جامعة العربي بن مهيدي –أم البواقي-　　　　　　　　　　**السنة الجامعية 2025-2026**

كلية العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير　　　　　　　　**المستوى : سنة أولى**

قسم الجذع مشترك　　　　　　　　　　**المدة : ساعة و نصف**

إمتحان الدورة العادية في مقياس الرياضيات 2

التمرين الأول : (4 نقاط)

أوجد حلول المعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

$$y'' + y' - 2y = x^2 - x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

لتكن f دالة ذات متغيرين حقيقيين معرفة ب :

$$f(x,y) = \frac{2x-y}{-y-2x+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

1) أحسب $f(1,-2), f(0,-1)$

2) أوجد ميدان تعريف الدالة f

3) أحسب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f

4) أحسب $f''_{xx}\ ,\ f''_{yy}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

لتكن المصفوفة المعرفة بالعلاقة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أحسب : $A^2 \ , \det(A) \ , Tr(A), A^t$

2) أحسب : $A^2 - 8A - 2I_3$ حيث I_3 هي مصفوفة الوحدة

3) استنتج أن A قابلة للقلب و عين مقلوبها

ا

التمرين الرابع : (6 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية

$$\begin{cases} 8x + 2z = -8 \\ 4x + 2y = 0 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

1) اكتب الشكل المصفوفي للجملة

2) حل الجملة بطريقة كرامر المباشرة أو بطريقة المقلوب

3) حل الجملة بطريقة غوص

الحل النموذجي

حل التمرين الأول : (4 نقاط)

ايجاد حلول المعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

$$y'' + y' - 2y = x^2 - x + 1 ....(1)$$

$$y = y_p + y_h$$

1) ايجاد y_h الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad , \qquad r^2 + r - 2 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac\ , \Delta = 1^2 - 4.1.(-2)\ ,\ \Delta = 9$..................(0.5)

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2,\ \ r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$.................(0.5)

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$..................(0.5)

2) ايجاد y_p الحل الخاص للمعادلة الغير متجانسة

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad , \quad c = -2 \neq 0$$

اذن الحل الخاص من الدرجة الثانية

$y_p = ax^2 + bx + c \qquad , \qquad y'_p = 2ax + b \ , \qquad y''_p = 2a$.........(0.5)

نعوض في 1 نجد

$$y'' + y' - 2y = x^2 - x + 1$$

$$2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - x + 1$$

$$2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - x + 1$$

$-2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c = x^2 - x + 1$.......(0.5)

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = -1 \\ 2a + b - 2c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2b = -1 \Rightarrow \ -1 - 2b = -1 \Rightarrow \ b = 0 \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 2c = 1 \ \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$ ....(0.5)

$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.........(0.5)

$y =-\frac{1}{2}x^2 - 1 + c_1e^{-2x} + c_2e^{x}$..........(0.5)

حل التمرين الثاني : (5 نقاط)

$$f(x,y) = \frac{2x-y}{-y-2x+1} \text{ .... } (2)$$

1) حساب $f(1,-2), f(0,-1)$

$f(0,-1) = \frac{2(0)-(-1)}{-(-1)-2(0)+1} = \frac{1}{2}$.........(0.5)

$f(1,-2) = \frac{2(1)-(-2)}{-(-2)-2(1)+1} = 4$ ....(0.5)

2) ايجاد ميدان تعريف الدالة f

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -y-2x+1 \neq 0\}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq -2x+1\}$ ....(1)

D_f هي جميع نقاط المستوي ماعدا المستقيم الذي معادلته

$$y =- 2x + 1$$

3) حساب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f

$$\boldsymbol{f'_x(x,y)} = \frac{(2x-y)'_x(-y-2x+1)-(-y-2x+1)'_x(2x-y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2(-y-2x+1)-(-2)(2x-y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{(-2y-4x+2)+(4x-2y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$\boldsymbol{f'_x(x,y) = \frac{(-4y+2)}{(-y-2x+1)^2}}$**............(0.75)**

$$\boldsymbol{f'_y(x,y)} = \frac{(2x-y)'_y(-y-2x+1)-(-y-2x+1)'_y(2x-y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-1(-y-2x+1)-(-1)(2x-y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(y+2x-1)+(2x-y)}{(-y-2x+1)^2}$$

$\boldsymbol{f'_y(x,y) = \frac{(4x-1)}{(-y-2x+1)^2}}$**................(0.75)**

4) حساب f''_{xx} , f''_{yy}

$$f''_{xx}(x,y) = \left(\frac{(-4y+2)}{(-y-2x+1)^2}\right)'_x$$

$$f''_{xx}(x,y) = \left(\frac{(-4y+2)_x((-y-2x+1)^2) - ((-y-2x+1)^2)_x(-4y+2)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$

$$f''_{xx}(x,y) = \left(\frac{0((-y-2x+1)^2) - 2(-2)(-y-2x+1)(-4y+2)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$

$$f''_{xx}(x,y) = \left(\frac{4(4y^2-6y+8xy-4x+2)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$ ....(0.75)

$$f''_{yy}(x,y) = \left(\frac{(4x-1)}{(-y-2x+1)^2}\right)'_x$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left(\frac{(4x-1)'_y((-y-2x+1)^2) - ((-y-2x+1)^2)'_y(4x-1)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left(\frac{0((-y-2x+1)^2) - 2(-1)(-y-2x+1)(4x-1)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left(\frac{2(-8x^2+6x+y-4xy-1)}{(-y-2x+1)^4}\right)$$ ....(0.75)

حل التمرين الثالث : (5 نقاط)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) حساب : A^t, $\mathrm{Tr}(A)$, $\det(A)$, A^2

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ .... (0.5)

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + 0 = 0$$ ....(0.5)

$$detA = \begin{vmatrix} 02202 \\ 20220 \\ 22022 \end{vmatrix}$$ =0.0.0+2.2.2+2.2.2-2.0.2-0.2.2-2.2.0=16.........(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.0+2.2+2.2) & (0.2+2.0+2.2) & (0.2+2.2+2.0) \\ (2.0+0.2+2.2) & (2.2+0.0+2.2) & (2.2+0.2+2.0) \\ (2.0+2.2+0.2) & (2.2+2.0+0.2) & (2.2+2.2+0.0) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$ ......(1)

2)أحسب : $A^2-8A-2I_3$ حيث I_3 هي مصفوفة الوحدة

$$A^2=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix},\quad -8A=\begin{pmatrix}0&-16&-16\\-16&0&-16\\-16&-16&0\end{pmatrix}\quad -2I_3=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$A^2-8A-2I_3=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-16&-16\\-16&0&-16\\-16&-16&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6&-12&-12\\-12&6&-12\\-12&-12&6\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$=-6\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-6A+6I_3$$ ....(1)

3) استنتاج أن A قابلة للقلب و عين مقلوبها

بما ان $detA\neq 0$ فان A قابلة للقلب ....(0.5)

$$A^2-8A-2I_3=-6A+6I_3\Longrightarrow A^2-2A=8I_3\Longrightarrow \frac{1}{8}(A^2-2A)=I_3\Longrightarrow A\left[\frac{1}{8}(A-2I_3)\right]=I_3$$

اذن $A^{-1}=\left[\frac{1}{8}(A-2I_3)\right]$ ....(0.5)

<u>حل التمرين الرابع</u> : (6 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية

$$\begin{cases}8x+2z=-8\\4x+2y=0\\2x+y-z=8\end{cases}$$ ....(3)

1) كتابة الشكل المصفوفي للجملة A-X=B

$$\begin{pmatrix}8&0&2\\4&2&0\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\8\end{pmatrix}$$ ....(1)

2) حل الجملة بطريقة كرامر المباشرة أو بطريقة المقلوب

$$detA=\begin{vmatrix}8&0&2&8&0\\4&2&0&4&2\\2&1&-1&2&1\end{vmatrix}=8.2.(-1)+0.0.2+2.4.1-2.2.2-8.0.1-0.4.(-1)$$

=-16+0+8-8-0-0=-16≠0.......(1)

اذن الجملة تقبل حلا

طريقة كرامر المباشرة

$$\det A_1=\begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-8.2.(-1)+0.0.8+2.0.1-2.2.8-(-8).0.1-0.0.(-1)=$$

=16+0+0-32-0-0=-16

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 8 & -8 & 2 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=8.0.(-1)+(-8).0.2+2.4.8-2.0.2-8.0.8-(-8)4.(-1)$$

=0+0+64-0-0-32=32

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 8 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8.2.8+0.0.2+-8.4.1-(-8).2.2-8.0.1-0.4.8$$

=128+0-32+32-0-0=128

$$\begin{cases} x=\frac{-16}{-16}=1 \\ y=\frac{32}{-16}=-2 \\ z=\frac{128}{-16}=-8 \end{cases} \qquad X=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$ ....(2)

طريقة المقلوب

$$AX=B \implies X=A^{-1}B$$

حساب A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^t$$

$$\mathrm{com}A=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -12 & -8 \\ -4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \implies (comA)^t=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 4 & -12 & 8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 4 & -12 & 8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 4 & -12 & 8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}=$$

$$X=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -2(-8)+2.0-4.8 \\ 4(-8)-12.0+8.8 \\ 0(-8)-8.0+16.8 \end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -16 \\ 32 \\ 128 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$ ....(2)

3) حل الجملة بطريقة غوص

$$\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 & | -8 \\ 4 & 2 & 0 & | \ 0 \\ 2 & 1 & -1 & | \ 8 \end{pmatrix}\right) \underset{\begin{pmatrix} L_1 - 2L_2 = L'_2 \\ L_1 - 4L_3 = L'_3 \end{pmatrix}}{\overset{L_1 = L'_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 & | -8 \\ 0 & -4 & 2 & | -8 \\ 0 & -4 & 6 & | -40 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L'_2 - L'_3 = L''_3}{\overset{\begin{pmatrix} L'_1 = L''_1 \\ L'_2 = L''_2 \end{pmatrix}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 & | -8 \\ 0 & -4 & 2 & | -8 \\ 0 & 0 & -4 & | \ 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x + 0y + 2z = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ -4y + 2z = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ -4z = 32 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3 \end{cases}$$

من 1 نجد $\boldsymbol{z = \frac{32}{-4} = -8}$

نعوض في 2 نجد $-4y + 2(8-) = -8$

$$-4y = -8 + 16 \quad \rightarrow -4y = 8 \quad \longrightarrow \boldsymbol{y = -2}$$

نعوض في 1نجد

$$8x + 0y + 2z = -8 \ \longrightarrow \ 8x + 0y + 2(-8) = -8 \ \longrightarrow 8x = -8 + 16 \longrightarrow \ 8x = 8 \longrightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

X= $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$..............(2)