correction d'examen de rattrapage S3 logique

Exercice 1. (7pts)

(1) la table de vérité des formules

a) $\left[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)\right] \rightarrow q$ *2.5*

b) $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow \neg r \wedge \neg p) \wedge (p \vee r)$ 2.5

2) les formules sont tautologie et satisfiables 2

Exercice 2. (7pts)

a) $(\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}), (\forall n \in \mathbb{N}), \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$ 3.5

b) $(\forall n \in \mathbb{N}), 7$ *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}.$

Pour $n = 0$ *on a* 7 *divise* $(3^1 + 2^2)$, *la proposition est vraie pour* $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$, *et montrons que* 7 *divise* $3^{2n+3} + 2^{n+3}$.
On a 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *c-à-d il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$
on a

$$\begin{aligned}
3^{2n+3} + 2^{n+3} &= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times (7+2) + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 3^{2n+1} \times 2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2 \times 7k \\
&= 7\left(3^{2n+1} + 2k\right)
\end{aligned}$$ 3.5

et comme $(3^{2n+1} + 2k) \in \mathbb{N}$ *,on pose* $k' = 3^{2n+1} + 2k$, *donc*

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$$

d'où 7 *divise* $3^{2n+3} + 2^{n+3}$.
Conclusion : *D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

Exercice 3. (6pts)

1) Soit F={0, 1} p(F) et p(p(F)).

2) Soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} et soit les parties suivantes de E :
A = {1, 2, 3, 4} ; B = {4, 5, 6, 7} ; C = {1, 3, 5, 7} ; D = {2, 3, 4, 5, 6}.

Allons-y progressivement : $\mathcal{P}(\{0;1\}) = \{\emptyset;\{0\};\{1\};\{0;1\}\}$. 3

Puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0;1\})) = \{\emptyset;\{\emptyset\};\{\{0\}\};\{\{1\}\};\{\{0;1\}\};\{\emptyset;\{0\}\};\{\emptyset;\{1\}\};\{\emptyset;\{0,1\}\};\{\{0\};\{1\}\};$
$\{\{0\};\{0;1\}\};\{\{1\};\{0;1\}\};\{\emptyset;\{0\}\{1\}\};\{\emptyset;\{0\};\{0;1\}\};\{\emptyset;\{1\};\{0;1\}\};\{\{0\};\{1\};\{0;1\}\};\{\emptyset;\{0\};\{1\};\{0;1\}\}$

$$(A \cap B) \cup (C \cap D),\ (A \cup C) \cap (B \cup D) \text{ et } (A^c \cap D)^c \cap (B \cup C)^c.$$ 3