Université d'Oum El Bouaghi
Département MI
Module Introduction a la Topologie
Correction rattrapage L2
Le 15-06-2023

Exercice 01 *06 Points*
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble donné et τ la topologie sur E définie par

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}.$$

01 1. La partie $\{c\}$ n'est pas fermé car $C_{\{c\}} = \{a, b, d\} \notin \tau$
01.5 2. les fermés.sont $\{\emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, E\}$
02 3. $\overset{0}{\widehat{\{c\}}} = \phi$, $\overline{\{c\}} = \{c, d\}$
01.5 4. $A = \{b, d\}$
$\tau_A. = \{A \cap 0_i / 0_i \in \tau\} = \{\emptyset, B\{b\}, A\}$
Exercice 02 *06 Points*
0.5 - Un espace topologique est compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement fini.et **séparé**
0.5 - . Un espace topologique X est connexe si et seulement si X n'est pas la réunion de deux ouverts non vide **disjoints**
01 - Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application **continue**. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe
01 - Toute partie **fermé** d'un espace compact est compacte.
01 - Tout intervalle **fermé** et borné de R est compact.
01 - Toute suite **convergente** dans un espace métrique est une suite de Cauchy
01 - Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de **Cauchy** de X converge dans X.

Exercice 03 *08 Points*
Soit (E, d) un espace métrique.
02 1. On pose $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$.
d' est une distance sur E. puisque
a) $\sqrt{d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)}$
c)

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \Rightarrow \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, z) + d(z, y)} \\ &\Rightarrow \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, z) + d(z, y)} \leq \sqrt{d(x, z)} + \sqrt{d(z, y)} \end{aligned}$$

02 2. Soit $f : IR+ \to IR+$ une application strictement croissante, qui vérifie $f(0) = 0$ et

$$f(a + b) \leq f(a) + f(b), \forall a, b \in IR+ .$$

$\boxed{\textbf{02}}$a. On pose $\Delta(x,y) = f(d(x,y))$. Δ est une distance sur E.

On remarque que si $f(0) = 0$ et si f est croissante alors l'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution $x = 0$.

Ceci prouve la première propriété des distances.

La symétrie ne pose pas de problème particulier. L'inégalité triangulaire se déduit facilement de l'inégalité

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

$\boxed{\textbf{02}}$b. En utilisant la question (a).

si on pose $d"(x,y) = d(x,y)/(1 + d(x,y))$, $\forall x, y \in E$, on pose

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

alors d'' est une distance sur E. et de s'assurer qu'elle vérifie toutes les propriétés de la question 2a.

02 c. On suppose d'abord $a \geq 1$, on a $x \in B_{d"}(0,a)$ si et seulement si$\frac{|x|}{1+|x|} \leq 1$. Or, cette

dernière égalité est toujours vérifiée. Par conséquent, on a $B_{d"}(0,a) = IR$ dans ce cas.

Si$a < 1$, alors l'inégalitéest équivalente à $]\frac{-a}{1-a}, \frac{a}{1-a}[$ qui est donc la boule $B_{d"}(0,a)$ dans ce cas.