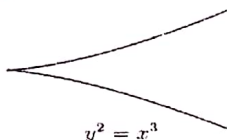


Examen de Rattrapage

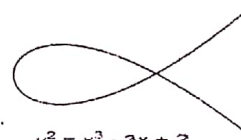
Tous les documents, autres que ceux fournis dans le sujet, sont interdits.

Exercice 1 :

1. Déterminer si les figures suivantes sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$:



(a) Figure 1



(b) Figure 2

2. Déterminer les paramètres $(p, q) \in \mathbb{N}$ pour lesquels l'ensemble :

$$S_{p,q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 - 3px + q\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

3. Déterminer si l'ensemble suivant est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 = z^2\}$$

Exercice 2 :

Soit $n \geq 1$ et l'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ définie comme suit :

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^T \cdot M = I_n\}, \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité de taille } n \times n.$$

- Montrer que l'ensemble des matrices symétriques, $S_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminez sa dimension.
- Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et indiquer sa dimension.
- Montrer que l'espace tangent en l'identité I_n à $O_n(\mathbb{R})$, $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))$ est égal à $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

بالتوفيق

Barème : 10-10 pts.

Corrigé type

*1 (1) Figure 1 n'est pas une sous-variété en raison de pt. de rebroussement de 1^{ère} espèce. (1)

Figure 2 n'est pas une sous-variété car elle présente d'un pt. double (1)

(2) Posons $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - x^3 + 3px - q$,
pour $m = (x, y) \in S_{p, q}$, on a : $\underset{m}{df} = (-3x^2 + 3p, 2y)$. (0,5)

le $\text{rg}(\underset{m}{df}) = 0$ ssi (0,5) $\left\{ \begin{array}{l} y^2 - x^3 + 3px - q = 0, \\ 2y = 0, \\ -3x^2 + 3p = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 - x^3 + 3px - q = 0, \\ y = 0, \\ x^2 = p. \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = p, \\ 2px = q. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^2 = 4p^3. \end{array} \right. \quad (0,5)$$

Donc si $q^2 \neq 4p^3$, le thm. du rang montre que $f^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de $\dim = 1$.

Sinon; pour $p = q = 0 \Rightarrow y^2 = x^3$ n'est pas une sous-variété en pt. $(0, 0)$ voir figure 1, (0,5)

pour $p = 1, q = 2 \Rightarrow y^2 = x^3 - 3x + 2$ n'est pas une sous-variété en pt. $(1, 0)$ voir figure 2. (0,5)

3) Méthode 1: Posons $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - z^2)$
 On calcule df_m pour $m = (x, y, z) \in S$; on obtient: (0.5)

$$df_m = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

Pour montrer que $\text{rg}(df) = 2$, il suffit de vérifier que ce système n'a pas de solutions sur S ; c-à-d:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ -4xz - 4xz = 0 \\ -4yz - 4yz = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$$

Si le système admet des solutions, alors: pour $z \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction} \Rightarrow \text{pas de solutions.}$$

$$\text{pour } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{C}^+ \Rightarrow \text{pas de solutions.}$$

Donc, dans tous les cas il n'existe pas de solutions $\Rightarrow \text{rg}(df) = 2$.

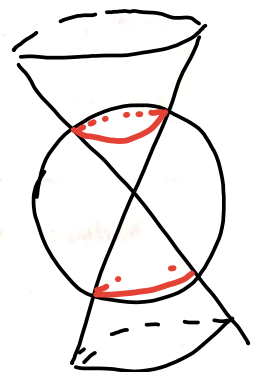
Depuis qu'on a $S = f^{-1}(\{0\})$ et $\text{rg}(df) = 2; \forall m \in S$ (1)

$\Rightarrow S$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de $\dim = 3 - 2 = 1$.

Méthode 2

• L'ensemble S est formé par l'intersection d'une sphère et d'un cône, ce qui en fait une union disjointe de deux cercles, donc une sous-variété de $\dim = 1$ de $\mathbb{R}^3$

(3)



consulter

Ex2

(voir le document de cours à la page 19)

(1) L'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace

(2) vectoriel de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, identifiée au sous-espace $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

donc est une sous-variété de classe ∞ de $M_n(\mathbb{R})$

et de $\dim = \frac{n(n+1)}{2}$

(1)

(2) Posons $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^T M$,

(1)

f est une fm. polynomiale des coefficients de la matrice, donc de classe ∞ et sa différentielle en M est donnée par:

$$(1) \quad d_M f(H) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M+tH) - f(M)}{t} = M^T H + H^T M; \quad \forall H \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $d_M f$ est surjective: en effet, soit $B \in S_n(\mathbb{R})$,

(1)

alors si $H = \frac{1}{2}MB$, on aura $d_M f(H) = \frac{1}{2}M^T(MB) + \frac{1}{2}(MB)^T M$

$$\Rightarrow d_M f(H) = \frac{1}{2} \underbrace{M^T M}_{I_n} B + \frac{1}{2} B^T \underbrace{M^T M}_{I_n} = B \quad (B^T = B)$$

$\Rightarrow f$ est une submersion sur $O_n(\mathbb{R})$.

(4)

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est la sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$

(1)

$$\text{Le dim} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

(1)

(3) on a $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$, alors $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) = \ker(d_{I_n} f)$,

en particulier si $M = I_n$, $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) = \ker(d_{I_n} f)$

(1)

$$\Rightarrow T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) / M^T + M = 0_n \right\}$$

(1)