Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi Année 2022/2023
Faculté des Sciences Exactes, Science de la Nature et de la Vie
Département Mathématiques et informatique $2^{ème}$ année Durée: 1 h et 30 min

Analyse numérique 1 (Rattrapage)

Exercice 1 (06 pts): 1. Trouvez la racine réelle de l'équation $f(x) = x^2 - 10\log_{10} x - 3 = 0$ correcte à cinq décimales en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

2. Donnez l'algorithme de la méthode Newton-Raphson.

Exercice 2 (08 pts): Le tableau suivant donne les données démographiques de l'Indonsie de l'année 1981 à 2011.

Année (x)	1981	1991	2001	2011
Population (y)	68.3329	84.6421	102.8737	121.0193

1. Utilisez l'interpolation de Lagrange pour trouver la population approximative en 2006.
2. Utilisez la formule de différence divisée de Newton pour trouver la population approximative en 2006.

Exercice 3 (06 pts): Évaluer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} dx$ correct à cinq chiffres significatifs prenant $n = 6$ sous-intervalles, en utilisant ce qui suit :

1. Règle trapézoïdale
2. La règle du tiers de Simpson.

Bon courage

Prof. Abdelfatah Bouziani

Solution du Contrôle de rattrapage S1

Exercice 1 (06 pts): 1. Soit $f(x) = x^2 - 10\log_{10} x - 3 = 0$

Nous appliquons d'abord la méthode de tabulation afin de trouver l'emplacement de la valeur approximative de la racine

x	$f(x)$
2	-2.0103
3	1.22879

On note que $f(2) < 0$ et $f(3) > 0$. Ainsi, l'équation donnée change de signe dans l'intervalle $[2,3]$. Par conséquent, il existe au moins une racine réelle de l'équation dans $[2,3]$.

Maintenant, $f'(x) = 2x - \left(\frac{10}{x\ln 10}\right)$. Nous choisissons l'approximation initiale $x_0 = 2$.

Les itérations successives générées par l'équation

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ont été présentées dans le tableau:

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$
0	3.0994091	1.69355
1	2.7464103	0.155115
2	2.7067541	0.00202975
3	2.7062212	$3.68133E-7$
4	2.7062211	$1.24345E-14$

Par conséquent, la racine réelle requise de l'équation donnée est 2.70622 correcte à cinq décimales.

2. Algorithme pour la méthode Newton-Raphson

Étape 1 : Démarrez le programme.

Étape 2 : Définir les fonctions $f(x)$, $f'(x)$.

Étape 3 : Entrez l'estimation initiale de la racine (disons x_0) et définissez $n = 0$.

Étape 4 : Calculer la racines approchée x_1, telle que $x_1 = x_0 - [f(x_0)/f'(x_0)]$

Étape 5 : Si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$, où ε est une précision prescrite, passez à l'étape 7.

Étape 6 : Définissez $n = n + 1$ et passez à l'étape 4.

Étape 7 : Imprimez la valeur de x_1 qui est la racine requise.

Étape 8 : Arrêtez le programme.

Exercice 3 (08 pts): 1. Les quatre points de données du tableau sont les suivants

$x_0 = 1981$	$x_1 = 1991$	$x_2 = 2001$	$x_3 = 2011$
$f(x_0) = 68.3329$	$f(x_1) = 84.6421$	$f(x_2) = 102.8737$	$f(x_3) = 121.0193$

$$P(2006)=(68.3329)\frac{(2006-1991)(2006-2001)(2006-2011)}{(1981-1991)(1981-2001)(1981-2011)}$$
$$+(84.6421)\frac{(2006-1981)(2006-2001)(2006-2011)}{(1991-1981)(1991-2001)(1991-2011)}$$
$$+(102.8737)\frac{(2006-1981)(2006-1991)(2006-2011)}{(2001-1981)(2001-1991)(2001-2011)}$$
$$+(121.0193)\frac{(2006-1981)(2006-1991)(2006-2001)}{(2011-1981)(2011-1991)(2011-2001)}$$
$$P(2006)=(68.3329)\left(\frac{1}{16}\right)+(84.6421)\left(\frac{-5}{16}\right)+(102.8737)\left(\frac{15}{16}\right)+(121.0193)\left(\frac{5}{16}\right)$$
$$P(2006)=112.082775$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $n=3$, est donné par

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3) \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0) \\
&\quad +\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1) \\
&\quad +\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) \\
&\quad +\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3).
\end{aligned}$$

En calculant ce polynôme en $x=2006$, on a

La population approximative de l'année 2006 est de 112.082775.

2. Le tableau des différences divisées pour ces points de données est donné par

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_i]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
1981	68.3329			
		1.63092		
1991	84.6421		0.009612	
		1.82316		−0.0003347733
2001	102.8737		−0.00043	
		1.81456		
2011	121.0193			

La formule de différence divisée de Newton avec $n=3$ est de la forme suivante

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$P(2006) = 68.3329 + (1.63092)(2006 - 1981) + (0.009612)(2006 - 1981)(2006 - 1991)$$
$$+ (-0.000334733)(2006 - 1981)(2006 - 1991)(2006 - 2001)$$
$$P(2006) = 112.082775$$

Exercice 3 (06 pts): Ici, la taille de pas $h = \pi/12$. Nous tabulons d'abord les valeurs fonctionnelles de $f(x)$ dans le tableau suivant :

x	y
0	0
$\frac{\pi}{12}$	0.5087426
$\frac{\pi}{6}$	0.7071068
$\frac{\pi}{4}$	0.8408964
$\frac{\pi}{3}$	0.9306048
$\frac{5\pi}{12}$	0.9828152
$\frac{\pi}{2}$	1

1. En utilisant la règle trapézoïdale, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{Trap.} &= \frac{\pi}{24}\left[0 + 2 \times (0.5087426 + 0.7071068 + 0.8408964 + 0.9306048 + 0.9828152) + 1\right] \\ &= 1.1703. \end{aligned}$$

2. En utilisant la règle du tiers de Simpson, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{\pi}{36}\left[\begin{array}{c} 0 + 4 \times (0.5087426 + 0.8408964 + 0.9828152) \\ +2 \times (0.7071068 + 0.9306048) + 1 \end{array}\right] \\ &= 1.1873. \end{aligned}$$