

on obtient

$\operatorname{Re}(x, y) = \operatorname{Re}(Tx, Ty)$. Dans le cas complexe, on remplace y par iy , on obtient

$$\operatorname{Im}(Tx, Ty) = \operatorname{Re}(-i(Tx, Ty)) = \operatorname{Re}(Tx, iTy) = \operatorname{Re}(Tx, Ty) = \operatorname{Re}(x, iy) = \operatorname{Im}(x, y)$$

donc $(Tx, Ty) = (x, y)$ i.e. $(T^*Tx, y) = (x, y) \forall (x, y) \in H^2(\mathbb{C})$ $T^*T = \operatorname{Id}_H$

2° a. $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \dots) \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n 0^2 + |x_i|^2 \in \mathbb{R}$. $\|Sx\| = \|x\|$

alors S est une isométrie

b. 1. calcul de S^* :

on a $(Sx, y) = (x, S^*y) \forall (x, y) \in (l^2)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} = \sum_{i=1}^n x_i S^*y_i, \forall (x, y) \in (l^2)^2$

si $S^*y_i = y_{i+1} \Rightarrow S^*x = (x_2, x_3, \dots)$. $\forall (x) = (x_i)_i \in l^2$.

b. 2. calcul de $S \cdot S^*$

$SS^* = S(x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$, mais $S \cdot S^* = \operatorname{Id}_{l^2}$ d'après 1°.

3° a. d'après 2b-2. on a S est une isométrie mais $S \cdot S \neq \operatorname{Id}_{l^2}$

b. T unitaire $\Rightarrow T$ est une isométrie + surjective.

T unitaire ssi $T^*T = \operatorname{Id}$ et $TT^* = \operatorname{Id}$. (1) $\Rightarrow T$ est injectif et (2) $\Rightarrow T$ est surjectif

et (1) $\Rightarrow T$ est une isométrie alors T unitaire $\Rightarrow T$ isométrie + surjective.

T est une isométrie + surjective $\Rightarrow T$ unitaire.

alors T est bijective et $T^{-1} = T^*$ on a $T^{-1}T = T \cdot T^{-1} = \operatorname{Id}$ comme on a vu

T isométrie $\Rightarrow T^*T = \operatorname{Id}$; on a forcément $T^* = T^{-1}$ ($T^* = (T^*(T \cdot T^{-1})) = T^{-1}$)

donc $T^*T = T \cdot T^* = \operatorname{Id}_H$ et T est unitaire.

Ex 3.5

1° $\operatorname{Im}(f)^\perp = 0$ ssi $\forall y \in \operatorname{Im}(f), \forall x \in \operatorname{Im}(f)^\perp, (f(x), y) = (x, f^*(y)) = 0 \Rightarrow f^*(y) = 0 \Rightarrow y = 0$

2° soit l'injection canonique $i: l^1 \rightarrow l^2 \Rightarrow i: l^2 \rightarrow l^1$, i est injectif car si $\|x\|_{l^1} = 0$ ($x = 0$ car $\|x\|_{l^1} = 0 \Rightarrow \|x\|_{l^2} = 0$)

on i n'est pas surjectif, car $\exists (x_i) = (\frac{1}{i})_{i \geq 1} : x_i \in l^2$ mais $(x_i) \notin l^1$.

3° $f: E \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow f^*(\mathbb{R}^2)^\perp = \mathbb{R}^2 \rightarrow E \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f^* \leq 2 \Rightarrow \operatorname{Im} f^*$ formé plus f^* est injectif $\Rightarrow \operatorname{Im} f^* = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im} f^*$ est formé $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ (f est surjectif).