**Université L’arbi Ben Mhidi OEB**

**Année universitaire 2022/2023**

**Examen : Relativité Restreinte**

 **3ème Année physique fondamentale**

1. **Moment cinétique**

**1.1** On considère un système quantique sans spin , de moment cinétique orbital $\vec{L}$ . On notera les états propres communs de $\left(L^{2},L\_{z}\right)$par $\left|l,\right.\left.m\right〉$**;** Calculer les commutateurs $\left[L^{2},L\_{-}\right] $et $\left[L^{2},L\_{+}\right]$ ainsi que $\left[L\_{z},L\_{+}\right] $et $\left[L\_{z},L\_{-}\right]$

* 1. Exprimez $L\_{+}L\_{-}$et$ L\_{-}L\_{+}$en fonction de $L^{2}$et $L\_{z}$puis $\left‖L\_{\pm }\right.\left.\left|l,\right.\left.m\right〉\right‖^{2}$et enfin déduire la relation suivante : $L\_{\pm }\left|l,\right.\left.m\right〉=ℏ\sqrt{l\left(l+1\right)-m\left(m\pm 1\right)} \left|l,\right.\left.m\pm 1\right〉$
	2. Pour $=1$ , calculer dans la base $\left\{\left|l,\right.\left.m\right〉\right\}$**,** les éléments des matrices $L^{2},L\_{z},L\_{+} $et$L\_{-}$ **.**
	3. On suppose maintenant que l’hamiltonien du système s’écrit :

$H\_{0}=ω\_{0}\left(L\_{z}-\frac{α}{ℏ}L\_{z}^{2}\right)$ ; ou $α$ est une constante réelle avec $α\geq 0$ et $ω\_{0} $est une constante réelle ayant la dimension d’une pulsation . Déterminer les états propres de $H\_{0}$ ainsi que les niveaux d’énergies. Pour quelle valeur de $α$ il y a une dégénérescence

* 1. A l’instant$t=0 $**,** l’état quantique du systèmeest décrit par le ket :

$$\left|Ѱ\right.\left.\left(0\right)\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|1,\right.\left.-1\right〉+\left|1,\right.\left.0\right〉\right\}$$

Onsuppose que $=1$**,** si on mesure$L^{2},L\_{z}$et$L\_{z}^{2}$à cet instant , quels résultats peut-on obtenir et avec quelles probabilités**?** $\left(question facultative\right)$

**Indication : La probabilité d’obtenir lors d’une mesure la valeur propre** $a\_{n}$ **associée à l’état normé** $\left|\right.\left.u\_{n}\right〉$ **est donnée par 𝒫**$\left(a\_{n}\right)=\left|\left⟨Ѱ\right⟩\right|^{2}$

1. **Théorie de Perturbation indépendante du temps**

**2.1** On considère un oscillateur harmonique à 1 dimension : $V\left(x\right)=\frac{1}{2}mωx^{2}$ ; Sachant que : $X=\sqrt{\frac{mω}{ℏ}}x$ ; $P\_{x}=\frac{1}{\sqrt{mℏω}}p\_{x}$ et que $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X+iP\_{x}\right)$ ;

$a^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X-iP\_{x}\right)$, calculer $\left[X,P\_{x}\right]$ et $\left[a,a^{+}\right]$ .

* 1. Rappeler l’action des deux opérateurs $a$ et $a^{+}$ sur un état représenté par le ket propre $\left|\right.\left.n\right〉$ .
	2. Sachant que : $ H=\frac{1}{ℏω}H$ , écrire $H$ en fonction de $a^{+}$et $a$ .
	3. On applique à ce même oscillateur harmonique une petite perturbation de la forme de $W=λx^{3}$. Déterminer la première et la deuxième correction à l’énergie on fonction de **n** $\left(E\_{n}^{\left(1\right)}, E\_{n}^{\left(2\right)} \right)$**.**
1. **Potentiel central**

**3.1** On va étudier dans ce qui suit d’étudier le deuton, système constitué par l’interaction d’un neutron et d’un proton. On s’intéressera uniquement aux états $s$ $\left(l=0\right)$ ; Le potentiel qui lie ce système de la forme : $V\left(x\right)=-Ae^{-\frac{r}{a}}. $Ecrire l’équation de Schrödinger radiale dans le cas du deuton.

**3.2** En pose$χ\left(r\right)=rR\left(r\right), $trouver l’équation réduite .

**3.3** Ecrirecettel’équation en introduisant la nouvelle variable $y=e^{-\frac{r}{2a}}$et montrer qu’elle se met sous forme d’une équation de Bessel.

**3.4** Montrerque le changementde variable$ρ=\left(\frac{8μAa^{2}}{ℏ^{2}}\right)y$conduit à l’équation de Bessel sphérique

**3.5** En déduire la solutionde cette équation **.**

**Indication : Equation de Bessel**$χ^{"}+\frac{1}{y}χ^{'}+\left(c^{2}-\frac{b^{2}}{y^{2}}\right)χ=0 $**, Equation de Bessel sphérique** $χ^{"}+\frac{1}{ρ}χ^{'}+\left(1^{2}-\frac{b^{2}}{ρ^{2}}\right)χ=0$

 **Bonne Chance**

**Enseignante :F . ZEROUAL**