأخذ $n_0 = \left[\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}\right] + 1$ 0,25

$\sup(A) = \frac{2}{3}$

و لدينا $\frac{2}{3} \notin A$ 0,5

إذن $\max(A)$ غير موجود.

التمرين الثاني (7pts)

$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3} \end{cases}$ $a < b$.

$\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$

1/ $u_1 = \dfrac{2a+b}{3}$; $v_1 = \dfrac{a+2b}{3}$ 0,25 + 0,25

2/ نبرهن أنه من أجل $n \geq 0$:

$u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$

من أجل $n = 0$:

$a < b \Rightarrow 2a + a \le b + 2a$

$\Rightarrow 3a \le b + 2a$ 0,25

$\Rightarrow a \le \dfrac{b+2a}{3}$

$\Rightarrow u_0 \le u_1$ (1)

من جهة أخرى:

$a < b \Rightarrow a + 2b \le 3b$

$\Rightarrow \dfrac{a+2b}{3} \le b$ 0,25

$\Rightarrow v_1 \le v_0$ (2)

و لدينا: $a \le b$

أي: $(a+b) + a \le (a+b) + b$

$2a + b \le a + 2b$

$\dfrac{2a+b}{3} \le \dfrac{a+2b}{3}$ 0,25

أي: $u_1 \le v_1$ (3)

من (1) و (2) و (3):

$u_0 \le u_1 \le v_1 \le v_0$ 0,25

وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة.

ونثبت صحة $P(n+1)$:

أي: $u_{n+1} \le u_{n+2} \le v_{n+2} \le v_{n+1}$

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3}$

$u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}+v_{n+1}}{3}$

حسب فرض التراجع:

$u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$

إذن:

$u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}+v_{n+1}}{3}$ 0,25

$\geq \dfrac{2u_{n+1}+u_{n+1}}{3} = u_{n+1}$

و $v_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}$

$\le \dfrac{v_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = v_{n+1}$ 0,25

و $u_{n+1} \le v_{n+1}$

$2u_{n+1} + v_{n+1} \le u_{n+1} + 2v_{n+1}$

وبالتالي $u_{n+2} \le v_{n+2}$ 0,25

بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

اذن: $\forall n \in \mathbb{N}:$ 0,25

$$u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

اذن: (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ v_0

و $(v_n)_n$ متناقصة ومحدودة من الأعلى بـ u_0.

3/ نبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: 0,5

$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b-a)$$

من أجل $n=0$:

$$v_0 - u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 (b-a)$$ 0,5

$P(0)$ محققة،

نفرض أن $v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b-a)$

ونبين أن:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (b-a).$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n (b-a)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (b-a)$$ 1

$P(n+1)$ محققة

ملاحظة: $(v_n - u_n)_n$ هندسية أساسها $1/3$ وحدها الأول $b-a$)

نستنتج أن:

$$\lim_n (v_n - u_n) = \lim_n \left(\frac{1}{3}\right)^n (b-a) = 0$$ 0,5

اذن المتتاليتين $(u_n)_n$ و (v_n) لهما نفس النهاية l. 0

فالمتتاليتان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متجاورتان 0,5

نبين أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3}$$ 0,5

$$= u_n + v_n = a + b.$$ 0,5

فالمتتالية $(u_n + v_n)$ ثابتة.

$$\lim_n (u_n - v_n) = 0$$

$$l = l'$$ 1

و

$$l + l' = a + b$$

$$l = l' = \frac{a+b}{2}$$

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = \frac{a+b}{2}$$

التمرين الأول (8pts)

/1
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = 1^{\infty} \quad \text{ح ع ت}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+3-1} \quad (1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x+3}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{-1}$$

$$= e^{-4}.$$

/2
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} ; & x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \dfrac{1}{2} ; & x=0 \end{cases}$$

أ/ دراسة استمرارية الدالة f على D_f

لدينا: $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ مستمرة على $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ 0,5

يكفي أن نبين استمرار f عند 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad (1)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} = f(0)$$

(يمكن حساب النهاية باستعمال العدد المشتق أو قاعدة لوبيتال)

اذن f مستمرة عند 0 وبالتالي على $[-1,+\infty[$.

ب/ نبين أن f قابلة للاشتقاق عند 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2} \quad 0,25$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x} \quad \text{(لوبيتال)} \quad 0,25$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}}{2} = -\frac{1}{8} \quad \text{(لوبيتال)} \quad 0,25$$

اذن f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -\frac{1}{8}$ 0,5

/3
$$g(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$$

أ/ نبين أن g تقبل تابعا عكسيا g^{-1}

① g تابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ 0,5

② $\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{x}} > 0$ 0,5

اذن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ومنه يقبل تابعا عكسيا g^{-1};

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad 0,5$$

بيان عبارة g^{-1}

نضع :

$y = g^{-1}(x) \Rightarrow g(y) = x$

$\Rightarrow \dfrac{e^{2y}-1}{2e^{y}} = x$ 0,25

$\Rightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^{y} = 0$

$\Rightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$ 0,25

$\Delta' = x^2 + 1$ 0,25

بالتالي :

$$\begin{cases} e^{y} = x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ e^{y} = x - \sqrt{1+x^2} < 0 \end{cases}$$ 0,25 0,25

مرفوض

$\Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 0,25

$= g^{-1}(x)$.

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

1

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \dfrac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$