جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي-
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية
الاستاذ : بوزيان محمد

السنة الجامعية: 2025 - 2026
المستوى: اولى ماستر
التخصص: اقتصاد كمي
المدة: ساعة ونصف

الامتحان السداسي الثاني في مقياس الطرق الامثلية

التمرين الاول :

لتكن المجموعة B معرفة في ^{2} :

$$B=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ \frac{1}{2}(y-x^2) \geq 0\}.$$

المطلوب:

1- ادرس خاصية التحدب (Convexité) للمجموعة B مع تبرير الإجابة بدقة.

التمرين الثاني:

لتكن الدالة F معرفة على R^2 كما يلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

المطلوب:

1- حدد طبيعة الدالة F (محدبة، مقعرة)، أو غير ذلك.
2- هل تقبل الدالة قيمة دنيا؟ إذا كان الجواب نعم، حددها.

التمرين الثالث:

لتكن مسألة الامثلية غير الخطية التالية:

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x1^2 + x2^2 + x3^2 + x4^2 \\ \qquad\qquad S/C \\ x1 + 2x2 + 3x3 + 5x4 - 10 = 0 \\ x1 + 2x2 + 5x3 + 6x4 - 15 = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- حل المسألة باستخدام احدى طرق الامثلية الملائمة باختيار المتغيرين x2 و x4 كمتغيرين مستقلين- ماذا تستنتج ؟
2- أعد حل نفس المسألة باختيار المتغيرين x1 و x3 كمتغيرين مستقلين.
3- قارن بين الطريقتين وعلّق على النتائج.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي-
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية
الاستاذ : بوزيان محمد

السنة الجامعية: 2025 - 2026
المستوى: اولى ماستر
التخصص: اقتصاد كمي
المدة: ساعة ونصف

الامتحان السداسي الثاني في مقياس الطرق الامثلية

حل التمرين الاول : 06نقطة

- كتابة خاصية المجموعات المحدبة .... 01, نقطة

$$\forall X_1, X_2 \in B, \forall \lambda \in [0,1], \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in B$$

Par conséquent, B est un ensemble convexe.

.... 01,5 نقاط

Soit $X_1 \in B$, alors $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_1 - x_1^2) \geq 0$

Soit $X_2 \in B$, alors $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_2 - x_2^2) \geq 0.$

.... 01 نقطة

D'autre part, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$,
alors $\forall X_1, X_2 \in B, \forall \lambda \in [0,1]$, on a

.... 02 نقطة

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^2) &= \frac{1}{2}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)-\frac{1}{2}(\lambda x_1)^2-\frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2-\lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2)-\frac{1}{2}(\lambda x_1)^2-\frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2-\lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_1^2+\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_2^2-\lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2\geq 0\end{aligned}$$

- ومنه نستنتج ان المجموعة Bمحدبة ....0.5 نقطة

حل التمرين الثاني : 06نقاط

-1 .... 01,5 نقطة

(a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x+2y+12\\2x+2y+4\end{pmatrix}$$

On cherche l'unique point critique (a,b) de f,

$$\begin{cases}4x+2y+12=0\\2x+2y+4=0\end{cases}$$

Ce système admet une seule solution $(x,y)=(-4,2)$, alors f admet un seul point critique $(a,b)=(-4,2)$.

-2 .... 01,5 نقطة

(b) **On calcule la matrice Hessienne de f**

$$Hess_f(x,y)=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(a,b)=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}$$

01 نقطة .... -3

(c) On a $\det(Hess_f(-4,2)) = 4 > 0$ et $\partial_{xx}f(-4,2) = 4 > 0$, donc la matrice $Hess_f(a,b)$ est définie positive.

نقطة 02, ... -4

On cherche l'unique point critique (a,b) de f,

$$\begin{cases} 4x + 2y + 12 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution $(x,y) = (-4,2)$, alors f admet un seul point critique $(a,b) = (-4,2)$.

En déduire que f admet un minimum local m au point $(a,b) = (-4,2)$, avec $m = f(-4,2) = 4$.

حل التمرين الثالث :.. 08 نقاط

نقطة 01,5 .... -1

Posons respectivement les variables dépendantes et indépendantes $Y = (x_1, x_2)$ et $Z = (x_3, x_4)$.

La matrice jacobienne $J = \nabla_y g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

J^{-1} n'existe pas, par conséquent le gradient contraint n'existe pas. On n'aboutit pas à une solution réalisable.

Posons maintenant $Y = (x_2, x_4)$ et $Z = (x_1, x_3)$.

نقطة04 .... -1

$$J=\nabla_Y g=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_4}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}\qquad J^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2{,}5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\nabla_Z g=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\nabla_Y f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2 & 2x_4\end{pmatrix}$$

$$\nabla_Z f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_3\end{pmatrix}$$

$$\nabla_c f=\nabla_Z f - \nabla_Y f\cdot J^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x_2 & 2x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2{,}5\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1-x_2 & 7x_2+2x_3-4x_4\end{pmatrix}$$

En annulant le gradient contraint, et en tenant compte de g_1 et g2, on trouve la solution en résolvant l'ensemble d'équations suivantes :

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+5x_4-10=0\\ x_1+2x_2+5x_3+6x_4-15=0\\ 2x_1-x_2=0\\ 7x_2+2x_3-4x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-5/74\\ x_2=-10/37\\ x_3=155/74\\ x_4=30/37\end{cases}$$

Pour vérifier si cette solution est un minimum ou un maximum, On cherche la matrice hessienne

$$H=\nabla_Z(\nabla_c f)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(\nabla_c f)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(\nabla_c f)}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ 7\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}-4\dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & 7\dfrac{\partial x_2}{\partial x_3}+2-4\dfrac{\partial x_4}{\partial x_3}\end{pmatrix}$$

En prenant x_2 et x_4 comme fonctions de x_1 et x_3, on calcule la dérivée de g_1 et g_2.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}+5\dfrac{\partial x_4}{\partial x_1}=0\\ 1+2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}+6\dfrac{\partial x_4}{\partial x_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_3}=0\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\dfrac{\partial x_1}{\partial x_3}+3+5\dfrac{\partial x_4}{\partial x_3}=0\\ 2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_3}+5+6\dfrac{\partial x_4}{\partial x_3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_3}=\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{\partial x_4}{\partial x_3}=-2\end{cases}$$

$$H=\begin{pmatrix}2-(-1/2) & -7/2\\ 7(-1/2)-4\times 0 & 7\times(7/2)+2-4(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & -2/7\\ -2/7 & 69/2\end{pmatrix}$$

Les déterminants sont positifs $D_1=5/2$ et $D_2=16$. H est définie positive. Alors le point trouvé est un point minimum. On a trouvé la solution optimale.

- Il faut bien déterminer les variables indépendantes pour parvenir à une bonne solution. 01 نقطة..