الحل النموذجي لمقياس إحصاء 3

التمرين الأول:

الحل:

يتوزع المتغير العشوائي X وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة p=0.1 ، أي أن: $X \sim G(0.1)$

دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1(0.9)^{x-1} & si: x=1,2,\dots,\infty\\ 0 & sinon\end{cases}$$

العدد المتوقع للإشارات اللازمة لاستقبال أول إشارة مشوشة يساوي متوسط المتغير العشوائي X، أي أن:

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.1}=10$$

تباين المتغير العشوائي X يساوي:

$$V(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{0.9}{0.1^2}=90$$

احتمال أن تكون الإشارة الخامسة هي أول إشارة مشوشة يتم استقبالها يساوي:

$$P(X=5)=0.1(0.9)^4=0.0656$$

التمرين الثاني:

الحل:

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحة. إن X يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda=6$، أي أن $X \sim P(6)$

دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-6}\times 6^x}{x!} & si: x=0,1,2,\dots,\infty\\ 0 & sinon\end{cases}$$

احتمال أن يوجد ما لا يقل عن خطأين مطبعيين في الصفحة الواحدة هو:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+\dots=\sum_{x=2}^{\infty}P(X=x)$$

ولكن من الأسهل حساب الاحتمال السابق باستخدام قانون المتممة كما يلي:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-[\frac{e^{-6}6^0}{0!}+\frac{e^{-6}6^1}{1!}]$$

$$=1-(0.00248+0.01487)$$

$$=1-0.01735=0.982650$$

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحتين. إن X يتوزع وفق توزيع بواسون

بالمعلمة $\lambda=12$، أي أن $X \sim P(12)$

دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-12}\times 12^x}{x!} & si: x=0,1,2,\dots,\infty\\ 0 & sinon\end{cases}$$

إن احتمال وجود 10 أخطاء مطبعية في صفحتين هو :

$$P(X = 10) = \frac{e^{-12} \times 12^{10}}{10!} = 0.1048$$

توزيع المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل 10 صفحات هو توزيع بواسون بالمعلمة

بالمعلمة $\lambda = 60$، أي أن $X \sim P(60)$

وأما متوسط وتباين هذا المتغير العشوائي فهما على التوالي:

$$E(X) = \lambda = 60$$
$$Var(X) = \lambda = 60$$

التمرين الثالث:

$$X \rightsquigarrow B(n; p):$$
$$p(X = x_i) = C_n^{x_i} \times p^{x_i} \times q^{n-x_i} \quad ; x_i \in \mathbb{N}; q = 1 - p$$

أ–حساب الاحتمال المطلوب باستخدام التوزيع الثنائي:

لدينا: $n = 30$ ، $P = 0,3$ ، $1 - P = 0,7$ والمطلوب حساب $P(X \geq 10)$

$$(X \geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) + \ldots + P(30) = 0,1416 + 0,1103 + 0,0749$$
$$+ 0,0444 + 0,0231 + 0,0106 + 0,0042 + 0,0015 + 0,005 + 0,001 = 0,4112$$

ب–حساب الاحتمال باستخدام التوزيع الطبيعي كتقرب لذي الحدين:

لدينا: $n = 30$ وكلا من nP و $nP(1-P)$ أكبر من 5 فيمكن تقريب احتمالات ذي الحدين باستخدام احتمالات التوزيع الطبيعي، ولكن عدد الأشخاص متغير منفصل(منقطع) فلكي نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي فيمكن التعامل مع عدد الأشخاص كما لو كان متغير متصلا وإيجاد $P(X \geq 9,5)$

حيث: المتوسط μ ويساوي $\mu = P \Leftarrow$ $\mu = (30)(0,3) =$ 9 أشخاص

والانحراف المعياري $\delta(X)$ يساوي: $\delta(X) = \sqrt{nP(1-P)}$

$= \sqrt{30(0,3)(0,7)} = \sqrt{6,3} = 2,51$ شخصا

فيكون: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9,5-9}{2,51} = 0,20$

والبحث مقابل $Z = 0,20$ نحصل على (0,0793) (الملحق) فيكون:

$$P(X \geq 9,5) = 0,5 - 0,0793 = 0,4205$$

التمرين الرابع:

<u>الحل:</u>

ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الإطارات التالفة التي اشتراها هذا الزبون. نظرا لقيام الزبون باختيار وشراء عشرة إطارات بشكل عشوائي من هذه الشحنة، فإن عملية الاختيار أو السحب تكون بدون إرجاع. ولذلك فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بالمعالم $N=5000$ و $N_1=1000$ و $n=10$، أي أن: $X\sim H(1000,4000)$.

وتعطى دالة كتلته الاحتمالية بالصيغة الآتية:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4000}{10-x}\binom{1000}{x}}{\binom{5000}{10}} & si:\ x=0,1,2,3,4,\ldots\ldots,10\\ 0 & sinon\end{cases}$$

وفيما يأتي سوف نوجد احتمال أن يكون الزبون قد اشترى ثلاثة إطارات تالفة كما يلي:

$$P(X=3)=\frac{\binom{4000}{7}\binom{1000}{3}}{\binom{5000}{10}}=0.20148$$

التمرين الخامس:

نفرض أن المتغير العشوائي يمثل درجات الطلبة بمقرر الإحصاء فان:

X N (76, 16)

إلى التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)، حيث مهما كان المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي، فإنه يتم تحويله إلى متغير عشوائي آخر نسميه Z، يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، حيث وسطه الحسابي يساوي 0، وتباينه يساوي 1، وتتم عملية التحويل من خلال القانون الآتي: $Z=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

حيث إذا كان عندنا $X \backsim (\mu\ ;\quad ^2)$ فإنه يصبح عندنا: $Z \backsim N(0\ ;\ 1)$،

نسبة الطلبة الذين تقديراتهم ممتاز (A) هي:

$P(x \geq 88) = p\ (Z\geq (88-76)/4) = p(Z\geq 3) = 1 - p(\ Z\leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$

نسبة الطلبة الذين تقديراتهم ممتاز (B) هي:

$P(82\leq x\leq 88) = p\ (1.5\leq Z\leq 3) = p\ (Z\leq 3) - p(Z\leq 1.5) = 0.9987 - 0.9332 = 0.0655$

نسبة الطلبة الذين تقديراتهم ممتاز (C) هي:

$P(66\leq x\leq 82) = p\ (-2.5\leq Z\leq 1.5) = p\ (Z\leq 1.5) - p(Z\leq -2.5) = 0.9332 - (1- 0.9938) = 0.9270$

نسبة الطلبة الذين تقديراتهم ممتاز (D) هي:

$P(58\leq x\leq 66) = p\ (-4.5\leq Z\leq - 2.5) = p\ (Z\leq - 2.5) - p(Z\leq -4.5) = (1 - 0.9938) - 0 = 0.0062$