

Niveau : L2 mathématiques
Contrôle d'algèbre 4 (rattrapage)

Le: 18/06/2023
Durée: 1h 30min

Exercice 1 (5 pts)

Soient $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 1x + 2y + 3z \\ f_2(x, y, z) = 2x + 3y + 4z \\ f_3(x, y, z) = 3x + 4y + 6z \end{cases}$, trois formes linéaires et soit $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

- 1/ Montrer que β^* est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
- 2/ Trouver la base préduale β de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (11 pts)

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

- 1/ Donner la forme bilinéaire b_q associée à q .
- 2/ Écrire la matrice de b_q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 3/ Est-ce que q est non dégénérée? Justifiez votre réponse.
- 4/ Donner une réduction de Gauss de la forme quadratique.
- 5/ Préciser une base orthogonale, $\text{sign}(q)$ et $\text{rg}(q)$.

Exercice 3 (4 pts)

Soit $\mathbb{R}^2$ un espace euclidien et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

Montrer que f est orthogonal.

La correction

Exercice 1 (5 pts)

1/ Montrer que $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base duale de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, on a $\det Q = -1 \neq 0$ donc $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont linéairement indépen-

dantes (1 pt) et comme on a $\dim(\mathbb{R}^3)^* = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ et on a 3 vecteurs linéairement indépendants donc $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base duale de $(\mathbb{R}^3)^*$. (1 pt)

2/ Déterminer une base préduale β de $\mathbb{R}^3$.

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} (\text{com} Q)^t \dots (0.5) \text{ donc } \text{com} Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \dots (0.5)$$

$$\text{et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dots (0.5), (Q^{-1})^t = Q^{-1} \dots (0.5)$$

et on déduit que la base préduale est $\beta = \{e_1 = (-2, 0, 1), e_2 = (0, 3, -2), e_3 = (1, -2, 1)\} \dots (1 \text{ pt})$

Exercice 2 (11 pts)

1/ La forme bilinéaire associée à q :

$$\begin{aligned} b_q(x, y) &= \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \dots (2 \text{ pts}) \end{aligned}$$

2/ La matrice associée à b_q est $M_{b_q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \dots (2 \text{ pts})$

3/ On a $\det M_{b_q} = -21 \neq 0$, donc q est non dégénérée.... (2 pts)

4/ La réduction de Gauss:..... (2 pts)

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3) + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - [x_2^2 + 2x_2(5x_3)] - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 21x_3^2 \end{aligned}$$

5/ La base orthogonale:..... (2 pts)

$$\text{Posons } \begin{cases} X = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ Y = x_2 + 5x_3 \\ Z = \sqrt{21}x_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = X - 2Y + \frac{7}{\sqrt{21}}Z \\ x_2 = Y - \frac{5}{\sqrt{21}}Z \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}Z \end{cases} \text{ donc } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{\sqrt{21}} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

On définit la base orthogonale pour q par

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{21}} \\ -\frac{5}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \right\}$$

$\text{sing}(q) = (2, 1)$ et $\text{rg}(q) = 2 + 1 = 3 \dots (1 \text{ pt})$

Exercice 3 (4 pts)

f est orthogonal $\iff \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle f(x_1, x_2), f(y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$
(1pt)

$$\begin{aligned} & \langle f(x_1, x_2), f(y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta), (y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta, y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \rangle \\ &= (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)(y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta) + (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)(y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \\ &= x_1 y_1 \cos^2 \theta - x_1 y_2 \cos \theta \sin \theta - x_2 y_1 \sin \theta \cos \theta + x_2 y_2 \sin^2 \theta + x_1 y_1 \sin^2 \theta + \\ & \quad x_1 y_2 \cos \theta \sin \theta + x_2 y_1 \sin \theta \cos \theta + x_2 y_2 \cos^2 \theta \\ &= x_1 y_1 \cos^2 \theta + x_2 y_2 \sin^2 \theta + x_1 y_1 \sin^2 \theta + x_2 y_2 \cos^2 \theta \\ &= x_1 y_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + x_2 y_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \end{aligned}$$

(3pts)

Donc f est orthogonal.