

Niveau : L2 mathématiques
Contrôle d'algèbre 3(Rattrapage)

Le: 13/06/2023
Durée: 1h 30min

Exercice 1: (4 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1/ Montrer que la matrice A est nilpotente.
 - 2/ Calculer $\exp A$
-

Exercice 2: (9 pts)

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- 1/ Trouver le polynôme caractéristique de M .
 - 2/a* Déterminer le polynôme minimal de M .
b* Est-ce que M est diagonalisable? Justifier votre réponse.
 - 3/ Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P , telle que $M = PDP^{-1}$.
 - 4/ Résoudre le système différentiel $X' = MX$.
-

Exercice 3: (7 pts)

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1/ Montrer que B est trigonalisable.
- 2/ Trouver une matrice triangulaire supérieur T , et une matrice inversible P , telle que $B = PTP^{-1}$.
- 3/ Calculer T^{2023} .

Solution du contrôle d'algèbre 3

Exercice 1: (4 pts)

$$1/ A^2 = \begin{pmatrix} 36 & 54 & 0 \\ -24 & -36 & 0 \\ -12 & -18 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = 0$$

$$2/ \exp A = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 22 & 30 & 3 \\ -14 & -19 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2: (9 pts)

$$\text{On a } M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1/ Le polynôme caractéristique de M ... (2pts)

$$C_M(x) = \det(M - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 4-x \end{pmatrix} = (4-x) \begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_M(x) = (4-x)[(4-x)^2 - 1] - [4-x-1] + [1-(4-x)]$$

$$C_M(x) = (4-x)(4-x-1)(4-x+1) - 4 + x + 1 + 1 - 4 + x$$

$$C_M(x) = (4-x)(3-x)(5-x) - 6 + 2x = (4-x)(3-x)(5-x) - 2(3-x)$$

$$C_M(x) = (3-x)[(4-x)(5-x) - 2] = (3-x) \underbrace{(x^2 - 9x + 18)}_{\Delta = 9}$$

$x_1 = 3 \text{ et } x_2 = 6$

$$C_M(x) = (3-x)(x-3)(x-6)$$

$$C_M(x) = -(x-3)^2(x-6)$$

2/a* Déterminer Le polynôme minimal de M ... (1pt).

$$m_M(x) = \begin{cases} P_1(x) = (x-3)(x-6) \\ \text{où} \\ P_1(x) = (x-3)^2(x-6) \end{cases}$$

$$P_1(M) = (M - 3I)(M - 6I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } m_M(x) = P_1(x) = (x-3)(x-6)$$

b* M est diagonalisable car Le polynôme minimal de M est scindé et à racines simples... (1pt)

3/ Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P , telle que $M = PDP^{-1}$.

Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = 3$ racine double et $\lambda_2 = 6$ racine simple.

Les vecteurs propres: soit $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Pour $\lambda_1 = 3 \dots (0.5)$

$$(M - 3I_3)V = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ \text{où bien } x_2 = -x_1 - x_3 \\ \text{où bien } x_3 = -x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} V = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) \\ \text{où bien } V = (x_1, -x_1 - x_3, x_3) = x_1(1, -1, 0) + x_3(0, -1, 1) \\ \text{où bien } V = (x_1, x_2, -x_2 - x_1) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$\text{C-à-d les espaces propres possible sont } \begin{cases} E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \\ \text{où bien } E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(1, -1, 0), (0, -1, 1)\} \\ \text{où bien } E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\} \end{cases}$$

Pour $\lambda_2 = 6 \dots (0.5)$

$$(M - 6I_3)V = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \dots (1) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \dots (2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \dots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) : on trouve $x_1 = x_2$ remplaçant dans (3) on trouve $x_3 = x_2$ donc $x_1 = x_2 = x_3$ alors $V = (x_1, x_1, x_1) = x_1(1, 1, 1)$ et $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \dots (0.5) \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où bien } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où bien } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots (0.5)$$

4/ Résoudre le système différentiel $X' = MX$.

On a $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} X_3$, / $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ alors la solution de $X' = MX$

$$\text{est } X(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{3t} - c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ c_1 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

Exercice 3:

1/ Montrons que B est trigonalisable. (1 pt)

On a $C_B(x) = \det(B - xI_3) = (3 - x)(x - 2)^2 = -(x - 3)(x - 2)^2$.

$C_B(x)$ admet trois racines donc la matrice est trigonalisable.

2/ Trouvons les matrices P et T . (3 pts)

$$\begin{cases} \text{pour } \lambda_1 = 3, \text{ racine simple, on a } (B - 3I_3)V = 0 \Rightarrow V = (0, 0, 1) \text{ donc } E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\} \\ \text{pour } \lambda_2 = 2, \text{ racine double on a } (B - 2I_3)V = 0 \Rightarrow V = (1, 2, -2) \text{ donc } E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{(1, 2, -2)\} \end{cases}$$

On choisir un autre vecteur pour compléter la base, soit $(0, 1, 0)$, donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\det P = 1, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\det P} (\text{com}P)^t = (\text{com}P)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } T = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3/ Calculons T^n . (3 pts)

$$T^n = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \right]^{2023}, \text{ on a } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } N \text{ est nilpotente}$$

d'indice 2.

$$\text{Alors } T^{2023} = \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k D^{2023-k} N^k = D^{2023} + 2023 D^{2022} N = \begin{pmatrix} 3^{2023} & 0 & 4(2023) 3^{2022} \\ 0 & 2^{2023} & (2023) 2^{2022} \\ 0 & 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}.$$

$$\text{tel que } n D^{n-1} N = \begin{pmatrix} (2023) 3^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & (2023) 2^{2022} & 0 \\ 0 & 0 & (2023) 2^{2022} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4(2023) 3^{2022} \\ 0 & 0 & (2023) 2^{2022} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } D^{2023} = \begin{pmatrix} 3^{2023} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2023} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}.$$