جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي-
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2024 - 2025
المستوى: أولى ليسانس
المدة: ساعة ونصف يوم 2025/05/15

امتحان في مقياس الإحصاء 2

(ضرورة التقيد بالمجال المحدد للإجابة في كل سؤال)

❖ تمرين 1 (العلامة : 3 نقاط (الحل على الصفحة الأولى من ورقة الإجابة))

لنفرض انه لدينا بيانات المتغير العشوائي X المدرجة بالجدول المقابل :

المطلوب : أعد إدراجه على الصفحة الأولى ثم قم بتعبئته و استنتج ما يلي : أ- $P(X \le 2)$ - ب - $P(X > 4)$ - ت - $P(X \ge 0)$

X	0	1	2	3	4	المجموع
Pi						
F(x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{10}{12}$		

❖ تمرين 2 (العلامة : 5 نقاط (الحل على الصفحة الثانية من ورقة الإجابة))

2-1-- لنفرض انه لدينا التابع التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ , \ x \in [1;2] \\ 0 \quad \text{for all} \end{cases}$$

المطلوب : احسب الاحتمال : $P(1,5 \le X \le 2)$

2-2-لنفرض انه لدينا التابع المقابل :

$$f(x) = \begin{cases} C.x \ , \ x \in [1;2] \\ 0 \quad \text{for all} \end{cases}$$

المطلوب : حدد قيمة الثابت C

حيث يكون التابع تابع كثافة ثم احسب الانحراف المعياري لل: م.ع . X

❖ . تمرين 3 (العلامة : 5 نقاط (الحل على الصفحة الثالثة من ورقة الإجابة))

بفرض أن احتمال تعرض سيارة لحادث إذا كانت مسرعة هو 15%، بينما احتمال تعرضها لحادث إذا لم تكن مسرعة هو 4 %، و احتمال أن يقود السائق خالد سيارته بسرعة هو % 25

المطلوب 1- إذا قاد السائق خالد سيارته ذات يوم فما احتمال أن يتعرض لحادث. .؟

2- إذا علمنا أنه وقع حادث للسائق خالد فما احتمال أن يكون نتيجة للسرعة.

3- أدرج الشجرة المرجحة لهذه المسألة مع حساب قيم الاحتمالات اللازمة .

❖ تمرين 4 (العلامة : 2 نقاط (الحل على الصفحة الرابعة من ورقة الإجابة))

في أحد الأحياء هناك 5 اطباء، رغبة في الجهة الوصية في توفير المناوبة طلبت من هؤلاء ان يحددوا اي يوم من ايام الأسبوع يناسبهم من اجل ان يكون في راحة (إغلاق)، **المطلوب** : 1 - بكم طريقة مختلفة يمكن ان يتم اختيار هؤلاء الأطباء الخمس.؟

2- بكم طريقة يمكن ان يتم اختيار رئيس ونائب له من بين هؤلاء الأطباء .؟

❖ تمرين 5 (العلامة : 5 نقاط (الحل على الصفحة الرابعة من ورقة الإجابة))

لوحظ من طرف مصلحة المراقبة لمصنع إنتاج المصابيح ان نسبة الوحدات المنتجة المعيبة هو 10% قمنا بسحب عينة عشوائية من 3 مصابيح . و يفرض ان م, ع , X يمثل المصابيح المعيبة.

المطلوب : 1 -ادرج التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2- ما احتمال ان تحتوي العينة على مصباح واحد على الأكثر معيب ؟

3- احسب التوقع الرياضي و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

مع تمنياتنا بالنجاح " لجنة المقياس".

الحل :

X	0	1	2	3	4	المجموع
Pi	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{12}{12}=1$
F(x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{12}$	

١,٢

❖ **التمرين الأول :**

عملية التعبئة للجدول تعطينا ما يلي :

أ- $P(X\leq 2)$ وتعني :

$$P(X\leq 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=\frac{4}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

٥,٢

ب- $P(X>4)$ مستحيل في هذا المجال X غير معرف و عليه : $P(X>4)=0$ ٥,٢

ت- $P(X\geq 0)$ و يشمل كل قيم المتغير العشوائي و عليه فهذا اكيد أي : ٥,٢

$$P(X\geq 0)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{12}{12}=1$$

❖ **التمرين الثاني : 2-1-**

$$f(x)=\begin{cases}2x\ ,\ x\in[1;2]\\ 0 \quad \text{for all}\end{cases}$$

جاء بنص التمرين انه تابع (لم يذكر انه تابع كثافة) وعليه قبل حساب الاحتمال المطلوب نقوم بالتأكد انه تابع كثافة .

من اجل ذلك يجب ان يحقق الخاصيتين (الشرطين :

$$*\ f(x)\geq 0\ ;\ *\int_D f(x)dx=1$$

الخاصية الأولى محقق مهما كانت قيمة X ضمن المجال المعطى في المقدار 2 تعطينا قيمة موجبة .

الخاصية الثانية : غير محققة , بالفعل :

$$\int_D f(x)dx=1\Rightarrow\int_1^2 2x\ .\ dx=\left(\frac{2.x^2}{2}\right]_1^2=x^2]_1^2=4-1=3$$

٨

إذا الخاصية الثانية عير محققة وعليه فالتابع المعطى تابع رياضي و ليس تابع كثافة ٥,٢

إذا لا يمكننا حساب الاحتمال المطلوب.

❖ **التمرين الثاني : 2-2-**

$$f(x)=\begin{cases}C.x\ ,\ x\in[1;2]\\ 0 \quad \text{for all}\end{cases}$$

الخاصية الأولى تكون محققة دوما غد ما كان المقدار الثابت C موجب اي : $C\geq 0$

الخاصية الثانية نحن مطالبين بالعمل على تحققها اي :

$$\int_D f(x)dx=1\Rightarrow\int_1^2 C.x\ .\ dx=\frac{C.x^2}{2}\Big]_1^2=1=\frac{4C}{2}-\frac{1.C}{2}=\frac{3C}{2}=1\Rightarrow 3C=2\Rightarrow C=\frac{2}{3}$$

٨

ومنه فالتابع المعطي حتى يكون تابع كثافة يجب ان يأخذ الصورة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}.x\ , & x\in[1;2]\\ 0 & \text{for all}\end{cases}$$

يمكننا التأكد ببساطة انه فعلا تابع كثافة :

- **أولا : C الذي توصلنا إليه مقدار موجب و بالتالي الشرط الأول محقق .**
- **ثانيا : الشرط الثاني ايضا محقق بالفعل :**

$$\int_D f(x)dx=1 \Rightarrow \int_1^2 \frac{2}{3}.x\ .\ dx=\left.\frac{2.\ x^2}{3\ .\ 2}\right]_1^2=\left.\frac{x^2}{3}\right]_1^2=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

- لحساب الانحراف المعياري نقوم بحساب التباين أولا و عند اعتمادنا الصيغة المختصرة (صيغة كونيق) نحن بحاجة على التوقع الرياضي أي :

$$E(x)=\int_D f(x)dx=1 \Rightarrow \int_1^2 x\ .\left(\frac{2}{3}.x\right).\ dx=\left.\frac{2.\ x^3}{3\ .\ 3}\right]_1^2=\left.\frac{2.\ x^3}{9}\right]_1^2=\frac{16}{9}-\frac{2}{9}=\frac{14}{9}=1{,}56 \quad ١$$

لنحسب الشطر الأول من التباين : $V(X)=\int x^2.f(x)\,dx-\left(E(X)\right)^2$ أي :

$$\int_D x^2.f(x)dx \Rightarrow \int_1^2 x^2\ .\left(\frac{2}{3}.x\right).\ dx=\left.\frac{2.\ x^4}{3\ .\ 4}\right]_1^2=\left.\frac{x^4}{6}\right]_1^2=\frac{16}{6}-\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=2{,}5$$

ومنه :

$$V(X)=\int x^2.f(x)\,dx-\left(E(X)\right)^2=\ 2{,}5\ -2{,}43=0{,}07 \quad ١$$

و منه فالإنحراف المعياري هو :

$$\delta_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0{,}07}=0{,}2646 \quad ٠,٢٥$$

❖ التمرين الثالث :

لنفرض ان V تمثل السرعة و ان $\overline{V}$ يمثل حالة عدم سياقة خالد سيارته بسرعة و A يدل على ان خالد وقع له حادث . نلاحظ اننا بصدد منظومة تامة للحوادث إذ تتحقق شروطها الثلاثة و بالتالي نعتمد صيغ الاحتمال الكلي :

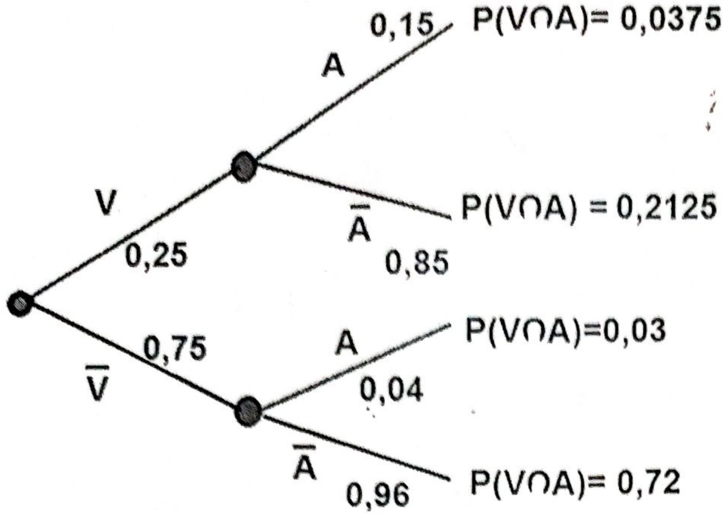
$$P(A)=P(V).P(A/V)+P(\overline{V}).P(A/\overline{V}) \quad ٠,٢٥$$
$$=0{,}25\ x(0{,}15)\ +\ 0{,}75\ x(0{,}04)=0{,}0375+0{,}03=0{,}0675 \quad ١$$

السؤال الثاني يضعنا امام الأمر الواقع الحادث قد وقع فإننا نبحث عن تحقق الشرط و هو السرعة هنا نعتمد صيغة بابيز

$$P(V/A)=\frac{P(V).P(A/V)}{P(A)}=\frac{0{,}25\ x(0{,}15)}{0{,}0675}=\frac{0{,}0375}{0{,}0675}=0{,}5556$$

٠,١

3- لندرج الشجرة المرجحة للاحتمالات لهذه المسالة مع حساب القيم الاحتمالية :



9

التمرين الرابع

1- عدد ايام الأسبوع 7 (n=7) عدد الأيام المفتوحة 5 (k=5)

ومنه فإن عدد الترتيبات لخمس عناصر (مع الإعادة) مع التي تم اختيارها من بين العناصر 7 هي :

$$n^k = 7x7x7x7x7 = 16807$$ 1

2- عدد طرق اختيار رئيس ونائب له من بين هؤلاء الأطباء .

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5x4x3!}{3!} = 20$$ 1

❖ **التمرين الخامس**

نلاحظ ان شروط التوزيع الثنائي محققة $B(n,p) = B(3\ ;\ 0,1)$ و عليه :

$$P(X = x_i) = C_n^k p^x.q^{n-x} \qquad \Omega_x = \{0,1,2,3\}$$

$$* P(X=0) = C_3^0 p^0.q^{3-0} = 1x1x(0,9)^3 = 0,729$$ 0,75

$$* P(X=1) = C_3^1 p^1.q^{3-1} = 3x0,1x(0,9)^2 = 0,243$$ 0,75

$$* P(X=2) = C_3^2 p^2.q^{3-2} = 3x(0,1)^2x(0,9) = 0,027$$ 0,75

$$* P(X=3) = C_3^3 p^3.q^{3-3} = 1x(0,1)^3x1 = 0,001$$ 0,75

و منه فإن جدول التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي :

Xi	0	1	2	3	المجموع
pi	0,729	0,243	0,027	0,001	1

1

2-على الأكثر يعني مصباح او اقل اي :

$$P(X \le 1) = P(X=1) + P(X=0) = 0,729 + 0,243 = 0,972$$ 0,25

0,25

-3

أ- التوقع الرياضي : $E(X) = np = 3 \times 0,1 = 0,3$

ب- التباين : $V(X) = npq = 3 \times 0,1 \times 0,9 = 0,27$ 0,25

ومنه فالانحراف المعياري :

$$\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,27} = 0,5196$$ 0,5