جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2023 – 2024
المستوى: سنة اولى
يوم : 2024/05/21 (ساعة و نصف)

امتحان السداسي الثاني في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) اوجد حلول المعادلة التفاضلية القابلة للفصل التالية :

$$y' = xy.$$

2) لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية التالية :

$$ay'' + 2y' = 3x,$$

حيث a هو عدد حقيقي ثابت. اوجد حلول هذه المعادلة في الحالتين التاليتين : ا) $a = 0$, ب) $a = 1$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن الدالتين ذات متغيرين التاليتين :

$$g(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2} \qquad , \qquad f(x,y) = 3x^3y^2 + x^2y + 3x$$

1) احسب القيم التالية : $g(0,0),\ f(1,-2)$.
2) اوجد ميدان تعريف كل دالة.
3) اوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من الدالة f و الدالة g.
4) اوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f .

التمرين الثالث: (5 نقاط)

لتكن المصفوفتان :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) احسب : $\det(A),\ tr(A),\ A - 2B,\ A + B,\ B^t,\ A^t$.

2) اثبت ان المصفوفة B قابلة للقلب ثم احسب مقلوبها .

3) احسب : $A^2 + rI_2$, حيث I_2 هي مصفوفة الوحدة و r هو عدد حقيقي ثابت.

4) اوجد قيم r حتى تكون العلاقة التالية محققة : $A^2 + rI_2 = 0$. ماذا نستنتج ؟

التمرين الرابع : (06 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y - z = 3 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

1) اكتب الشكل المصفوفي للجملة.
2) اوجد حلول الجملة بطريقتين مختلفتين من بين الطرق التالية (طريقة كرامر الاولى , طريقة مقلوب المصفوفة , طريقة غوص)

الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل و منه

$$y' = xy \leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \text{.....(ن 0.5)}$$

$$\leftrightarrow ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \leftrightarrow e^{ln(y)} = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

$$\leftrightarrow y = ke^{\frac{1}{2}x^2}. \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

2) الحالة الاولى

ا) $a = 0$

$$2y' = 3x,$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل و منه

$$2dy = 3xdx \leftrightarrow 2y = \frac{3}{2}x^2 + c \leftrightarrow y = \frac{3}{4}x^2 + k \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

الحالة الثانية

ا) $a = 0$

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة شكلها العام

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

و منه فحلها العام هو : $y_G = y_h + y_p$ .....(ن 0.5).

حساب الحل المتجانس

المعادلة المتجانسة المرافقة هي

$$y'' + 2y' = 0 \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

المعادلة المميزة له هي

$$r^2 + 2r = 0 \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

حيث المميز لا يساوي الصفر فان المعادلة تقبل حلين مختلفين و منه فان

$$y_h = c_1 + c_2e^{-2x} \quad \text{. .....(ن 0.5).}$$

حساب الحل الخاص

بما ان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى و المعامل c يساوي 0 فان الحل الخاص عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية شكله العام هو

$y_p = a_1x^2 + a_2x + a_3 \rightarrow y_p' = 2a_1x + a_2 \rightarrow y_p'' = 2a_1$ ..... (ن 0.5).

بالتعويض في المعادلة نجد

$$2a_1 + 4a_1x + 2a_2 = 3x$$

بالمطابقة نجد

$a_1 = \frac{3}{4}$ و $a_2 = -\frac{3}{4} \rightarrow y_p = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}a_2x + a_3$.

و في الاخير نجد ان

$y_G = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}a_2x + a_3$. ..... (ن 0.5).

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن f, g دالتين ذات متغيرين حقيقين معرفتان ب

$$g(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2} \quad , \quad (x,y) = 3x^3y^2 + x^2y + 3x$$

1) احسب مايلي :

$f(1,-2) = 13$ ..... (ن 0.5).

$g(0,0) = \frac{1}{0}$ الدالة غير معرفة عند هذه النقطة..... (ن 0.5).

2)

- بما ان الدالة f عبارة عن متعدد حدود فان

$Df = IR^2$. ..... (ن 0.5).

- $Dg = IR^2 = \{(x,y) \in IR^2 \backslash (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2 \neq 0\}$ ..... (ن 0.25).
$= \{(x,y) \in IR^2 \backslash (x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 2\}$

فان ميدان تعريف الدالة g هي جميع نقاط المستوي ماعدا نقاط الدائرة ذات المعادلة

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ حيث مركزها $(1,1)$ هو و نصف قطرها هو 2 ..... (ن 0.25).

3)

- $f'_x = 9x^2y^2 + 2xy + 3$ ..... (ن 0.25).
- $f'_y = 6x^3y + x^2$ ..... (ن 0.25).
- $g'_x = \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+(y-1)^2-2)^2}$ ..... (ن 0.25)
- $g'_y = \frac{2(y-1)}{((x-1)^2+(y-1)^2-2)^2}$ ..... (ن 0.25)

4)

- $f''_{xx} = 18xy^2 + 2y$ ..... (ن 0.25).
- $f''_{xy} = 18x^2y + 2x$ ..... (ن 0.25).

- $f''_{yy} = 6x^3$ ..... (ن 0.25).
- $f''_{yx} = 18x^2y + 2x$ ..... (ن 0.25).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) احسب : $\det(A),\ tr(A),\ A-2B,\ A+B,\ B^t,\ A^t$.

- $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).
- $B^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).
- $A+B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).
- $A-2B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).
- $Tr(A) = 0+0 = 0$ ..... (ن 0.5).
- $\det(A) = 0-9 = -9$ ..... (ن 0.5).

2) لدينا

$$\det(B) = 2 \neq 0$$

و منه فان B قابلة للقلب حيث

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\tilde{B}^t, \tilde{B} = (-1)^{i+j}\det B_{ij} \quad \text{..... (ن 0.5)}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3) احسب :

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).

$rI_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.25).

$A^2 + rI_2 = \begin{pmatrix} 9+r & 0 \\ 0 & 9+r \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.25).

2) لدينا

$A^2 + rI_2 = \begin{pmatrix} 9+r & 0 \\ 0 & 9+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r = -9$ ..... (ن 0.25).

الاستنتاج

$A^2 + rI = 0_M \leftrightarrow A\frac{1}{r}A = I_2$ ..... (ن 0.25).

ومنه فان المصفوفة قابلة للقلب حيث

$A^{-1} = \frac{1}{r}A$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

يختار الطالب طريقتين من بين ثلاث الطرق كل طريقة على 2.5 ن

1) الشكل المصفوفي هو $AX = B$ حيث

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ... (ن 01).

- **طريقة كرامر :**

لدينا n= m=3 و

$\det(A)=14 \neq 0$ ..... (ن 1).

و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots . (ن 0.5)$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1 \ldots\ldots\ldots . (ن 0.5); \quad$$

$$z = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -1; \ldots\ldots\ldots . (ن 0.5)$$

- **طريقة المقلوب** : $X = A^{-1}B$ ..... (ن 0.5).

حساب A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^t, \tilde{A} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ ... ... (ن 0.5)

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ ... ... (ن 0.5)

$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$ ... ... (ن 0.5)

و منه

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ..... (ن 0.5).

- **<u>طريقة غوص :</u>** الشكل المصفوفي الموسع هو

$\begin{pmatrix} 01 \\ ن \end{pmatrix}$ ... ... $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$

<u>العملية الاولية هي كالاتي</u>

(السطر الثاني-2السطر الثالث و نكتب في السطر الثالث) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$ ... ... (ن 0.5)

و منه حل الجملة مكافئ لحل الجملة

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y - z = 3 \\ -7z = 7 \end{cases} \rightarrow$ ... ... (ن 0.5)

$x = \frac{-1}{2}, y = 1, z = -1$ ... ... (ن 0.5)