التصحيح النموذجي لامتحان مادة القياس والاحتمال
السنة الجامعية: 2022/2023

(7pts)

التمرين الأول: (4pts)

(I)

1) خاطئة، يجب تحقق الشرط: $\mu(A) < +\infty$ (1)

2) خاطئة، قياس لوبيغ معرّف على عشيرة لوبيغ (1.5)

3) خاطئة، الاحتمال هو حالة خاصة من القياسات الموجبة. (1.5)

(II) حسب ما تم تناوله من نظريات

1) نظرية التقارب الرتيب: (T.C.M) (1.5)

يجب تحقق الشرط التالي: (f_n) متزايدة وموجبة ومتقاربة نحو f.

2) نظرية التقارب المهيمن: (T.C.D) (1.5)

يجب تحقق الشروط:

① وجود تطبيق g من E في $\overline{\mathbb{R}}_+$ بحيث: $\forall n \geq 1, \forall x \in E: |f_n(x)| \leq g(x)$

② وجود تطبيق f من E في $\overline{\mathbb{R}}_+$ بحيث: $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ μ-pp

التمرين الثاني:

(1) بيان أن $f|_A$ هو $(E \cap A, E^*)$-قابل القياس

ليكن $\mathcal{J}$ التباين الفائوني لـ A في E (تعريف هذا التطبيق)

لدينا: $f^{-1}(\Sigma) = \{ f^{-1}(B);\ B \in \Sigma \} = \{ B \cap A;\ B \in \Sigma \}$

$= \Sigma \cap A$

وعليه f هو تطبيق $(E \cap A, \Sigma^*)$-قابل القياس. (1)

وبما أن (Σ, Σ^*) قابل للقياس فإن f و $f|_A = f \circ f$

$f|_A$ هو $(\Sigma \cap A, \Sigma^A)$ قابل للقياس. (1)

II (1) (2)

$$A \subset \mathbb{R},\ \mu^*(A) = \inf_{\{I_n\} \in \mathcal{J}(A)} \left\{ \sum \ell(I_n) \right\}$$

بيان أن المقدار μ^* على المجالات المفتوحة من $\mathbb{R}$ هو نفسه كطول الطول التقليدي: وجب الإثبات من أجل كل مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ لدينا: $\mu^*(I) = \ell(I)$

أ. لدينا من أجل كل متتالية $\{I_n\}_n$ من $\mathcal{J}_I$ فإن $I \subset \bigcup_n I_n$ (0,5) وعليه

$$\ell(I) \leq \ell\left(\bigcup_{n \geq 1} I_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \quad (1)$$

إذن

$$\ell(I) \leq \inf_{\{I_n\} \in \mathcal{J}_I} \left\{ \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) \right\} = \mu^*(I). \quad (1,0)$$

(3,5)

ب. لتكن $\{I_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي:

$$I_1 = I,\ \forall n \geq 2 : I_n = \emptyset \quad (1)$$

إذن $\{I_n\}_n \in \mathcal{J}(I)$ (1) ومنه

$$\mu^*(I) \leq \sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = \ell(I_1) + \sum_{n \geq 2} \ell(I_n) = \ell(I_1) = \ell(I). \quad (1,5)$$

إذن: $\mu^*(I) \leq \ell(I)$

من (أ) و (ب) نستنتج أن:

$$\mu^*(I) = \mu^*(I)$$

(4pts)

التمرين الثالث:

بيان وجود متتالية $\{B_n\}_{n=1}^{p}$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى بحيث $\bigcup_{n=1}^{p} A_n = \bigcup_{n=1}^{p} B_n$.

① لدينا $B_1 = A_1$ و $B_m = A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \; ; \forall m \geq 2$

إذن: $B_m \subset A_m$ و $B_m \in \Sigma \; ; \forall m \geq 1$ 0,1

* لتكن $m, m' \in [1,p]$ حيث: $m \neq m'$ (مثلا $m < m'$)

$$(B_m \cap B_{m'}) \subset \left(A_m \cap \left(A_{m'} \setminus \bigcup_{i=1}^{m'-1} A_i\right)\right) = A_m \cap \left(A_{m'} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m'-1} A_i\right)^c\right)$$

$$= A_m \cap \left(A_{m'} \cap \left(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_m^c \cap \dots \cap A_{m'-1}^c\right)\right)$$

$$\subset A_m \cap A_m^c = \emptyset$$

ومنه: $\{B_n\}_{n=1}^{p}$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى.

② لنثبت أن $\bigcup_{n=1}^{p} B_n = \bigcup_{n=1}^{p} A_n$

④ لدينا: $\forall n = \overline{1,p} : B_n \subset A_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{p} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{p} A_n$ 0,5

⑤ $x \in \bigcup_{n=1}^{p} A_n \Rightarrow \exists r \; ; \; 1 \leq r \leq p \; ; \; x \in A_r$

نضع $n_0 = \min\{n \in [1,p] \; ; \; x \in A_n\}$

نميز حالتين:

① $n_0 = 1$ ، أي $x \in A_1 = B_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{p} B_n$

② $n_0 \neq 1 \Rightarrow \forall n : 1 \leq n < n_0 \; , \; x \notin A_n$

$\Rightarrow x \in A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0-1} A_n = B_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{p} B_n$

2

3

$\Rightarrow$ إذن $x \in \bigcup_{n=1}^{p} B_n$

وعليه

$$\bigcup_{n=1}^{p} A_n = \bigcup_{n=1}^{p} B_n$$