

Ex 1: 30

2.5) A est continu $\Rightarrow A^*$ est bien défini $\Rightarrow \varphi$ est bien défini

$\forall x \in L^2, \forall y \in (L^2)^* \cong L^2$ on a : $(Ax, y) = (x, A^*y)$; $E = E^* = F = F^* = L^2$, alors

0.75 $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \stackrel{(*)}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |(Ax, y)| \stackrel{FF^*}{\leq} \sup_{\|x\| \leq 1} \|y\| \|Ax\| \stackrel{E, E^*}{\leq} \|A\| \dots \textcircled{1} \text{ (corollaire)}$

0.75 $\|A^*y\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|A^*y\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, A^*y)| = \sup_{\|y\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, y)| \leq \|A\| \dots \textcircled{2}$

0.6 $\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow \|A\| = \|A^*\| \Leftrightarrow \varphi$ est une isométrie.

2) 2° $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$? Soit $\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$ 0.25

on a d'après 1° $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |(Ax, y)| \Rightarrow \alpha \leq \|A\| \dots \textcircled{3}$ 0.25

d'après la dualité $\xrightarrow{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1}$ de polarisation on a :

$| (Ax, y) | = \frac{1}{4} | (A(x+y), \frac{x+y}{\beta_1}) + (A(x-y), \frac{x-y}{\beta_2}) | \|x+y\| + \|x-y\|^2$; $\beta_1 = \|x+y\|, \beta_2 = \|x-y\|$ 0.5

soit $| (Ax, y) | \leq \frac{1}{4} \alpha (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \leq \alpha$ 0.5

$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \Rightarrow \|A\| \leq \alpha \dots \textcircled{4}$ $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4} \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$ 0.25

$(Ax, x) = \int_{\mathbb{R}} A(x) \cdot x(x) dx$

3° Soit $f(x, y) = (Ax, y)$ et $\varphi(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$ d'après la dualité de polarisation $\Rightarrow (Ax, y) = (Ay, x) \Leftrightarrow (y, A^*x) = (A^*y, x)$ ssi $(A - A^*)x, y = 0 \forall x, y \in L^2$
 $\Leftrightarrow A - A^* = 0 \Leftrightarrow A = A^*$ 4.25

4° Soit λ une valeur propre de $A \Rightarrow \exists x \neq 0, Ax = \lambda x \Rightarrow (Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$; alors $\lambda \geq 0$ 1

4.5 b) Si λ est une valeur négative i.e $\lambda I - A$ est inversible ss A est inversible
 alors $A^* \cdot A \leq Id_L$ est compact d'après prop 1 ch 3 $\Rightarrow B(0, 1)$ est compact
 $\Rightarrow$ d'après le th de Riesz $d_{L^2} \leq 0$ (contradiction) $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(A)$.

Ex 2 : $i \Rightarrow ii$. $T^*T = Id \Rightarrow \forall (x, y) \in H^2$ on a $(T^*Tx, y) = (x, y) \Rightarrow (Tx, Ty) = (x, y)$ 0
 $ii \Rightarrow iii$: si on prend $x=y$ dans $\textcircled{1}$ on obtient $(Tx, Tx) = \|x\|^2$ $\Leftrightarrow T$ est isométrique
 $iii \Rightarrow i$: T est une isométrie $\Rightarrow \|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$, on le développe, on obtient
 $\|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\operatorname{Re}(Tx, Ty) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y)$, comme $\|Tx\| = \|x\|, \forall x$, 2.5