جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2024 – 2025
المستوى: سنة اولى
يوم : 2025/05/17 ( ساعة و نصف)

# امتحان عادي في مادة الرياضيات 2

## التمرين الأول: ( 04 نقاط)

اوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

1) $y' = x^5 y$

2) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 3x - 4$

## التمرين الثاني : (05 نقاط)

لتكن الدالتين ذات متغيرين حقيقين :

$$f(x,y) = x^5y^4 + x^3 + y^2 + xy \quad , \quad h(x,y) = \frac{ln(x-y+3)}{x-y+3}$$

1) احسب القيم التالية : $h(0,0)$, $f(1,-1)$ .
2) اوجد ميدان تعريف الدالتين $f$ و $h$ .
3) اوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى و الرتبة الثانية للدالتين $f$ و $h$ .
4) اوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f$ فقط .

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن المصفوفات التالية و $r$ عدد حقيقي ثابت :

$$A = \begin{pmatrix} 3r & 1 \\ 2r & r \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) احسب : $\det(A)$, $tr(A)$, $2A$, $A^t$.

2) اوجد قيم $r$ حتى تكون المصفوفة $A$ قابلة للقلب.

3) احسب : $B^2 - B - 2I_3$ .

4) استنتج من العبارة السابقة مقلوب المصفوفة B .

## التمرين الرابع : (06 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y + z = -1 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

1) اكتب الشكل المصفوفي للجملة : $AX = B$ .
2) اوجد حلول الجملة بطريقة كرامر الاولى .
3) احسب مقلوب المصفوفة $A$ .
4) احسب الجداء : $A^{-1}B$ .
5) نضع $X = A^{-1}B$ , ماذا نستنتج من هذه المساواة .

**التمرين الاول (04 نقاط)**

**1)** المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل و منه

$$y' = x^5 y \quad \leftrightarrow \frac{dy}{y} = x^5 dx \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^5 dx \quad \text{.....(ن 0.5 )}$$

$$\leftrightarrow ln(y) = \frac{1}{6}x^6 + c \leftrightarrow e^{ln(y)} = e^{\frac{1}{6}x^6 + c} \quad \text{. .....(ن 0.5 ).}$$

$$\leftrightarrow y = ke^{\frac{1}{6}x^6}. \quad \text{. .....(ن 0.5 ).}$$

2) المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة شكلها العام

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

و منه فحلها العام هو : $y_G = y_h + y_p$ .....(ن 0.25 ).

<u>حساب الحل المتجانس</u>

المعادلة المتجانسة المرافقة هي

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{. .....(ن 0.25 ).}$$

المعادلة المميزة له هي

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad \text{. .....(ن 0.5 ).}$$

حيث المميز لا يساوي الصفر فان المعادلة تقبل حلين مختلفين و منه فان

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{.....(ن 0.5 ).}$$

<u>حساب الحل الخاص</u>

بما ان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية و المعامل $c$ لا يساوي 0 فان الحل الخاص عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية شكله العام هو

$$y_p = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \rightarrow y_p' = 2a_1 x + a_2 \rightarrow y_p'' = 2a_1 \quad \text{.....(ن 0.5 ).}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$2a_1 + 6a_1 x + 3a_2 + 2a_1 x^2 + 2a_2 x + 2a_3 = 2x^2 + 3x - 4$$

بالمطابقة نجد

$$a_1 = 1 \text{ و } a_2 = -\frac{3}{2} \text{ و } a_3 = -\frac{3}{4} \rightarrow y_p = x^2 - \frac{3}{2}a_2 x - \frac{3}{4} \quad \text{....(ن 0.25 ).}$$

و في الاخير نجد ان

$y_G = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + x^2 - \frac{3}{2}a_2 x - \frac{3}{4}$. ..... (ن 0.25 ).

## التمرين الثاني : (05 نقاط)

لتكن $f, g$ دالتين ذات متغيرين حقيقين معرفتان ب

$$f(x,y) = x^5y^4 + x^3 + y^2 + xy \quad , \quad h(x,y) = \frac{ln(x-y+3)}{x-y+3}$$

1) احسب مايلي :

$f(1,-1) = 2$ ..... (ن 0.5 ).

$h(0,0) = \frac{\ln(3)}{3}$ ..... (ن 0.5 ).

2)

- بما ان الدالة $f$ عبارة عن متعدد حدود فان

$Df = IR^2$ ..... (ن 0.5 ).

- $D_h = \{(x,y) \in IR^2 \backslash x - y + 3 \neq 0 \text{ و } x - y + 3 > 0\}$ ..... (ن 0.25 ).

$= \{(x,y) \in IR^2 \backslash x - y + 3 > 0\}$

فان ميدان تعريف الدالة $h$ هي جميع نقاط المستوي الواقعة تماما اسفل المستقيم ذو المعادلة

$y = x + 3$ ..... (ن 0.25 ).

3)

- $f'_x = 5x^4y^4 + 3x^2 + y$ ..... (ن 0.5 ).
- $f'_y = 4x^5y^3 + 2y + x$ ..... (ن 0. 5 ).
- $h'_x = \frac{1 - ln(x-y+3)}{(x-y+3)^2}$ ..... (ن 0. 5 ).
- $h'_y = \frac{-1 + ln(x-y+3)}{(x-y+3)^2}$ ..... (ن 0. 5 ).

4)

- $f''_{xx} = 20x^3y^4 + 6x$ ..... (ن 0.25 ).
- $f''_{xy} = 20x^4y^3 + 1$ ..... (ن 0.25 ).
- $f''_{yy} = 12x^5y^2 + 2$ ..... (ن 0.25 ).
- $f''_{yx} = 20x^4y^3 + 1$ ..... (ن 0.25 ).

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

**لتكن المصفوفات التالية و $r$ عدد حقيقي ثابت :**

$$A = \begin{pmatrix} 3r & 1 \\ 2r & r \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**1) احسب :** $\det(A),\ tr(A),\ 2A,\ A^t$.

- $A^t = \begin{pmatrix} 3r & 2r \\ 1 & r \end{pmatrix}$ ..... **(ن 0.5 ).**
- $2A = \begin{pmatrix} 6r & 2 \\ 4r & 2r \end{pmatrix}$ ..... **(ن 0.5 ).**
- $Tr(A) = 3r + r = 4r$ ..... **(ن 0.5 ).**
- $\det(A) = (3r * r) - (2r * 1) = 3r^2 - 2r$ ..... **(ن 0.5).**

**2)** لدينا لكي تكون $A$ قابلة للقلب يجب ان يتحقق

$\det(A) = 3r^2 - 2r \neq 0$ ..... **( ن 0. 5)**

و منه $r \neq \frac{2}{3}$ و $r(3r-2) \neq 0 \rightarrow r \neq 0$ ..... **(ن 0.5).**

**3) <u>حساب العبارة</u> :**

$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5 ).

$2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.25).

$B^2 - B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ..... **(ن 0.25 ).**

**4) <u>الاستنتاج</u>**

$B^2 - B - 2I_3 = 0_M \leftrightarrow B\frac{(B-I_3)}{2} = I_3$ ..... **(ن 0.5 ).**

ومنه فان المصفوفة $B$ قابلة للقلب حيث

$B^{-1} = \frac{(B-I_3)}{2} = B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ..... **(ن 0.5 ).**

## التمرين الرابع : (06 نقاط)

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y + z = -1 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

**1) الشكل المصفوفي** هو $AX = B$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \text{(ن 01 )}.$$

**2) طريقة كرامر الاولى:**

لدينا n= m=3 و

$$\det(A) = -3 \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ن1)}.$$

و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{7}{3}; \quad \ldots\ldots\ldots \text{( ن 0.5 )}.$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-5}{3} \ldots\ldots\ldots \text{( ن 0.5 )};$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-20}{3}; \ldots\ldots\ldots \text{( ن 0.5 )}.$$

**3)حساب مقلوب $A$** :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t, C = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \ldots\ldots\ldots \text{( ن 0.25 )}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{... ... ... (ن 0.5)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}. \quad \text{... ... ... (ن 0.5)}$$

**حساب الجداء**

$$\boldsymbol{A^{-1}B} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{-20}{3} \end{pmatrix} \text{ ..... (ن 0.5 ).}$$

**4) لدينا من المساواة نستنتج ان**

$$\boldsymbol{A^{-1}B = X} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{-20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{7}{3}\ , y = \frac{-5}{3}\ , y = \frac{-20}{3} \quad \text{... (ن 0.5)}$$

وهذه هي طريقة كرامر 2 (المقلوب) لحل جمل المعادلات .... (ن 0.25)