وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أم البواقي

كلية العوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في مقياس:

الإحصاء 2

مطبوعة بيداغوجية محكمة موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

إعداد:

د/ سليم العمراوي - أستاذ محاضر أ -

السنة الجامعية: 2021/2020

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

مقدمة

مقدمة:

إن التطور العلمي أبرز أهمية استخدام الأساليب الاحصائية في جميع فروع المعرفة، وتشهد عملية التعامل مع الاحتمالات وتوزيعاتها توسعا مستمرا وأصبح لها تطبيقات كثيرة ومتعددة في مختلف الأبحاث والتجارب العلمية النظرية أو التطبيقية، بغرض الوصول إلى نتائج تعتمد الموضوعية وتتسم بالمصداقية، ولهذا يشكل هذا الموضوع واحدا من أكثر التخصصات الدراسية أهمية على الاطلاق، لأنه أحد العناصر الرئيسية في أي عمل إداي أو مؤسسي مهما كان المجال الذي يتم تطبيقه فيه، فهو يعلم كيفية دراسة البيانات وتحليلها وكيفية أخذ العينات والنماذج،.. ومن ثم يكون هدفه النهائي الوصول إلى اتخاذ القرارات السليمة والمناسبة.

بهدف إلمام الطلبة بهذا المقياس وتسهيل فهمهم له، ارتأينا وضع مطبوعة محاضرات في الإحصاء 2 بين أيديهم بغرض تخفيف الصعوبات التي يواجهونها، وهذه المطبوعة هي عبارة عن سلسلة من المحاضرات حسب ما هو مقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي لطلبة السنة الأولى نظام (LMD) ميدان العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، نقدم من خلالها دروسا مبسطة وسهلة الفهم مدعمة بالعديد من الأمثلة المحلولة والتمارين المقترحة.

لقد تم توزيع مواضيع هذه المطبوعة على ثلاث فصول، تم فيها مراعاة السهولة والبساطة في العرض بعيدا عن البراهين الرياضية المعقدة، وباعتماد تسلسل منهجي. خصص الفصل الأول كمدخل للتحليل التوافقي والاحتمال وقوانينه وكيفية حسابه، فيما خصص الفصل الثاني لدراسة المتغيرات العشوائية ومميزاتها العددية، في حين تم التطرق في الفصل الثالث إلى قوانين التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام.

هذا، وأسأل الله تعالى التوفيق والسداد، ومنه الإعانة والرشاد، كما أرحب بجميع آراء وملاحظات القراء الكرام التي تسمح بإثراء هذا العمل وتحسينه مستقبلا.

الفصل الأول

• مدخل للتحليل التوافقي والاحتمالات

أولا: التحليل التوافقي

- المبدأ الأساسي للعد
- التباديل
- التراتيب
- التوافيق

ثانيا: نظرية الاحتمالات

- فضاء العينة والحوادث
- الاحتمال ومداخله
- قواعد حساب الاحتمالات
- الاحتمال الكلي
- دستور بايز **Bayes**

تمهيد:

مفهوم الاحتمال من المفاهيم الشائعة الاستخدام في حياتنا اليومية، ونظرا لأهميته صار محل اهتمام العديد من الباحثين فتمخض عنه ما يسمى بنظرية الاحتمالات، والتي أصبحت تتبوأ مكانة بارزة بين الدراسات الكمية لما لها من أهمية في اتخاذ القرارات.

قبل التطرق بالتفصيل إلى مفهوم الاحتمال وقوانينه ومختلف المفاهيم الحديثة والمصطلحات الأساسية المعتمدة في هذه النظرية كان لزاما التعرض إلى المبادئ الأساسية في التحليل التوافقي لما لها من أهمية في حساب القيم الاحتمالية عند اعتماد المدخل الرياضي.

أولا– التحليل التوافقي

من بين المفاهيم الأساسية التي لها علاقة وطيدة بالاحتمالات نجد التحليل التوافقي أو ما يعرف بطرق العد، والتي تهدف إلى تحديد عدد النتائج الكلية الممكنة لتجربة معينة (فضاء العينة)، وعدد عناصر الحادثة دون الحاجة إلى كتابة النتائج كلها؛ حيث يصعب أو يستحيل القيام بعملية تحديدها اعتمادا على طرق العد المباشر أو الحصر الشامل أو كتابتها كلها في حالة التجارب التي تكون نتائجها كبيرة. في هذه الحالة نستطيع معرفة عدد النتائج الكلية بواسطة طرق العد.

I المبدأ الأساسي للعد

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سيتم التطرق إليها من خلال هذه الفصول، وهو المبدأ الذي يعتمد على القاعدتين الآتيتين:

1.قاعدة الجمع: إذا كانت لدينا عمليتين متنافيتين a و b بحيث أن العملية a تتم بعدد من الطرق قدره n والعملية b تتم بعدد من الطرق قدرها m، فإن عدد الطرق لإتمام العمليتين a و b هو (n+m).

مثال 1:

طالب تحصل على شهادة البكالوريا، يريد أن يلتحق بجامعة أم البواقي أو جامعة قسنطينة، وكان مقبولا في جامعة أم البواقي بـ 4 كليات وفي جامعة قسنطينة بـ 3 كليات، فما هو عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب بإحدى الكليات:

<u>الحل:</u>

- عدد الطرق لقبول الطالب في كليات جامعة أم البواقي n=4.
- عدد الطرق لقبول الطالب في كليات جامعة قسنطينة m=3.

الطالب يلتحق بجامعة أم البواقي أو جامعة قسنطينة فالعمليتين متنافيتين، نستعمل قاعدة الجمع في معرفة عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب في إحدى الكليات، كالآتي:

$$n+m=4+3=7$$

عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب في إحدى الكليات هو 7 طرق.

2. قاعدة الضرب: والتي تنص على " أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما هي n_1 والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2 فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي: $(n_1 \times n_2)$.

مثال2 :

إذا كان لدينا امتحان الإحصاء متكون من تمرينين، حيث أن التمرين الأول مكون من 3 أسئلة والتمرين الثاني من 4 أسئلة. طلب من الطلاب الإجابة على سؤال واحد على الأكثر من كل تمرين.

ما هي عدد الحالات الممكنة لحل هذا الامتحان؟

الحل:

حسب المبدأ الأساسي للعد يكون للطالب 3 حالات لحل التمرين الأول (نرمز لها بـ n_1) و4 حالات لحا التمرين الثاني (نرمز لها بـ n_2) ولحل التمرينين معا يكون للطالب 12 حالة ممكنة:

$$n=n_1xn_2= 3x4=12$$

مثال 3:

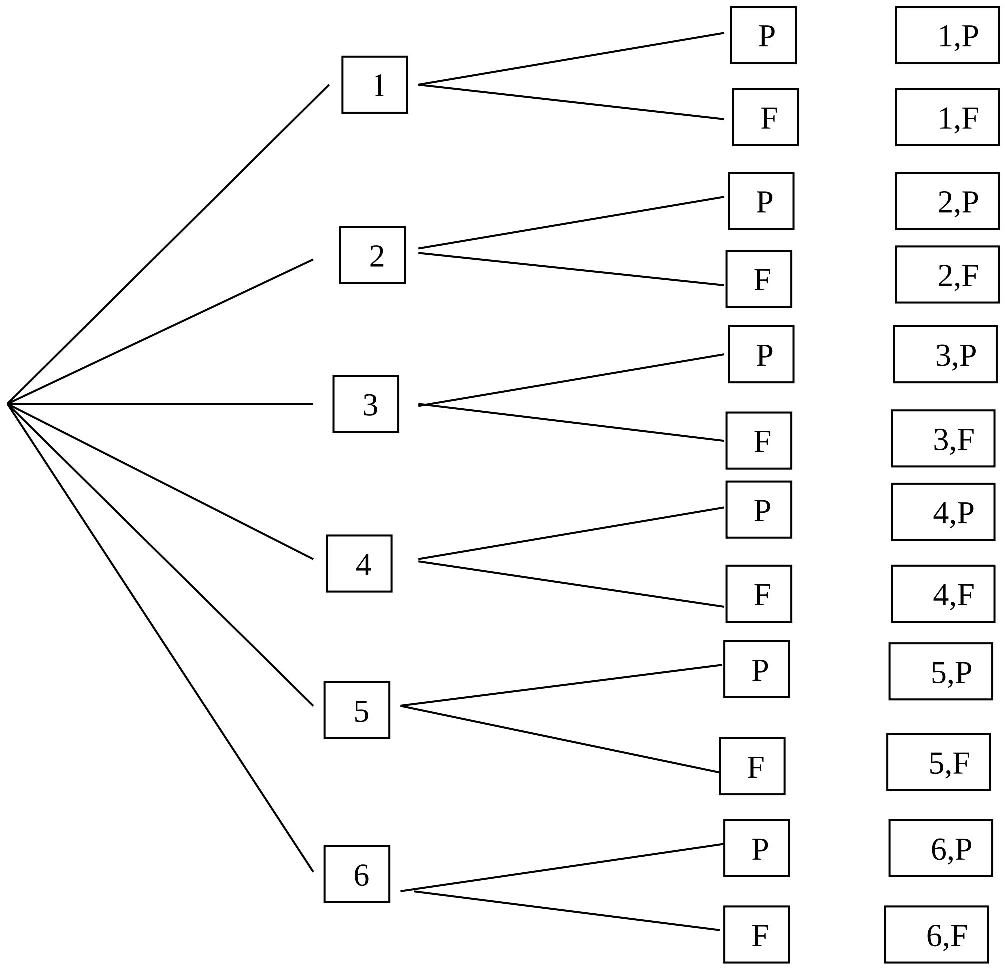
إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وزهرة نرد في آن واحد. ما هو هدد الحالات الممكنة لنتائج هذه التجربة.

الحل:

لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع على أحد الوجهين (P,F)، بينما زهرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة (1,2,3,4,5,6). ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو :

$$n=n_1xn_2= 6x2=12$$

يمكن حل المثال أيضا من خلال الاستعانة بالشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج منته (قليل). ويمكن توضيح ذلك في الشكل الأتي:



II التباديل:

سوف نميز هنا بين نوعين من التباديل:

1. التباديل دون تكرار: يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة العناصر k مأخوذة في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي n=k. أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف الترتيب لأحد هذه العناصر على الأقل. ويعبر عنها بالعلاقة الرياضية التالية:

$$P_n = n!$$

n!: يقرأ n عاملي أو مضروب n، حيث أن:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \dots \times 2 \times 1$$

ويكون:

$$0! = 1$$

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$
$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

مثال 4:

ما هو عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف {a, b, c}؟

<u>الحل:</u>

من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق وهي:

(c,b,a)	(c,a,b)	(b,c,a)	(b,a,c)	(a,c,b)	(a,b,c)

كل واحدة من هذه التشكيلات يعرف بالتبديلة، حيث أنه هناك 6 تبديلات ممكنة من مجموعة لـ 3 عناصر مختلفة.

يمكن أيضا الحصول على هذه النتيجة من خلال استعمال قاعدة المبدأ الأساسي للعد؛ حيث يمكن اختيار الحرف الأول بـ 3 طرق، والحرف الثاني بـ 2 طرق، والحرف الثالث بـ 1 طريقة فقط. أي أن عدد الطرق هو:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

وهي النتيجة المحصل عليها أيضا من خلال العلاقة الرياضية للتباديل، حيث n=3:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

مثال5:

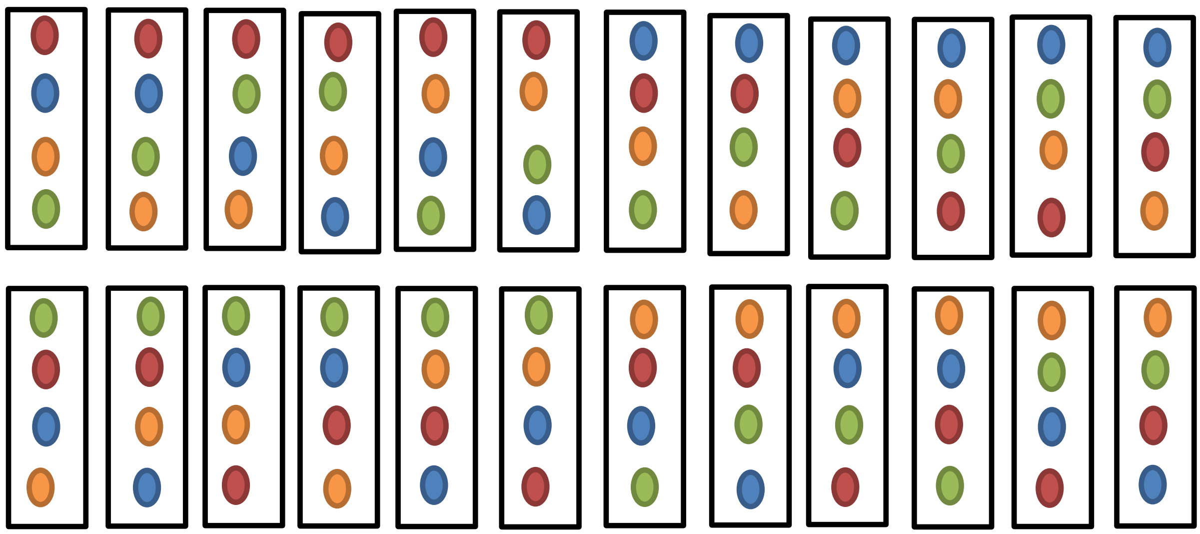
لدينا 4 إشارات ضوئية ذات ألوان مختلفة (خضراء، حمراء، صفراء، برتقالية)، بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأعلام في أماكن مخصصة على واجهة جدار.

<u>الحل:</u>

يمكن ترتيب هذه الإشارات الضوئية بـ 24 طريقة، وذلك وفقا لما تم حسابه باستعمال الصيغة الرياضية لحساب التباديل دون تكرار:

$$P_n = n!$$
$$P_4 = 4! = 24$$

لفهم الطريقة أكثر نستعين بالشكل الموالي الذي يبين هذه 24 طريقة:



إذن نلاحظ أن الترتيب مهم والعناصر لا تتكرر في المجموعة.

2. التباديل مع التكرار: أي أن بعض عناصر المجموعة تتكرر؛ فإذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرا n؛ حيث أن بعض العناصر تتكرر أي هي من نفس النوع (n_1 من النوع الأول، n_2 من النوع الثاني، n_3 من النوع الثالث، ...إلخ) ونريد ترتيبها، فعدد التبديلات هنا يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$p_n^{n_1,n_2,n_3\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ n_3!\ \ldots\ n_k!}$$

حيث أن:

(n_1, n_2, n_3,...,n_k) تمثل العناصر المتماثلة، ويكون: ($n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$).

مثال 6:

ما هو عدد التبديلات المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة recherche.

<u>الحل:</u>

لدينا عدد الحروف n=9، وهي موزعة كما يلي:

R=2, E=3, C=2, H=2

إذن:

$n_1=2, \quad n_2=3, \quad n_3=2, \quad n_4=2$

وعليه يكون عدد التبديلات الممكن تكوينها هو:

$$p_9^{2,3,2,2} = \frac{n!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!\ x\ 2!} = 7560$$

- **حالة خاصة (التباديل الدائرية):** إذا قمنا بتبديل عناصر مجموعة (n) لكن ضمن وضعية دائرية، فإن عدد الطرق الممكنة هو:

$$P_n = (n-1)!$$

أي أننا نقوم بتثبيت العنصر الأول ثم نرتب بقية العناصر حوله وبالنسبة له.

مثال 7:

بكم طريقة يمكن لعائلة تتكون من الأم والأب وخمسة إخوة أن يجلسوا حول طاولة مستديرة لتناول وجبة الطعام.

<u>الحل:</u>

مجموع أفراد الأسرة n=7، وعليه عدد طرق جلوس أفراد الأسرة حول طاولة مستديرة هو:

$$P_7 = (7-1)! = 6! = 720$$

III التراتيب

إذا كانت لدينا مجموعة عناصر تحتوي على n عنصر، ونريد تشكيل مجموعة جزئية حجمها k عنصر كما أن ترتيب العناصر يؤثر على في شكل المجموعة المسحوبة، هنا نكون أمام ترتيبة، حيث $k \leq n$، ويمكن أن نميز بين نوعين من التراتيب:

1. التراتيب دون إرجاع: إذا كانت عملية السحب للمجموعة الجزئية تتم بدون إعادة العناصر المسحوبة، أي أن العناصر المسحوبة لا تظهر مرة أخرى في عملية السحب، في هذه الحالة نكون أما ترتيبة بدون إرجاع والتي يرمز لها بالرمز A_n^k، مع الإشارة إلى أن عامل ترتيب العناصر المسحوبة يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

إن عدد الترتيبات الممكن تشكيلها أو سحبها وفقا لهذه الصورة يعطى بالصيغة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث أن: k≤n .

في حالة ما إذا كانت n=k، فإن:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(0)!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

لذلك هنالك بعض من الكتاب في نظرية الاحتمالات لا يفرقون بين التبديلة والترتيبة حيث يعتبرونهما نفس الشيء.

مثال 8:

لتكن لدينا مجوعة الأرقام التالية: (1, 2, 3, 4, 5)، بكم طريقة مختلفة يمكنا تشكيل عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام السابقة مع استعمال الرقم مرة واحدة.

الحل:

لدينا n=5، ونريد سحب رقمين من مجموعة الأرقان الخمسة، أي k=2، مع عدم تكرار الأرقام، أي أن الأرقام: 11، 22، 33، 44، 55. لا تحتسب (سحب دون إعادة).

في هذه الحالة نحن أمام ترتيبة دون إرجاع، ذلك أن ترتيب كل رقم سيؤثر على قيمة العدد، فمثلا لو سحبنا الرقم الأول ووجدناه 2، وسحبنا الرقم الثاني ووجدناه 3، سيصبح العدد المشكل هو 23، أما إذا فرضنا أننا سحبنا الرقم الأول ووجدناه 3، ثم سحبنا الرقم الثاني ووجدناه 2، سيكون العدد المشكل هو 32. لذا في هذه الحالة نقول أن ترتيب سحب العناصر يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

من خلال الاستعانة بالصيغة الرياضية لحساب التراتيب دون إرجاع نجد عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الأرقام الخمسة كالآتي:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20$$

يمكن أيضا الحصول على هذه النتيجة من خلال استعمال قاعدة المبدأ الأساسي للعد؛ حيث يمكن اختيار الرقم الأول بـ 5 طرق، والرقم الثاني ب 4 طرق، أي:

5 x 4= 20

2. التراتيب مع الإرجاع: إذا كانت عملية السحب بالإرجاع، أي أن العنصر المسحوب يتم إرجاعه، في هذه الحالة العنصر المسحوب يمكن أن يظهر مرة أخرى عند إجراء سحب جديد، ونكون هنا أمام ترتيبة بتكرار العناصر، والتي يرمز لها بالرمز AR_n^k.

فإذا كانت التجربة تتمثل في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، وبما أنه توجد n طريقة مختلفة لاختيار الكرة في كل مرة، وبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل عدد التشكيلات لسحب مجموعة كرات عددها k، كالتالي:

$$n \times n \times n \times n.........\times n=n^k$$

وبذلك يمكن إعطاء الصيغة الرياضية لعدد الترتيبات مع الإرجاع من خلال الآتي:

$$AR_n^k = n \times n \times n \dots \dots \times n = n^k$$

حيث أن:

K تمثل عدد مرات السحب؛

.$k \leq n$

مثال 9:

بالرجوع للمثال السابق رقم (8) والمتعلق بمجوعة الأرقام التالية: (1, 2, 3, 4, 5)، بكم طريقة مختلفة يمكننا تشكيل عدد مكون من رقمين مع إمكانية استعمال الرقم أكثر من مرة واحدة؟

<u>**الحل:**</u>

عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الأرقام الخمسة **دون إرجاع** وجدناه سابقا كالآتي:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20$$

باستعمال الصيغة الرياضية للتراتيب مع الإرجاع نجد عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الارقام الخمسة **مع الإرجاع** كالآتي:

$$AR_5^2 = 5 \, x \, 5 \; = 5^2 = 25$$

ويمكن الاستعانة بالجدول الآتي وحصر عدد تشكيلات الأعداد الممكن تكوينها في حالة التراتيب دون الإرجاع ومع الإرجاع كالآتي:

تراتيب دون الإرجاع	تراتيب مع الإرجاع
12، 13، 14، 15	11، 12، 13، 14، 15
21، 23، 24، 25	21، 22، 23، 24، 25
31، 32، 34، 35	31، 32، 33، 34، 35
41، 42، 43، 45	41، 42، 43، 44، 45
51، 52، 53، 54	51، 52، 53، 54، 55

أي أن الأرقام: 11، 22، 33، 44، 55. لا تحتسب في حالة سحب دون إرجاع، وتحتسب في حالة ما إذا كان السحب مع إرجاع.

مثال 10:

تنوي إحدى شركات الاتصال إنشاء خطوط هاتفية جديدة في إحدى الدول، حيث يتكون الخط الهاتفي من عشرة أرقام.

علما أن الرقم الأول يجب أن يكون 0، والرقم الثاني يجب أن يكون 6، والرقم الثالث يجب أن يكون 6.

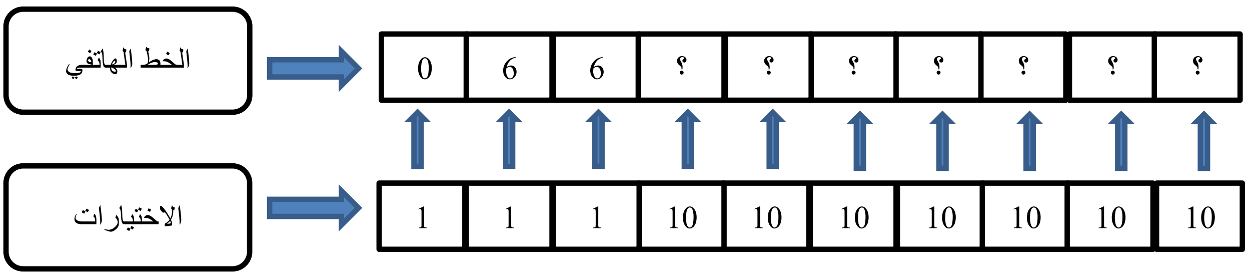
ما هو عدد الخطوط الهاتفية التي يمكن تشكيلها؟

الحل:

نحن أمام ترتيبة مع إرجاع، حيث أن: n=10 (0، 1، 2،...،9) و k=7، وبالتالي عدد خطوط الهاتف الممكن تشكيلها هي:

$$AR_n^k = n^k$$
$$AR_{10}^7 = 10^7 = 10000000$$

يمكن تشكيل 10 ملايين خط هاتفي، ويمكن الاعتماد على الشكل الموالي للتوضيح أكثر:



عدد الخطوط هو:

$$1 \times 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7 = 10000000$$

IV التوافيق

فرضا أنه لدينا مجموعة أشخاص عددها n، ونريد تشكيل لجنة عدد أعضائها k، حيث k≤n. فما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها؟.

نلاحظ أن حساب عدد اللجان الممكن تكوينها هو نفس مشكلة تكوين مجموعة جزئية من k عنصر من المجموعة الكلية n. لكن تشكيل التوفيقة يختلف عن تشكيل التبديلة من حيث أنه في التوفيقة لا نأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر.

إذن التوفيقة هي عبارة عن عدد الطرق الممكنة التي يتم بها اختيار k عنصر من بين n عنصر دون مراعاة أو الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر، أي أن الترتيب غير مهم، ولتوضيح الاختلاف بين الترتيبة والتوفيقة نأخذ المثال الآتي:

مثال 11:

من خلال استعمال العد المباشر ماهي عدد التراتيب والتوافيق المكونة من حرفين مختلفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}.

<u>الحل:</u>

من خلال العد المباشر نحصل على 12 ترتيبة كالآتي:

ab,ac,ad,ba,bc,bd,ca,ab,cd,da,db,dc

أما عندما نريد حساب التوافيق المكونة من حرفين فنحصل على 6 توفيقات فقط، وهي:

ab,ac,ad,bc,bd,cd

ويمكن توضيح الفرق بين الترتيبة والتوفيقة في الجدول الآتي:

التراتيب	التوافيق
ab,ba	ab
ac,ca	ac
ad,da	ad
bc,cb	bc
bd,db	bd
cd,dc	cd

الصيغة الرياضية لحساب التوفيقات نميز بين حالتين:

1. توافيق دون إرجاع: إذا كانت عملية السحب تتم دفعة واحدة أو سحب عنصر دون إرجاعه، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة دون إرجاع أو دون إعادة، ويكون عدد المجموعات الممكن سحبها أو تشكيلها هو:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

حيث:

K تمثل عدد مرات السحب؛

.k≤n

انطلاقا من الصيغة التالية:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

يمكن إدراج ما يسمى بجدول باسكال أو (مثلث باسكال)، الذي يمكننا من معرفة قيم C_n^k من أجل القيم المتزايدة لكل من (k و n).

جدول باسكال

$k \rightarrow$ / $n \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								…
1	1	1				C_{n-1}^{k-1}	$+\,C_{n-1}^{k}$		…
2	1	2	1				$=C_n^k$		…
3	1	3	3	1					…
4	1	4	6	4	1				…
5	1	5	10	10	5	1			…
6	1	6	15	20	15	6	1		…
7	1	7	21	35	35	21	7	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

بالعودة للمثال رقم 11 كانت عدد التوافيق المكونة من حرفين مختلفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}. هي 6 توافيق فقط، وهي:

ab,ac,ad,bc,bd,cd

بتطبيق الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نحصل على نفس النتيجة:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$$

وهي نفس القيمة التي يمكن استنتاجها من خلال جدول باسكال أعلاه.

مثال 12:

ما هو عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة من 10 أشخاص؟.

<u>الحل:</u>

لدينا k=4 و n=10 ، والترتيب هنا لا يهم، بتطبيق الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نحصل على:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = 210$$

إذن يمكن تشكيل 210 لجنة مختلفة.

مثال 13:

صندوق يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 كريات بيضاء، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة، ما هو عدد طرق سحب:

- 3 كريات؟
- 3 كريات حمراء؟
- 1 حمراء و 2 بيضاء؟

<u>الحل:</u>

عدد الكريات في الصندوق n=10، عدد الكريات المسحوبة k=3، الترتيب لا يهم، والسحب يتم دفعة واحدة أي دون إرجاع.

باستعمال الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نجد:

- عدد طرق سحب 3 كريات هو:

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\,(10-3)!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{3!\times 7!}=120$$

- عدد طرق سحب 3 كريات حمراء: يكون من خلال سحب 3 كريات حمراء من بين 6 كريات حمراء، كما يلي:

$$C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=20$$

- عدد طرق سحب 1 كرية حمراء و2 كرية بيضاء هو:

$$C_{6}^{1}\times C_{4}^{2}=\frac{6!}{1!\,(6-1)!}\times\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=6\times 6=36$$

2. توافيق مع الإرجاع: في حالة السحب مع إرجاع العنصر المسحوب فإنه من المحتمل أن يظهر العنصر المسحوب مرة أخرى عند إجراء سحب جديد. في هذه الحالة نكون أمام توفيقة مع الإرجاع، وتكون الصيغة الرياضية لحساب التوافيق مع الإرجاع هي:

$$K_{n}^{k}=C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

انطلاقا من الصيغة التالية:

$$K_{n}^{k}=K_{n}^{k-1}+K_{n-1}^{k}$$

يمكن إدراج جدول التوافيق مع الإعادة، الذي يمكننا من معرفة قيم $^{k}_{n}$ من أجل القيم المتزايدة لكل من (k و n). وفق الشكل التالي:

$\nearrow^{+}$	K_{n-1}^{k}
K_{n}^{k-1}	$=K_{n}^{k}$

جدول حساب التوافيق مع الإعادة

$k \rightarrow$ / $n \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
2	1	2	3	4	5	6	7	8	…
3	1	3	6	10	15	21	28	36	…
4	1	4	10	20	35	56	84	120	…
5	1	5	15	35	70	126	210	330	…
6	1	6	21	56	126	252	462	792	…
7	1	7	15	71	197	449	911	1703	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

مثال 14:

ماهي عدد التوافيق المكونة من حرفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}.

الحل:

معطيات هذا المثال هي نفسها معطيات المثال رقم (11) أين تم حساب عدد التراتيب والتوافيق دون إرجاع حيث كانت النتائج كالتالي:

- عدد التراتيب 12 ترتيبة.
- عدد التوافيق دون إرجاع 6 توافيق.

لحساب عدد التوافيق مع الإرجاع يمكن الاستعانة بالصيغة الرياضية للحساب كما يلي:

$$C_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10$$

وهي نفس القيمة التي يمكن استنتاجها من الجدول السابق الذي يمكننا من حساب التوافيق مع الإعادة.

من خلال العد المباشر يمكن توضيح الفرق التوفيقة دون إرجاع، والتوفيقة مع الإرجاع في هذا المثال كما يبين الجدول الآتي:

التوافيق مع الإرجاع (10 توافيق)	التوافيق دون إرجاع (6 توافيق)
ab, ac, ad, bc, bd, cd, aa, bb, cc, dd	ab, ac, ad, bc, bd, cd

مثال 15:

لدينا 5 عدائين، نريد اختيار اثنين منهم للمشاركة في سباقين، بحيث يمكن لنفس الشخص أن يشارك في السباقين معا، بكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين.

الحل:

k=2، n=5، الإرجاع ممكن، الترتيب غير مهم، بالتالي لدينا توفيقة مع الإرجاع، وعليه عدد الطرق الممكنة هو:

$$C_{5+2-1}^{2} = \frac{(5+2-1)!}{2!\,(5-1)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{30}{2} = 15$$

3. صيغة ثنائي نيوتن: من أجل كل عدد تام: $n \geq 1$ وكل عدد حقيقي a و b لدينا الصيغة التالية:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n\, b^0 + C_n^1\, a^{n-1}\, b^1 + \cdots \dots \dots \dots + C_n^n\, a^0\, b^n$$

والتي تسمى صيغة نيوتن وهذه الصيغة يمكن كتابتها بصورة مختصرة كما يلي:

$$\forall a,b \in \mathcal{R} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

وبالنظر لتناظر المقادير $\frac{k}{n}$ فإن الصيغة السابقة يمكن كتابتها أيضا وفق الصورة التالية:

$$\forall a,b \in \mathcal{R} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}\, a^{n-k}\, b^k$$

وبفرض أن: $(n-k=q)$، فإن صيغة نيوتن تأخذ الصور التالية:

$$\forall a,b \in \mathcal{R} \quad (a+b)^n = \sum_{q=0}^{n} C_n^q\, a^q\, b^k$$

هذه الصيغة يمكن برهنتها بالتراجع على (n) كما يلي:

$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^{k+1}$$

$$= C_n^0\, a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, a^{n-k}\, b^{k+1} + C_n^n\; b^{n+1}$$

$$= C_n^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n+1-k}\ b^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}\ a^{n-k+1}\ b^k + C_n^n\ \ b^{n+1}$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1})\ a^{n+1-k}\ b^k + C_{n+1}^{n+1}\ \ b^{n+1}$$

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k\ a^{n+1-k}\ b^k + C_{n+1}^{n+1}\ \ b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\ a^{n+1-k}\ b^k$$

والجدير بالذكر أن صيغة ثنائي نيوتن أعطت اسمها لإحدى القوانين الاحتمالية الشهيرة "التوزيع الثنائي"، كما سنرى لاحقا في الفصل المتعلق بالتوزيعات الاحتمالية).

إذا وضعنا (a=b=1) في صيغة نيوتن نحصل على:

$$2^n = C_n^0\ + C_n^1\ + C_n^2 + \cdots + C_n^k \ldots + C_n^{n-1}\ + C_n^n$$

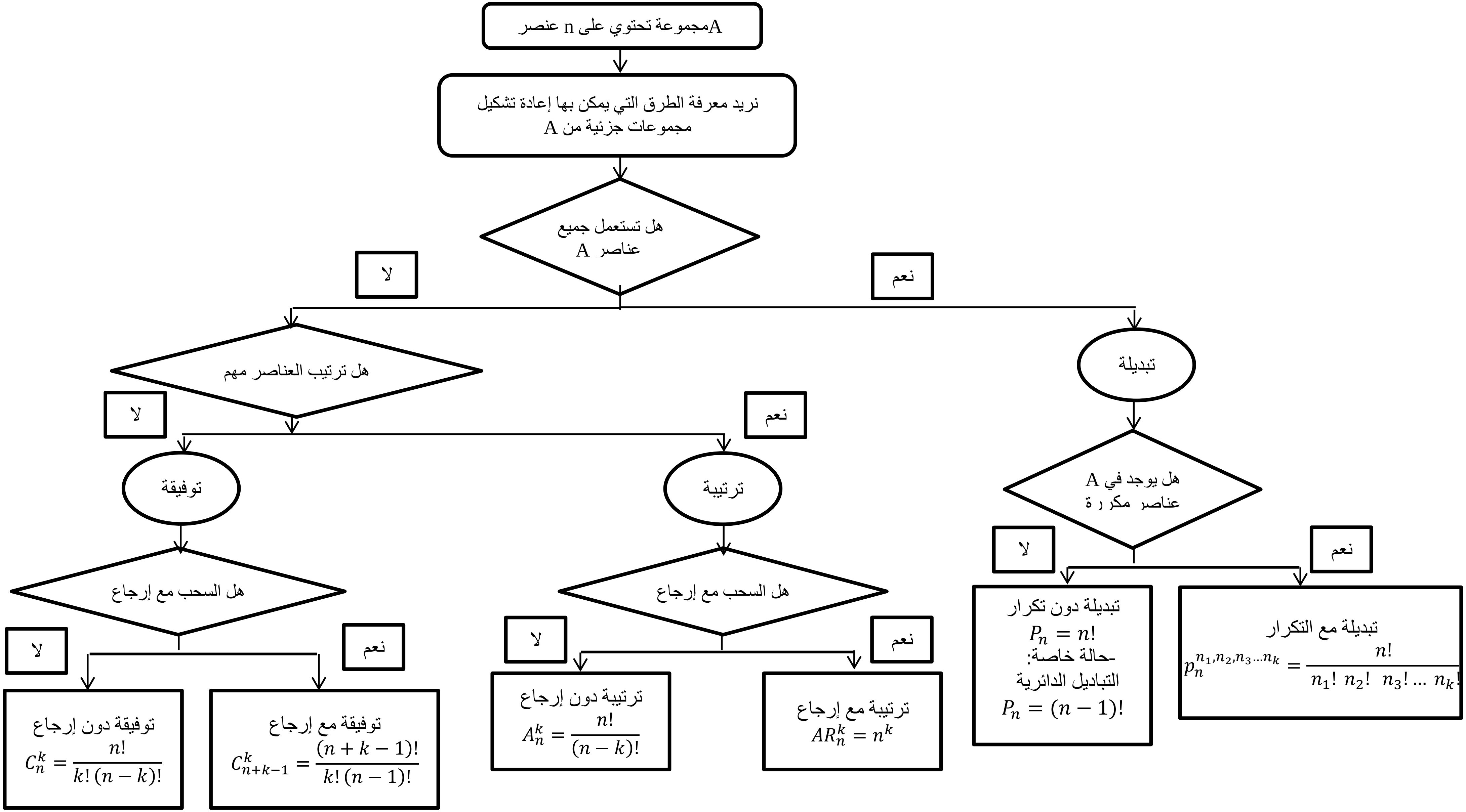
المقادير:

$$C_n^0\ + C_n^1\ + C_n^2 + \cdots + C_n^k \ldots + C_n^{n-1}\ + C_n^n$$

تسمى بمعاملات ثنائي نيوتن، ومجموع هذه المقادير يساوي إلى 2^n.

يمكن تقديم المخطط التوضيحي الموالي كملخص لأهم ما جاء في هذا المحور الذي خصص للتحليل التوافقي:

مخطط توضيحي لأهم مكونات محور التحليل التوافقي



ثانيا – نظرية الاحتمالات

I فضاء العينة والحوادث

1. فضاء العينة: في الكثير من الأحيان نصادف أو نقوم بالعديد من التجارب في حياتنا اليومية ونحصل على ملاحظات أو نتائج. فكل تجربة يمكن معرفة نتائجها مسبقا من خلال القوانين أو المسلمات كما في العلوم التقنية تسمى بالتجربة النظامية، أما التجربة التي يمكن معرفة جميع نتائجها الممكنة ولكن من غير ممكن معرفة ترتيب حدوث هذه النتائج مسبقا فتسمى بالتجربة العشوائية، هذه النتائج المحتملة للتجربة تعرف بفضاء العينة ويرمز لها بالرمز Ω.

مثال 16:

إن رمي زهرة نرد تسمى بتجربة عشوائية، لأن جميع نتائجها هي ظهور أحد الأوجه الستة التي تحمل الأرقام 4،1،2،3،5،6 ولا يمكن لأحد أن يعرف قبل رمي زهرة النرد أي الأوجه سيظهر.

عند رمي حجرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال 17:

فضاء المعاينة لرمي قطعة نقود هو: $\Omega=\{P,F\}$.

حيث: P= تمثل ظهور القيمة.

F= تمثل ظهور الشعار (الصورة).

مثال 18:

أوجد فضاء المعاينة وعدد عناصره عند رمي زهرتي نرد متاليتين؟

يمكن الحصول على فضاء المعاينة على الشكل التالي:

الرمية الثانية

6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
	1	2	3	4	5	6

الرمية الأولى

ويكون فضاء المعاينة هو:

$$\Omega = \{(1.1), (1.2), (1.3), (1.4).....(2.1), (2.2)....(6.3), (6.4), (6.5), (6.6)\}$$

أما عدد عناصر هذا الفضاء فهو: n=36.

2. **الحدث:** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة يتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة ونرمز له بالحروف اللاتينية ....A, B, C، وينقسم إلى عدة أنواع:

1.2 الحادث البسيط: يسمى أيضا بالحادث الأولي أو الحادث الابتدائي، وهو الحدث غير قابل للتجزئة؛ أي هو بمثابة مجموعة جزئية من فراغ إمكانيات التجربة ذات أمكانية وحيدة، مثلا نقول أن حدث ظهور العدد 3 على وجه حجرة النرد هو بمثابة حدث بسيط، إذ أنه غير قابل للتجزئة إلى حوادث أبسط.

2.2 الحادث المركب: هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث حوادث بسيطة، مثلا نقول أن حدث ظهور رقم فردي عند رمي حجرة نرد هو حدث مركب لأنه يتكون من عدة حوادث بسيطة، حيث:

إذا كان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي فإن :

$$A = \{1, 3, 5\}$$

نقول أن A هو حدث مركب يحتوي على ثلاث عناصر من فضاء المعاينة.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

3.2 الحادث الأكيد: نقول عن الحادث A أنه حادث أكيد إذا كان تحققه مؤكدا نتيجة التجربة، وبالتالي فهو حادث يحتوي جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة. مثلا نقول أن A حدث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي حجرة نرد هو حدث أكيد، حيث:

$$A = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

4.2 الحادث المستحيل: نقول عن حادث ما أنه حادث مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق مهما أعدنا التجربة. فمثلا الحادث A الذي يمثل الحصول على رقم فردي وزجي في آن واحد عند رمي حجرة نرد هو حادث مستحيل، ونرمز له بالرمز $A=\emptyset$.

5.2 الحوادث غير المتنافية والمتنافية

1.5.2 الحوادث المتنافية: هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر، أي أن تقاطع الحادثين المتنافيين A وB هو مجموعة خالية $A \cap B=\emptyset$.

2.5.2 الحوادث غير المتنافية: هي الحوادث التي يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها لا ينفي وقوع الآخر، أي أن تقاطع الحادثين غير المتنافيين A وB ليس مجموعة خالية $A \cap B \neq \emptyset$.

مثال 19:

عند رمي حجرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

نفترض أن الحادث A يمثل ظهور رقم زوجي، وأن الحادث B يمثل ظهور رقم فردي، الحادث C يمثل ظهور رقم أولي.

$A=\{2, 4, 6\}$ $\quad$ $B=\{1, 3, 5\}$ $\quad$ $C=\{2, 3, 5\}$

الحدثين A وC هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي في نفس الوقت وبالتالي يكون: $A \cap C=\{2\}$.

الحدثين A وB هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد زوجي وفردي في نفس الوقت وبالتالي يكون: $A \cap B=\{\emptyset\}$.

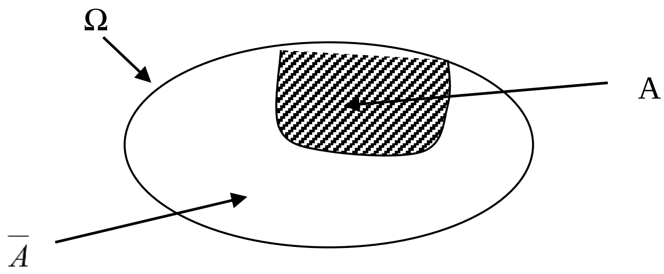
6.2 الحوادث المستقلة وغير المستقلة والشرطية

1.6.2 الحوادث المستقلة: تكون الحوادث مستقلة عندما يكون وقوع أحدها لا يؤثر ويتأثر بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة.

2.6.2 الحوادث غير المستقلة: إذا كان وقوع حادث ما يؤثر في وقوع حادث آخر فنكون بصدد حوادث غير مستقلة. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة به n كرة، هي حوادث غير مستقلة لأن السحبة الأولى أو الثانية تؤثر على السحبات الموالية لها.

3.6.2 الحوادث الشرطية: إذا كان حدث ما مرتبط بتحقق أو عدم تحقق حدوث حادث آخر، نقول عن هذا الأخير أنه حادث شرطي.

7.2 الحادث المتمم: إذا كان الحدث A ينتمي إلى فضاء المعاينة (Ω) فإن الحدث المكمل له ويرمز بالرمز $\bar{A}$ يتكون من عناصر فضاء المعاينة (Ω) غير الموجودة في الحادث A كما يظهر في الشكل التالي:



مثال 20:

عند رمي زهرة النرد وكان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي $A=\{1.3.5\}$.

إن $\overline{A}$ (الحادث المتمم) يمثل ظهور رقم زوجي:

$$\overline{A}=\{2.4.6\}$$

ومنه:

$$A\cup\overline{A}=\Omega$$
$$A\cap\overline{A}=\Phi$$

8.2 الحوادث الملائمة والممكنة

عند قيامنا بتجربة ما فإننا نرجو حدوث حادث معين، وهذا الأخير (الحادث المرغوب) يسمى بالحادث الملائم. ففي حالة رمي قطعة نقود فإن ظهور الصورة يعتبر حالة ملائمة إذا كان اهتمامنا هو ظهور الصورة، وفي حالة رمي حجرة نرد فإن ظهور الأوجه التي تحمل الأرقام 2 أو 4 أو 6 تعتبر حالات ملائمة إذا كان اهتمامنا بحادثة ظهور رقم زوجي عند إلقاء حجرة النرد.

II الاحتمال ومداخله

1. معنى كلمة احتمال

كثيرا ما نستخدم كلمة احتمال في حياتنا اليومية وذلك إما:

- بصورة صريحة؛ كأن نقول "من المحتمل جدا أن يسقط المطر هذا اليوم".
- بصورة ضمنية: كأن نقول "إن إمكانية فوز الفريق X بالبطولة ضعيفة جدا".

إلا أن هذا الكلام لا يتعدى تقديرات عامة وشاملة وغير دقيقة إذا كانت نظرتنا للأمور نظرة علمية فيما يخص تحقق حادث ما. وهذا ما جعل الإحصائيين لا يرضون بالاكتفاء بالتعبير عن الاحتمال بالعبارة كبير أو صغير، بل يرون ضرورة قياسه رقميا بقيمة عددية لإضفاء طابع الدقة عليه من جهة والوقوف على أهميته من حيث الكبر أو الصغر من جهة أخرى.

يقاس الاحتمال بقياس نهايته الصغرى هي الصفر والتي تعكس الاستحالة المطلقة لتحقيق الحادث ونهايته العليا هي الواحد والتي تعكس الحقيقة المطلقة لتحقيق الحادث، وبالتالي فإن القيمة العددية للاحتمال هي عبارة عن كسر يقع بين الصفر والواحد.

2. مداخل تعريف الاحتمال

من أجل تعريف الاحتمال يتم اعتماد مدخل محدد من المداخل المعروفة في هذه النظرية ومنها:

2.2 المدخل التقليدي: وفق هذا المدخل يمكن تقدير مقدار الاحتمال بصفة مؤكدة من طبيعة أو اعتبارات الحادثة دون الحاجة إلى إجراء التجربة.

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة (متساوية الفرصة) في الظهور، وكان فضاء المعاينة لها Ω يحتوي على عدد من العناصر N وكان لدينا حادث A تحتوي على n من العناصر المتماثلة، فإن الاحتمال الكلاسيكي للحادث A ويرمز له بالرمز P(A) يحسب كالتالي:

$$\text{احتمال } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \qquad P(A)=\frac{n}{N}$$

وإذا اعتمدنا مفهوم أصلي المجموعات فإن احتمال تحقق الحادث A هو عبارة عن ناتج قسمة عدد عناصر المجموعة الجزئية A على المجموعة الكلية Ω، ويعبر عن ذلك بما يلي:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

مثال 21:

إذا رميت حجرة نرد عشوائيا، أحسب احتمال ظهور رقم فردي واحتمال ظهور رقم زوجي؟.

<u>**الحل:**</u>

فراغ المعاينة $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$N=6$

فإذا كانت A تشير إلى حدوث ظهور رقم فردي وB تشير إلى حادث ظهور رقم زوجي فإن:

$$A=\{1,3,5\}, n(A)=3$$
$$B=\{2,4,6\}, n(B)=3$$

وبالتالي:

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.5$$
$$P(B)=\frac{3}{6}=0.5$$

1.2.2 خواص الاحتمال التقليدي: تتمثل خواص الاحتمال في:

-الاحتمال قيمة عددية موجبة دوما، أي : $P(A) \geq 0$.

-قيمة احتمال الحادث A محصورة في المجال: $0 \leq P(A) \leq 1$.

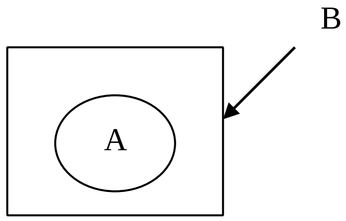
-احتمال الحادث والحادث المتمم هو احتمال الحادث الأكيد، أي:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

ومنه:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

- إذا كان الحادث A ينتمي إلى الحدث B، أي أن : $(A \subset B)$.



فإن:

$$P(A) < P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(B)$$

2.2.2 حدود وقصور المدخل التقليدي: من أجل اعتماد المدخل التقليدي لتعريف الاحتمال يجب أن يتوفر الشرطين الآتيين:

- أن يكون عدد الإمكانيات منته؛
- يجب أن تكون الحوادث متكافئة الاحتمال (لها نفس الفرصة) من حيث الحدوث.

3.2 المدخل الإحصائي: عيب التعريف التقليدي للاحتمال أنه مبني على تساوي الفرص في الظهور لكل نتيجة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ذات عدد الإمكانيات المنتهي. لذا فالاحتمال وفق المدخل الإحصائي أو المدخل التجريبي (التاريخي، التكراري) يعتمد على إجراء التجارب وتسجيل المشاهدات عن الظواهر محل الدراسة ومن ثم استنتاج الاحتمال المقابل لذلك.

احتمال حدوث حادثة ما وفق هذا المدخل يسمى بالاحتمال التجريبي (النسبي) وهو مبني على فكرة التكرار النسبي، فإذا ما كررنا تجربة عشوائية (N) من المرات وكان عدد كرات ظهور الحادثة A هو n فإن الاحتمال P(A) يعطى بالعلاقة:

$$P(A) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{n}{\mathrm{N}}$$

هذا المدخل له نفس الخواص التي تم إيجادها عند المدخل التقليدي شريطة تحقق الشرطين الرئيسيين التاليين:

- إجراء التجارب في نفس الظروف (من حيث الزمان و/ أو المكان)؛
- إجراء عدد كبير من التجارب؛ فالتجارب القليلة قد تتعرض لاضطرابات ناتجة عن الصدفة.

مثال 22:

إذا رميت قطعة عملة عشوائيا 10000 مرة، وكانت الأحداث F و P تشير إلى ظهور الصورة والكتابة على الترتيب، وكانت نتيجة القذف 5601 مرة ظهور الصورة و 4399 مرة ظهور الكتابة، أوجد احتمال ظهور الصورة P(F) واحتمال ظهور الكتابة P(P)؟

الحل:

احتمال ظهور الصورة = $P(F) = \frac{5601}{10000} = 0.5601$

احتمال ظهور الكتابة = $P(P) = \frac{4399}{10000} = 0.4399$

مثال 23:

إذا بلغ عدد طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتسيير في سنة 2006، 4500 طالب مقسمين إلى 3000 طالب في قسم التسيير و 1500 طالب في قسم الاقتصاد، وطلب منا اختيار طالب واحد عشوائيا لتمثيل طلبة الكلية في إحدى المسابقات، ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب من قسم الاقتصاد وما هو احتمال أن يكون من قسم التسيير؟

الحل:

احتمال أن يكون الطالب من قسم الاقتصاد = $P(E) = \frac{1500}{4500} = \frac{1}{3}$

احتمال أن يكون الطالب من قسم التسيير = $P(G) = \frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}$

1.3.2 حدود وقصور المدخل الإحصائي: إن التردد النسبي الذي بني عليه التعريف الإحصائي للاحتمالات يعطي في الحقيقة قيمة تقريبية للاحتمال وذلك للأسباب التالية:

- لا يمكننا إحصائيا أن نصل إلى نهاية النسبة $\frac{n}{N}$، وذلك عندما تسعى N إلى اللانهاية، إذ أن الرقم الذي يمثل اللانهاية غير محدد رياضيا.
- في بعض الظواهر لا يمكن تحقيق عدد كبير من التجارب نظرا لطبيعة الظاهرة محل الدراسة لعدة أسباب، منها:
  - إجراء التجارب يؤدي إلى إتلاف الوحدة؛

- إجراء التجربة مكلف ويتطلب وقتا كبيرا للحصول على النتيجة؛
- الظاهرة خاضعة للمشاهدة لا التجربة مثل (الزلازل، حوادث السيارات، التسرب المدرسي).

- لا يوجد ما يضمن توفر نفس الشروط عند إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات.

3.2 المدخل الذاتي: في بعض الأحيان لا يمكننا إطلاقا اعتماد المدخل التقليدي ولا المدخل الإحصائي لإعطاء احتمال حول ظاهرة ما، وذلك إما لكون نتائج التجربة غير متساوية وإما لعدم توفر بيانات التكرار النسبي، وعندها لا يبق لنا إلا التقدير الذاتي الذي يرتكز على ثلاث عناصر أساسية ترتبط بالإنسان ذاته (الاعتقاد الشخصي، التجربة الشخصية، الحدس الشخصي).

III قواعد حساب الاحتمالات

تنقسم العمليات على الاحتمالات إلى عمليات أو قواعد الجمع التي تكون في الحوادث المتنافية وغير المتنافية، وعمليات الضرب التي تستخدم في الحوادث المستقلة وغير المستقلة والمتمثلة في:

1. قاعدة جمع الحوادث المتنافية

نقول أن الحدثين A وB متنافيين إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح.

وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية

نقول أن الحدثين A و B غير متنافيين إذا كان وقوع الحادث A لا يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نقوم بطرح الاحتمال $P(A \cap B)$ لكي نتجنب حسابه مرتين، لأنه في الأصل ضمن الاحتمال P(A) و P(B).

مثال 24:

خلال دراسة لمدى انتشار ظاهرة التدخين في وسط التلاميذ وانعكاسها السلبية على نتائجهم الدراسية تم تسجيل الجدول المزدوج التالي، والذي يوضح تقسيم 100 تلميذا في إحدى المدن بين مراحل التعليم الثلاث (ابتدائي، متوسط، ثانوي) وظاهرة التدخين (يدخن، لا يدخن).

التدخين \ مرحلة التعليم	ابتدائي	متوسط	ثانوي	المجموع
يدخن	2	25	43	70
لا يدخن	8	15	7	30
المجموع	10	40	50	100

المطلوب:

1) ما هو احتمال وجود تلميذ في المرحلتين الابتدائية أو المتوسطة؟.

2) ما هو احتمال أن نختار تلميذا من المرحلة المتوسطة أو ليس مدخنا؟.

الحل:

1) احتمال وجود تلميذ في المرحلة الابتدائية أو المتوسطة تمثل احتمال حدثين متنافيين وبالتالي إذا كان:

A_1 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة الابتدائية.

A_2 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة المتوسطة. فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{10}{100} + \frac{40}{100} = \frac{50}{100} = 0.5$$

2) احتمال أن يكون التلميذ من المرحلة المتوسطة أو ليس مدخنا يمثل احتمال حدثين غير متنافيين، فإذا كان:

A_2 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة المتوسطة.

B_2 يمثل حدث أن التلميذ ليس مدخنا. فإن:

$$P(A_2 \cup B_2) = P(A_2) + P(B_2) - P(A_2 \cap B_2) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

3. قاعدة ضرب الحوادث المستقلة

نقول أن الحدثين A و B مستقلين إذا كان وقوع الحادث A لا يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A غير مرتبط بوقوع الحادث B. وبالتالي يكون:

$$P(A, B) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال 25:

نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة، لأن نتائج رمي قطعة النقود في المرة الأولى لا تؤثر على نتائج الرمية الثانية. فإذا رمزنا لحادث ظهور صورة النقود الأولى بـ A وصورة النقود الثانية بـ B فإن احتمال ظهور الصورة في الرمية الأولى والثانية هو:

$$P(A,B)=P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

4. قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة

نقول أن الحدثين A و B غير مستقلين إذا كان وقوع الحادث A يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A مرتبط بوقوع الحادث B. وبالتالي يكون:

$$P(A,B)=P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$$

تقرأ: احتمال وقوع الحدثين A وB يساوي احتمال وقوع الحادث A مضروب في احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق.

ومنه يمكن استنتاج قانون الاحتمال الشرطي الذي يرمز له بالرمز $P(B/A)$ كما يلي:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

مثال 26:

لدينا صندوق به 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء. المطلوب:

1) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى؟.

2) ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى.

<u>الحل:</u>

نفترض أن: الحدث A يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الأولى.

الحدث B يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الثانية.

ومنه فإن احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى.

$$P(A)=\frac{5}{8}$$

احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى هو:

$$P(B/A)=\frac{4}{7}$$

وعليه فإن احتمال سحب كرتين بيضاويتين في سحبتين متتاليين هو:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$$

IV الاحتمال الكلي

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما A مرتبط بتجربة ما، لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية: B1, B2, B3,...Bn، والتي تشكل تجزيئا لمجموعة كلية **Ω**. وهذه الأخيرة تتحقق إذا تحققت الشروط الآتية:

الشرط الأول: لا يمكن أن يكون الاحتمال سالبا:

$$\forall i\,;P(Bi)\geq 0$$

الشرط الثاني: الحوادث Bi متنافية مثنى مثنى:

$$\forall i,j\;/i\neq j\,;(Bi\cap Bj)=\emptyset$$

الشرط الثالث: إتحاد الحوادث Bi يعطينا المجموعة الكلية:

$$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$$

تحقق هذه الشروط مجتمعة يعطينا ما يسمى بالمنظومة التامة للحوادث. ويعبر عن الاحتمال الكلي بالصيغة الآتية:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(Bi).P(A/Bi)$$

V دستور بايز Bayes

في القرن الثامن عشر توصل عالم الرياضيات البريطاني توماس بايز Thomas Bayes إلى صياغة جديدة للاحتمال الشرطي، وتعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة وتعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية ومرافقة لحادث A.

لنفترض أنه لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية: B1, B2, B3,...Bn والتي تشكل تجزيئا لمجوعة كلية Ω و A حادث ما يمكن أن يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث:B1, B2, B3,...Bn ونريد حساب الاحتمالات الشرطية: P(Bi/A) لكل من تلك الحوادث، علما بأن الاحتمالات P(Bi) معلومة.

لدينا حسب قانون احتمال تقاطع الحوادث غير المستقلة:

$$P(A \cap Bi) = P(A).P(Bi/A) = P(Bi).P(A/Bi)$$

أي:

$$P(A).P(Bi/A) = P(Bi).P(A/Bi)$$

ولنقسم طرفي المعادلة على P(A)، علما أن (P(A)>0) فنجد:

$$P(Bi/A) = \frac{P(Bi).P(A/Bi)}{P(A)}$$

وبما أن الحوادث B1, B2, B3,...Bn تحقق شروط الاحتمال الكلي (تشكل منظومة تامة للحوادث)، و A حادث غير مستحيل الحدوث فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$

وبتعويض قيمة P(A) بما يقابلها في صيغة الاحتمال الكلي نجد أن:

$$\boxed{P(Bi/A) = \frac{P(Bi).P(A/Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)}}$$

وتدعى هذه الأخيرة الناتجة بنظرية أو دستور بايز.

مثال 27:

في مصنع لإنتاج نوع معين من المصبرات نجد أن:

- الآلة الأولى تنتج 40% من المنتج مع العلم أن 1.5% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثانية تنتج 25% من المنتج مع العلم أن 1.2% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثالثة تنتج 35% من المنتج مع العلم أن 2% من إنتاجها معيب.

فإذا اخترنا وحدة من الإنتاج اليومي بشكل عشوائي أحسب الاحتمالات التالية:

أ) احتمال أن تكون الوحدة معيبة؟

ب) إذا كانت الوحدة المسحوبة معيبة فما هو احتمال:

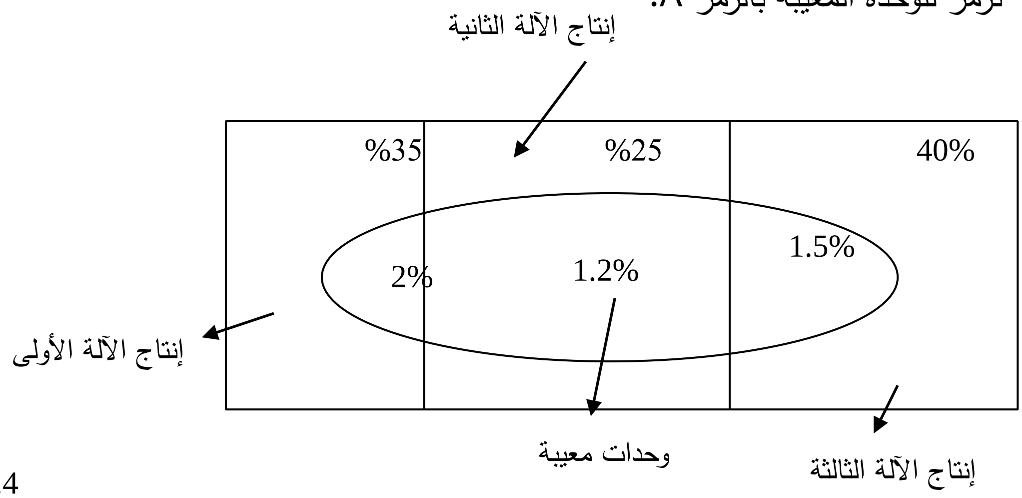
- أن تكون من إنتاج الآلة الأولى (B_1)؟

- أن تكون من إنتاج الآلة الثانية (B_2)؟
- أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة (B_3)؟

الحل:

- احتمال أن تكون الوحدة معيبة يمثل وقوع حادث لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية B1, B2, B3، والتي تشكل تجزيئا لمجموعة كلية Ω.

نرمز للوحدة المعيبة بالرمز A.



$$P(B_1) = 0.4$$
$$P(B_2) = 0.25$$
$$P(B_3) = 0.35$$
$$P(A/B_1) = 0.015$$
$$P(A/B_2) = 0.012$$
$$P(A/B_3) = 0.02$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$
$$= 0.4 \times 0.015 + 0.25 \times 0.012 + 0.35 \times 0.02 = 0.016$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الأولى بشرط أن تكون معيبة $P(B_1/A)$.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0.4 \times 0.015}{0.016} = 0.375$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثانية بشرط تكون معيبة $P(B_2/A)$.

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2).P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.25 \times 0.012}{0.016} = 0.1875$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثالثة بشرط تكون معيبة $P(B_3/A)$.

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3).P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{0.35 \times 0.02}{0.016} = 0.4375$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

اتفق 9 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مقابلة في كرة القدم:

1. بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف واحد به 9 مقاعد؟
2. بفرض أنهم لم يجدو إلا 7 مقاعد، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس؟
3. قررت مجموعة الأصدقاء (9 أصدقاء) الذهاب لتناول العشاء بعد المباراة معا:

أ. بكم طريقة يمكنهم الجلوس على مائدة مستديرة بها 9 كراسي؟

ب. بكم طريقة يمكنهم الجلوس على مائدة مستديرة بها 9 كراسي إذا علمت أن اثنين منهم يريدون الجلوس بجانب بعضهم البعض؟

التمرين الثاني:

اشترى الأستاذ "س" 10 كتب وعند دخوله المنزل قرر وضعهم على رف يتسع لهم.

من بين هذه الكتب: 4 كتب إحصاء و3 كتب رياضيات، كتابين اقتصاد وكتاب محاسبة.

يود الأستاذ ترتيب كتبه بدلالة المادة، أي الكتب حسب المواضيع تبقى مجتمعة على الرف.

المطلوب: ما هو عدد الحالات الممكنة التي تحقق له مبتغاه ؟

التمرين الثالث:

يراد تشكيل لجنة طبية من 3 أعضاء يتم اختيارهم من 6 أطباء منهم أخصائيان و4 طبيبات.

المطلوب: ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية:

1. إذا لم يكن هناك أي شرط حوا اختيار الأعضاء؟
2. يجب أن تضم اللجنة طبيبا أخصائيا واحدا فقط ؟
3. يجب أن يكون هناك على الأكثر طبيبة واحدة في اللجنة ؟

التمرين الرابع:

ما عدد لوحات السيارات التي يمكن الحصول عليها من استعمال رقمين (حيث لا يكون الرقم الأول 0) وأربعة من الأحرف الهجائية اللاتينية (عددها 26 حرف) إلى يسار الرقمين في الحالات التالية:

- تكرار الرقم والحرف.
- عدم تكرار الرقم والحرف.

التمرين الخامس:

1	2	3
4	5	6
A	B	C

تسمح لنا لوحة مفاتيح العمارة المكونة من رموز(الرمز هو رقم سري code) (الشكل المقابل) ← من دخول العمارة (المبنى) باستخدام حرف متبوع بعدد من 3 أرقام (متمايزة أو لا).

المطلوب:

1. كم عدد الرموز المختلفة التي يمكننا تشكيلها؟
2. كم عدد الرموز الموجودة بدون الرقم 1؟
3. كم عدد الرموز التي تحتوي على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل؟
4. كم عدد الرموز الموجودة بأرقام متمايزة؟
5. كم عدد الرموز الموجودة برقمين متطابقين على الأقل؟

التمرين السادس:

تستخدم شركة 16 امرأة و 19 رجلا. تقرر انتخاب لجنة لإدارة للشركة، تتألف من رئيس ونائب رئيس وأمين صندوق. المناصب ليست تراكمية.

المطلوب:

1. ما هو عدد المكاتب الممكنة؟
2. ما هو عدد المكاتب:

أ) أين تشغل امرأة منصب نائب الرئيس؟

ب) أين يكون الرئيس وأمين الصندوق من الذكور؟

ج) أين الرئيس ونائب الرئيس من جنسين مختلفين؟

3. ما هو عدد المناصب الممكنة مع العلم أن الرئيس رجل، ونائب الرئيس امرأة وأن السيد البشير يرفض الجلوس مع السيدة صليحة ؟

التمرين السابع:

أثبت أن:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

التمرين الثامن:

أوجد قيمة n في الحالتين التاليتين:

$$A_{n+1}^{3} = A_{n}^{4}$$

$$3C_{n+1}^{3} = 7C_{n}^{2}$$

التمرين التاسع:

1- يتكون الاستبيان متعدد الخيارات (QCM)، الذي يسمح بإجابة واحدة فقط لكل سؤال، من 15 سؤالاً. لكل سؤال، نقترح 4 إجابات محتملة. كم عدد الطرق التي يمكننا الإجابة بها على هذا الاستبيان؟

2- لي صديق نسيت رقم هاتفه (مكون من عشرة أرقام) لكنني أتذكر أن له شريحة جيزي وينتهي برقم ولايتنا (أم البواقي).

التمرين العاشر:

كيس يحتوي 13 كرة متماثلة ومختلفة في اللون منهم 6 كرات حمراء، 7 كرات صفراء، سحبت من الكيس ثلاث كرات عشوائياً الواحدة تلو الأخرى دون إعادة.

المطلوب: أحسب:

1. احتمال أن تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون.
2. احتمال أن تكون كرة واحدة على الأكثر من بين الكرات المسحوبة لونها أحمر.

التمرين الحادي عشر:

تملك مؤسسة إنتاجية ورشتين تقومان بإنتاج منتوج واحد ذي نوعيتين مختلفتين، الإنتاج اليومي للورشتين من النوعين ملخص بالجدول التالي:

مجموع الإنتاج	الورشة		نوع المنتوج
	2	1	
760	480	280	P_1
240	120	120	P_2
1000	600	400	مجموع الإنتاج

سحبنا وحدة منتوج من الإنتاج اليومي للمؤسسة بصورة عشوائية.

المطلوب:

1. ما احتمال أن تكون الوحدة من النوع الأول؟ من النوع الثاني؟

2. أحسب احتمال أن تكون الوحدة من الورشة الأولى؟ من الورشة الثانية؟
3. إذا علمت أن المنتوج من النوع الأول، ما احتمال أن تكون من الورشة الثانية؟

التمرين الثاني عشر:

نفرض أنه لدينا A وB حدثان بحيث أن: $P(A) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,5$

1. بفرض أن A وB متنافيان أحسب P(B) ؟
2. بفرض أن A وB مستقلان أحسب P(B) ؟
3. أحسب P(B) بفرض أن الحادث A لا يمكن أن يتحقق إلا إذا تحقق B؟

التمرين الثالث عشر:

في اجتماع يضم 5 نساء و7 رجال. اختير عشوائيا فردا ليلقي كلمة عليهم ثم اختير ثانية فردا آخر. فإذا كان الفرد الثاني امرأة فما احتمال أن يكون الفرد الأول امرأة كذلك.

التمرين الرابع عشر:

في مدينة معينة، تمتلك 36% من العائلات سيارة و22% ممن يمتلكون سيارة يملكون أيضا دراجة. بالإضافة إلى ذلك 30% من العائلات لديها دراجة.

المطلوب: ما هو احتمال:

1. امتلاك عائلة تم سحبها عشوائيًا سيارة و دراجة؟
2. امتلاك عائلة تم سحبها عشوائياً سيارة مع العلم أن لديها دراجة؟

التمرين الخامس عشر:

بافتراض وصول طائرتين إلى المطار الدولي في آن واحد، احتمال تأخر الطائرة الأولى هو 0,3، أما احتمال تأخر الطائرة الثانية هو 0,1، إذا علمت أن تأخر الطائرة الأولى مستقل عن تأخر الطائرة الثانية، **المطلوب:**

1. أحسب احتمال تأخر كلتا الطائرتين.
2. أحسب احتمال تأخر الطائرة الأولى ووصول الطائرة الثانية في الوقت المحدد.
3. أحسب احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في الوقت المحدد.

التمرين السادس عشر:

دلت المعطيات الإحصائية لطلبة السنة أولى جذع مشترك بكلية الاقتصاد أن 25% من الطلبة يرسبون الاقتصاد الجزئي، و15% يرسبون في الإحصاء، و10% يرسبون في الاقتصاد الجزئي والإحصاء معا.

المطلوب: اختير طالب عشوائيا، فإذا:

1. كان الطلب قدر رسب في الإحصاء فما هو احتمال أن يكون قدر رسب في الاقتصاد الجزئي؟
2. كان الطالب قد رسب في الاقتصاد الجزئي فما هو احتمال أن يكون قد رسب في الإحصاء؟
3. كان الطالب لم يرسب في الاقتصاد الجزئي فما هو احتمال أن لا يكون قد رسب في الإحصاء؟

التمرين السابع عشر:

ثلاثة موظفين في إحدى الشركات يقومون بنسخ تقارير الشركة مستخدمين جهاز الحاسب، فإذا كانت نسبة التقارير التي ينسخها الموظف الأول 40%، والثاني 35% والثالث ينسخ باقي التقارير. وكانت نسبة التقارير الخالية من الأخطاء من عمل الموظفين الثلاثة هي على الترتيب: 70%، 80%، 90% اختير أحد تقارير الشركة عشوائياً فوجد بلا أخطاء فما هو احتمال أن يكون الموظف الأول هو الذي نسخه؟

التمرين الثامن عشر:

ثلاث ولايات ورقلة، بسكرة وأدرار تشارك بإنتاج سنوي من التمور قدره 400 طن، 450 طن، 150 طن على التوالي من بين إنتاج وطني قدره 1000 طن، تشير الإحصائيات الزراعية للسنوات الماضية أن نسبة الإنتاج الرديء في هذه الولايات هو على التوالي 8%، 5%، 12%، نختار عشوائيا صندوقا من التمر.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج ولاية ورقلة، ولاية بسكرة، ولاية أدرار؟
2. إذا علمت أن هذا الصندوق من إنتاج ولاية بسكرة، فما هو احتمال أن يكون رديئا؟
3. إذا علمت أن هذا الصندوق من النوع الرديء، فما احتمال أن يكون من إنتاج:

أ– ولاية بسكرة؟ ب– ولاية ورقلة. ج– ولاية أدرار؟

التمرين التاسع عشر:

ثلاث صناديق تحتوي على مصابيح كهربائية، الصندوق الأول به 40 مصباحا من بينها مصباحان معيبان والصندوق الثاني به 60 مصباحاً من بينها 6 مصابيح معيبة والصندوق الثالث به 80 مصباحاً من بينها 12 مصابيح معيبة.

اختير أحد المصابيح عشوائياً.

المطلوب:

- أحسب احتمال أن يكون المصباح معيباً؟ وإذا كان معيب فما احتمال أن يكون من الصندوق الثالث؟

التمرين العشرون:

في أحد المصانع تقوم مصلحة المراقبة بمراقبة الحصص الموجهة نحو السوق، حيث أن كل حصة تخضع إلى الرقابة من طرف أحد المراقبين (C_1, C_2, C_3)، حيث يقوم C_1 بمراقبة 40% من الحصة الموجهة للسوق وهي نفس النسبة لـ C_2، أما النسبة المتبقية فيقوم بها C_3.

المراقب C_1 اكتشف أن 10% من الحصص التي خضعت للرقابة من طرفه غير مطابقة لمعايير الجودة المعتمدة، أما C_2 فاكتشف ما نسبته 5%، في حين أن C_3 اكتشف ما نسبته 20 %. تم سحب إحدى الحصص عشوائيا.

المطلوب:

1. ما هو احتمال اكتشاف أنها غير مطابقة لمعايير الجودة؟
2. إذا علمت أن الحصة التي تم فحصها كانت غير مطابقة لمعايير الجودة، ما هو احتمال أنها خضعت للرقابة من طرف C_3؟

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية والمميزات العددية

أولا: مفهوم المتغير العشوائي

ثانيا: المتغير العشوائي المتقطع ومميزاته العددية

- تعريف
- قانون التوزيع الاحتمالي
- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي
- دالة تابع التوزيع
- التمثيل البياني لتابع التوزيع
- المميزات العددية

ثالثا: المتغير العشوائي المستمر ومميزاته العددية

- تعريف
- قانون التوزيع الاحتمالي "تابع الكثافة الاحتمالية"
- التمثيل البياني لتابع الكثافة
- تابع التوزيع
- المميزات العددية

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والمميزات العددية

تمهيد:

في الكثير من الأحيان عند القيام بتجربة ما أو القيام بدراسة ما نتعامل مع قيم فعلية مثل أسعار المستهلكين، تكاليف الاستثمار، أسعار الفائدة وغيرها، لكن في أحيان أخرى نجد أنفسنا وفي العديد من المواقف مجبرين على التعامل مع ظواهر من طبيعة مختلفة تماما قيمها غير معروفة مسبقا، ولا يمكن تحديدها لملازمة الصفة العشوائية لها.

لقد عمل علماء الإحصاء على الاهتمام بالمتغيرات العشوائية، ودراسة خصائصها ومميزاتها الإحصائية، بهدف التنبؤ بها خلال المستقبل، وقد صنفت المتغيرات العشوائية إلى صنفين رئيسيين: متغيرات عشوائية متقطعة (منفصلة)، ومتغيرات عشوائية مستمرة (متصلة). وهذا ما سيتم التطرق إليه خلال هذا الفصل، علما أن كل المصطلحات المستعملة في الإحصاء الوصفي تبقى قابلة للاستخدام عند استعمال المتغيرات العشوائية – وما يختلف هنا هو استبدال التكرارات بالاحتمالات فقط.

أولا – مفهوم المتغير العشوائي

المتغير العشوائي (X) هو دالة ذات قيم عديدة، معرفة علة فضاء العينة Ω، أي أن المتغير العشوائي هو تطبيق مجاله فضاء العينة Ω، وقيمه أو مجاله المقابل Ω_X هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. وبتعبير آخر المتغيرة العشوائية هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة.

يرمز للمتغيرة العشوائية بحرف لاتيني كبير (X ,Y , Z .....)، ونكتب: $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$

أمثلة عن المتغيرات العشوائية:

- عند رمي زهرة النرد مرة واحدة، ولنعرف مثلا (X) متغيرا عشوائيا يمثل ظهور الأعداد الفردية، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = xi = \{0, 1\}$.
- عند رمي زهرة النرد مرتين، ولنعرف مثلا (X) متغيرا عشوائيا يمثل مجموع الرميتين، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = x_i = \{2, 3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.
- عند رمي قطعة نقدية مرتين، ولنعرف مثلا (X) متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأوجه (صورة) التي تظهر، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = x_i = \{0, 1, 2\}$.

ملاحظة: يعتمد الحرف الكبير (X) (أو أي رمز آخر: ...Y,Z في حالة عدة متغيرات) للدلالة على المتغير العشوائي، ونقابل الحرف الكبير بحرف صغير (x) من نفس الصنف للدلالة على القيمة العددية التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير.

تختلف المتغيرات العشوائية بحسب فضاء العينة المعرفة عليها، فإذا كان فضاء العينة قابل للعد ومنته أو غير منته فتكون المتغيرة العشوائية هنا منفصلة أو متقطعة، أما إذا كان فضاء العينة غير قابل للعد أي يأخذ عدد غير منتهي من القيم داخل مجال معلوم فإن المتغيرة العشوائية تكون مستمرة أو متصلة.

ثانيا– المتغير العشوائي المتقطع ومميزاته العددية

I **تعريف:** المتغير العشوائي المتقطع أو المنفصل هو المتغير الذي يأخذ عددا قابلا للعد من القيم سواء كان فراغ إمكانات التجربة منته أو غير منته.

1. **حالة الفراغ المنته:** المتغير العشوائي المتقطع في حالة الفراغ المنتهي هو ذلك المتغير الذي يستطيع أن يأخذ عددا منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره، وهذا يعني أن Ω_X مجموعة منتهية، أي:

$$X\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

مثل:

- قيمة الرقم الذي يظهر عند رمي حجرة النرد؛
- عدد السيارات المتواجدة بمرآب معين.

2. حالة الفراغ غير المنته: المتغير العشوائي المتقطع في حالة الفراغ الغير منته هو ذلك المتغير المعرف على المجموعة Ω_X القابلة للعد ولها عدد أصغر، أي:

$$\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$$

مثل:

- المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب من كيس يحتوي على كرات بيضاء بنسبة p وكرات حمراء بنسبة q حيث أن: $p + q = 1$، بغرض سحب كرية بيضاء (السحب مع الإعادة).

II قانون التوزيع الاحتمالي: إذا كان (X) متغير عشوائي متقطع، يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

كما أن احتمال ظهور أي قيمة من (xi) هو (pi)، وبالتالي فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) يكتب في الجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

حتى يكون قانون تويع احتمالي لابد من تحقق الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

يعكس الجدول السابق قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة لها $P(X=x_i)$، ويفضل دائما أن لا يبقى قانون التوزيع الاحتمالي على شكل جدول، وأن يصاغ على شكل دالة رياضية f(x)، من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases} P_1 & ,x=x_1 \\ P_2 & ,x=x_2 \\ P_3 & ,x=x_3 \\ \vdots & ,\vdots \quad \vdots \\ P_n & ,x=x_n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك}, \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} f(x_i)\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)=1 \end{cases}$$

مثال 28:

نقوم برمي زهرة نرد مرتين، ونعرف X متغير عشوائي يمثل حاصل الفرق بين القيمة التي تظهر في الرمية الأولى والرمية الثانية.

المطلوب:

- أوجد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).

الحل:

سيتم الاعتماد على الجدول الآتي لتحديد الحالات الممكنة:

نتائج الرمية الألى / نتائج الرمية الثانية	01	02	03	04	05	06
01	0	1	2	3	4	5
02	−1	0	1	2	3	4
03	−2	−1	0	1	2	3
04	−3	−2	−1	0	1	2
05	−4	−3	−2	−1	0	1
06	−5	−4	−3	−2	−1	0

من خلال الجدول، فإن القيم (x_i) الممكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي 36 قيمة (منها قيم متساوية)، وعليه فإن:

$$x_i = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

يمكن وضع قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي المتقطع في الجدول التالي:

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	المجموع
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد، وكل قيمة متعلقة بالاحتمال محصورة بين الصفر والواحد، أي أن الشرطين محققين:

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ويفضل أن يصاغ قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير (X)، على شكل دالة كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , x = -5, x = 5 \\ \frac{2}{36} & , x = -4, x = 4 \\ \frac{3}{36} & , x = -3\, , x = 3 \\ \frac{4}{36} & , x = -2\, , x = 2 \\ \frac{5}{36} & , x = -1\, , x = 1 \\ \frac{6}{36} & , x = 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

حيث:

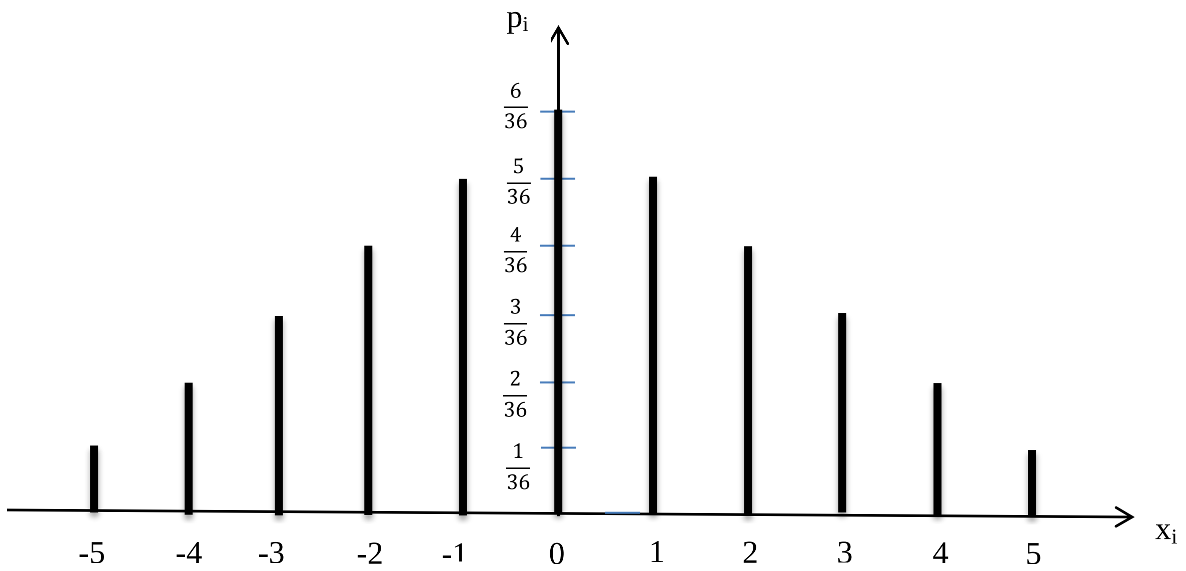
$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \end{cases}$$

III التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع: إن التمثيل البياني للمتغير العشوائي المتقطع هو عبارة مجموعة من الأعمدة عددها بعدد قيم المتغير وارتفاعاتها تتم وفق (بدلالة) الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير.

مثال 29:

بالعودة للمثال رقم (28)، المتعلق برمي زهرة نرد مرتين والمتغير عشوائي (X) الذي يمثل حاصل الفرق بين القيمة التي تظهر في الرمية الأولى والرمية الثانية.

يكون التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير وفق الشكل الآتي:



IV تابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع F(x): يسمى أيضا تابع الاحتمالات، تابع التوزيع التراكمي، تابع التوزيع التجميعي ويرمز له عادة بـ F(x).

إن تابع التوزيع هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (X) أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة (x_i)، ويعبر عن ذلك بصورة مختصرة كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} P_i$$

بطبيعة الحال يمكن النظر إلى المتمم من خلال الاهتمام بأن يأخذ المتغير العشوائي (X) قيمة أكبر من القيمة (x_i) هو:

$$P(X > x_i) = 1 - F(x_i)$$

كما بإمكاننا الاهتمام بأخذ المتغير العشوائي (X) لقيمة أكبر أو تساوي (x_i) هو:

$$P(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$$

مثال 30:

في تجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض، فضاء إمكانيات التجربة منته، كالآتي:

Ω ={(PPP), (PFP), (PPF), (FPP), (FFP), (FPF), (PFF), (FFF) }.

حيث: P= تمثل ظهور القيمة.

F= تمثل ظهور الشعار (الصورة).

إذا كان (X) يمثل متغيرا عشوائيا لعدد الصور الظاهرة فإنه يأخذ القيم التالية: $x_i = \{ , 1, 2, 3\}$، وكل قيمة ترتبط باحتمال معين وفق ما يظهره الجدول الآتي:

المجموع	3	2	1	0	x_i
1	0,125	0,375	0,375	0,125	p_i

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد، وكل قيمة متعلقة بالاحتمال محصورة بين الصفر والواحد، أي أن الشرطين محققين:

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

المطلوب:

- أوجد تابع التوزيع F(x).

<u>الحل:</u>

يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي (X) من خلال الجدول التالي:

المجموع	3	2	1	0	x_i
1	0,125	0,375	0,375	0,125	p_i
/	1	0,875	0,5	0,125	F(x)

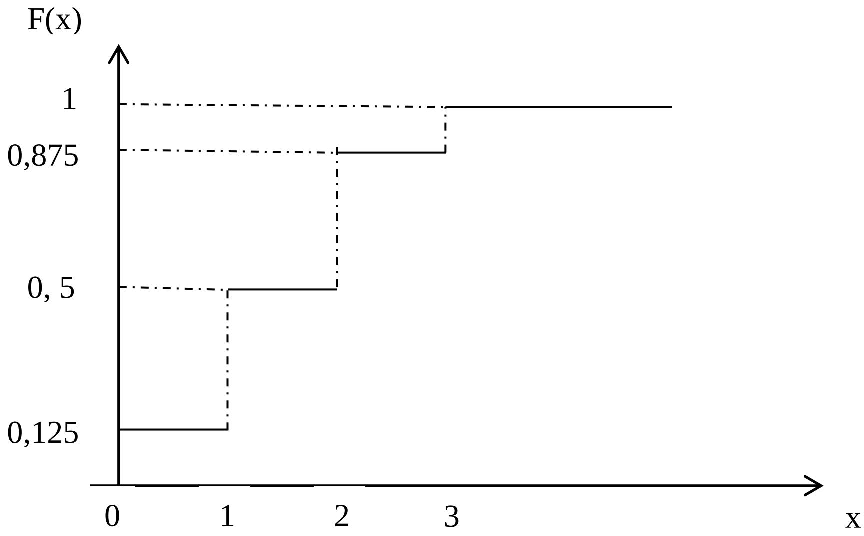
قيم المتغير F(x) لا يتم تحديدها إلا عندما تكون القيم x_i مرتبة ترتيبا تصاعديا، بحيث يكون:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P_0 = 0,125$$
$$F(1) = P(X \leq 1) = P_0 + P_1 = 0,125 + 0,375 = 0,5$$
$$F(2) = P(X \leq 2) = P_0 + P_1 + P_2 = 0,125 + 0,375 + 0,375 = 0,875$$
$$F(3) = P(X \leq 3) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

ويمكن التعبير عنه أيضا كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}125 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}875 & 2 \leq x < 3 \\ 01 & x \geq 3 \end{cases}$$

V التمثيل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع: على العموم يأخذ الشكل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع صورة السلم الذي يكون ارتفاع درجاته مرتبطا بالاحتمالات المقابلة للقيم التي يأخذها المتغير، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي والمتعلق بالمثال السابق رقم (3).



VI المميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع: رأينا سابقا كيف يتم إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع مع كيفية تمثيلهما بيانيا، لكن هذا لا يكفي لدراسة المتغير العشوائي المتقطع، بل لابد من دراسة خصائصه الاحصائية، ونخص بالذكر المتوسط الذي يعرف بالتوقع الرياضي، وكذا التباين والانحراف المعياري.

1. التوقع الرياضي E(X): تتمركز معظم قيم المتغيرات العشوائية حول قيمة معينة أو قيمة متوقعة (هي القيمة المتوسطة أو المتوقعة) لمتغير عشوائي (X) ويرمز لها بالرمز E(x)، فإذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا يأخذ القيم التالية: $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باحتمالات تقابلها $P_i = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ فإن القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي له يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = P_1.\mathrm{x}_1 + P_2.\mathrm{x}_2 + \cdots + P_n.\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} P_i.\mathrm{x}_i$$

من أهم خصائص التوقع الرياضي نذكر الآتي:

- **الخاصية الأولى:** إذا كان: X=c، حيث c ثابت فإن P(X=c)=1، فهو يمثل احتمال حدوث حادث أكيد، ومنه فإن:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i = 1.c = c$$

- **الخاصية الثانية:** إذا كان c عددا ثابتا فإن:

$$E(c.X) = \sum_{i=1}^{n} c.P_{ni}.\mathrm{x}_i = c.\sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i = c.E(X)$$

- **الخاصية الثالثة:** من الخاصيتين الأوليتين، فإذا كان: a وb مقدرين ثابتين، يمكننا أن نستخلص الخاصية الثالثة الآتية:

$$E(aX + b) = a.E(X) + b$$

- **الخاصية الرابعة:** توقع التوقع الراضي يساوي التوقع الرياضي نفسه:

$$E[E(X)] = E(X)$$

- **الخاصية الخامسة:** إذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ قيمه فقط في المجال [a,b]، أي أن:

$$a \le x_i \le b$$

وعليه يكون التوقع الرياضي للمتغير X أيضا محصورا ضمن المجال [a,b]، أي أن:

$$a \le E(X) \le b$$

- **الخاصية السادسة:** إذا كان X و y متغيرين عشوائيين فإن توقع المجموع يساوي إلى مجموع التوقعات، أي أن:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

وتنطبق نفس الخاصية أيضا بالنسبة لتوقع الفرق، أي أن:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

- **الخاصية السابعة:** إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين **مستقلين** فإن توقع الجداء يساوي إلى جداء التوقعات، أي أن:

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

- **الخاصية الثامنة:** إذا كان:

$$x_i \geq 0$$

فإن:

$$E(X) \geq 0$$

إن الخصائص السالفة الذكر تكتسي أهمية بالغة في الحسابات العددية، وهي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**.

مثال 31:

نستعين بالمثال المتعلق بتجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض السابق. أين كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) وفق ما يظهره الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125	1

المطلوب:

- حساب التوقع الرياضي E(x).

<u>الحل:</u>

$$E(X) = P_1.\mathrm{x}_1 + P_2.\mathrm{x}_2 + \cdots + P_n.\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i$$

$$E(X) = (0{,}125 \times 0) + (0{,}375 \times 1) + (0{,}375 \times 2) + (0{,}125 \times 3) = 1{,}5$$

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن الاستعانة بجدول التوزيع الاحتمالي كما يلي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125	1
$x_i.\ p_i$	0	0,375	0,75	0,375	E(X)=1,5

2. التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع: قد يتساوى التوقع الرياضي لتوزيعين احتماليين رغم اختلافهما، وهذا الاختلاف قد يكون مرجعه تشتت القيم عن القيمة المركزية، لذا يجب دراسة مقاييس تقيس هذا التشتت، وأنسبها من حيث الاعتماد والمدلول هو الانحراف المعياري من خلال دراسة التباين.

- **التباين V(X)**: تباين المتغير العشوائي (X) يرمز له بالرمز V(X) ويعطى بالعلاقة:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i\left[x_i - [E(X)]\right]^2$$

يمكن جعل العلاقة السابقة أكثر سهولة في الحساب، فبعد النشر نحصل على الصيغة المختصرة الآتية:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \,.\, P_i \; - [E(X)]^2$$

أو

$$V(X) = E(X^2) \; - [E(X)]^2$$

للتباين عدة خواص نذكر منها:

- **الخاصية الأولى**: تباين المقدار الثابت (وليكن c) يساوي للصفر، أي أن:

$$V(c) = 0$$

- **الخاصية الثانية**: فإذا كان: a وb مقدرين ثابتين، فإن:

$$V(aX \mp b) = a^2 . V(X)$$

- **الخاصية الثالثة**: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين **مستقلين** فإن:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

إن الخصائص السالفة الذكر تكتسي أهمية بالغة في الحسابات العددية، وهي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**.

- **الانحراف المعياري (X) δ**: الانحراف المعياري يشتق من التباين عن طريق أخذ الجذر التربيعي له، ويعرف رياضيا بالعلاقة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال 32:

نستعين أيضا بالمثال المتعلق بتجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض السابق. أين كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) والتوقع الرياضي E(X) وفق ما يظهره الجدول الآتي:

المجموع	3	2	1	0	x_i
1	0,125	0,375	0,375	0,125	p_i
E(X)=1,5	0,375	0,75	0,375	0	$x_i.\, p_i$

المطلوب:

- أحسب التباين V(X) والانحراف المعياري (X) δ.

الحل:

- **حساب التباين:**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحتاج إلى حساب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = P_1.x_1^2 + P_2.x_2^2 + \cdots + P_n.x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.x_i^2$$

$$E(X^2) = (0{,}125 \times 0^2) + (0{,}375 \times 1^2) + (0{,}375 \times 2^2) + (0{,}125 \times 3^2) = 3$$

بالتطبيق العددي على صيغة حساب التباين نجد:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

- **حساب الانحراف المعياري:**

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}86$$

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن الاستعانة بالجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
x_i^2	0	1	4	9	
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125	1
$x_i.\ p_i$	0	0,375	0,75	0,375	E(X)=1,5
$x_i^2.\ p_i$	0	0,375	1,5	1,125	$E(X^2)$ =3

مثال 33:

نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي (X) عدد مرات الحصول على صورة، ولتكن المتغيرة Y = 2X.

نلقي حجر نرد ونسمي (Z) النتيجة المحصل عليها، ولتكن المتغيرة (W) حيث:

W = Z – Y

المطلوب:

- أحسب V(X) .

- أحسب V(Y).
- أحسب V(W).

الحل:

- **حساب التباين V(X):**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

بالتطبيق العددي على صيغة حساب التباين نجد:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1,5 - 1^2 = 0,5$$

العمليات الحسابية المستخدمة في حساب V(X) مفصلة في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	المجموع
p_i	1/4	1/2	1/4	1
$x_i . p_i$	0	1/2	1/2	$E(X) = 1$
x_i^2	0	1	4	المجموع
$x_i^2 . p_i$	0	1/2	1	$E(X^2) = 3/2 = 1,5$

- **حساب التباين V(Y):**

من خلال الخاصية الثانية للتباين:

$$V(aX \mp b) = a^2 . V(X)$$

فإن:

$$V(Y) = V(2X) = 2^2 V(X) = 4 (0,5) = 2$$

- **حساب التباين V(W):**

من خلال الخاصية الثانية:

$$V(aX \mp b) = a^2 . V(X)$$

والخاصية الثالثة للتباين:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

وبما أن المتغيرين العشوائيين X وZ مستقلين: فإن:

$$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) + V(2X) = V(Z) + 2^2 V(X).$$

نحتاج إلى حساب V(Z) :

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z) = P_1.z_1 + P_2.z_2 + \cdots + P_n.z_n$$
$$= \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 6 = \frac{21}{6}$$

$$E(Z^2) = P_1.{z_1}^2 + P_2.{z_2}^2 + \cdots + P_n.{z_n}^2$$
$$= \frac{1}{6}\times 1^2 + \frac{1}{6}\times 2^2 + \frac{1}{6}\times 3^2 + \frac{1}{6}\times 4^2 + \frac{1}{6}\times 5^2 + \frac{1}{6}\times 6^2$$

$$E(Z^2) = \frac{91}{6}$$

بالتعويض العددي نجد أن:

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{21}{6} = \frac{70}{6} = 11,67$$

بالتطبيق العددي اعتمادا على النتائج السابقة يمكن حساب V(W) وفق الآتي:

$$V(W) = (11,67) + 2^2\,(0,5) = 13,67$$

العمليات الحسابية المستخدمة في حساب V(Z) مفصلة في الجدول الآتي:

z_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$z_i.\,p_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	E(X) =21/6
${z_i}^2$	1	4	9	16	25	36	المجموع
${z_i}^2.\,p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$E(X^2)$ = 91/6

ثالثا – المتغير العشوائي المستمر ومميزاته العددية

كثير من التجارب العشوائية لا يمكن التعبير عن نتائجها بمجموعات قابلة للعد كما هو الحال في وزن الأشخاص أو أطوالهم، درجة الحرارة في خلال فترة ما في مدينة معينة، ففي هذه الحالة فإن قيم المتغير العشوائي تأخذ جميع القيم في مجال ما.

- **تعريف:** إذا احتوى فراغ إمكانيات تجربة ما على عدد غير معدود وغير محدود من القيم قلنا عنه أنه فراغ إمكانات مستمر ونسمي المتغير المعرف على هذا الفراغ بالمتغير العشوائي المستمر.

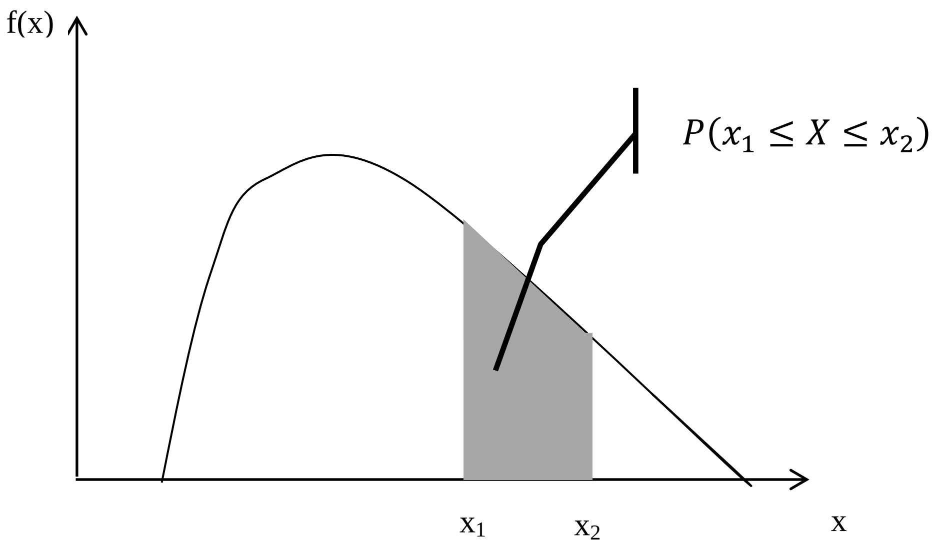
II التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر "تابع الكثافة الاحتمالية": بما أن (X) يأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر $P(X=x_i)$ $\to 0$. لذلك فإنه لكل متغير عشوائي مستمر تابع يسمى تابع الكثافة الاحتمالية يستعمل لحساب احتمال مجال معين. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال، أي أن تابع الكثافة الاحتمالية إذا تكاملت من a إلى b $(a\leq b)$ فإنها تعطي احتمالا أن المتغير العشوائي سيأخذ أي قيمة في المجال من a إلى b ودونه لن يكون معروفا، أي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

ويمكن حساب القيمة الاحتمالية لأي مجال $[x_1,x_2]$ ينتمي إلى مجال تعريف التابع f(x)، وفق المعادلة الرياضية التالية:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

أي أن القيمة الاحتمالية $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ تعكس المساحة المحصورة بين تحت المنحنى f(x) بين الخطين $(X=x_1)$ و $(X=x_2)$ ، وكما يبينه الشكل الآتي:



تعبر المساحة المضللة عن القيمة الاحتمالية في المجال $[x_1,x_2]$، والمساحة تحت كامل المنحنى تساوي الواحد.

من خلال ما سبق فإن تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر يحقق الخاصيتين أو الشرطين الآتيين:

- **الشرط الأول:** يعكس هذا الشرط إيجابية الاحتمال المقابل لأي جزء مما كان صغيرا في مجال تعريف التابع f(x)، أي أن:

$$f(x) \geq 0$$

- **الشرط الثاني:** يعكس هذا الشرط كون التكامل من أول المدى إلى آخره يساوي الواحد الصحيح، وهذا ما تمثله المساحة تحت منحنى تابع التوزيع، وبتعبير رياضي فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ملاحظة: إن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر X القيمة المحددة ($x_i=a$) يساوي للصفر.

$$P(X=a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ينتج عن هذه الملاحظة أن الإشارتين > و≥ متكافئتين في التوزيعات المستمرة.

مثال 34:

إذا كانت المدة الزمنية التي يستغرقها الطالب في إتمام الامتحان (المدة القانونية ساعة واحدة) عبارة عن متغير عشوائي مستمر (X)، تابع كثافته الاحتمالية معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب:

- تحقق أن f(x) تابع كثافة احتمالية.
- إذا اخترنا طالبا عشوائيا، ما احتمال أن يكمل حل الامتحان في أقل من نصف ساعة؟

<u>الحل:</u>

- **التحقق من أن f(x) تابع كثافة احتمالية:**

الشرط الأول محقق؛ هو أن تكون دالة تابع التوزيع f(x) موجبة في مجال تعريفه، وهو [0,1]، أي أن:

$$f(x) \geq 0; \quad si\ 0 \leq x \leq 1$$

التحقق من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وبما أن الشرط الثاني أيضا محقق فإن f(x) تابع كثافة احتمالية.

- **حساب احتمال أن يكمل الطالب حل التمرين في أقل من نصف ساعة:**

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx$$
$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{3}{48} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

أي أن احتمال أن تكون المدة الزمنية التي يستغرقها طالب تم اختياره عشوائيا في إكمال الامتحان أقل من نصف ساعة هي: $0{,}1875$ أو بالتعبير عنه كنسبة مئوية هو: $18{,}75\%$.

III التمثيل البياني لتابع الكثافة للمتغير العشوائي المستمر: يتم تمثيل تابع الكثافة الاحتمالية بمنحنى سلس إن لم يكن خطيا، أما إذا كان التابع خطيا فيتم تمثيله بمستقيم، بحيث يكون مجموع المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى يساوي الواحد.

مثال 35:

لنعتمد على معطيات المثال السابق رقم (34)، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

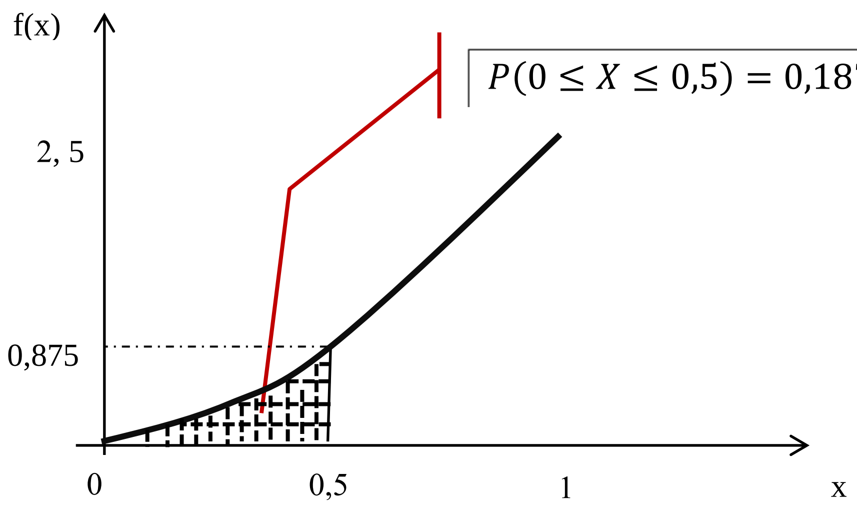
المطلوب:

- تمثيل تابع الكثافة بيانيا.

- تحديد احتمال أن يكمل الطالب حل التمرين في أقل من نصف ساعة على التمثيل البياني (تضليل المساحة المقابلة).

الحل:

- **التمثيل البياني لتابع الكثافة الاحتمالية:**



- المساحة المضللة تمثل احتمال أن تكون المدة الزمنية التي يستغرقها طالب تم اختياره عشوائيا في إكمال الامتحان أقل من نصف ساعة، وهي: 0,1875 %.

مثال 36:

نفرض أن (X) متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & x \in [0,4] \\ 0 & x \notin [0,4] \end{cases}$$

المطلوب:

- أثبت أن f(x) دالة كثافة احتمالية.
- حساب الاحتمال $P(1 \leq X \leq 2)$ وتظليل المساحة المقابلة له في التمثيل البياني لتابع الكثافة الاحتمالية.

الحل:

- **التحقق من أن f(x) تابع كثافة احتمالية:**

الشرط الأول محقق؛ هو أن تكون دالة تابع التوزيع f(x) موجبة في مجال تعريفه، وهو [0,4]، أي أن:

$$f(x) \geq 0; \qquad si\ 0 \leq x \leq 4$$

التحقق من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

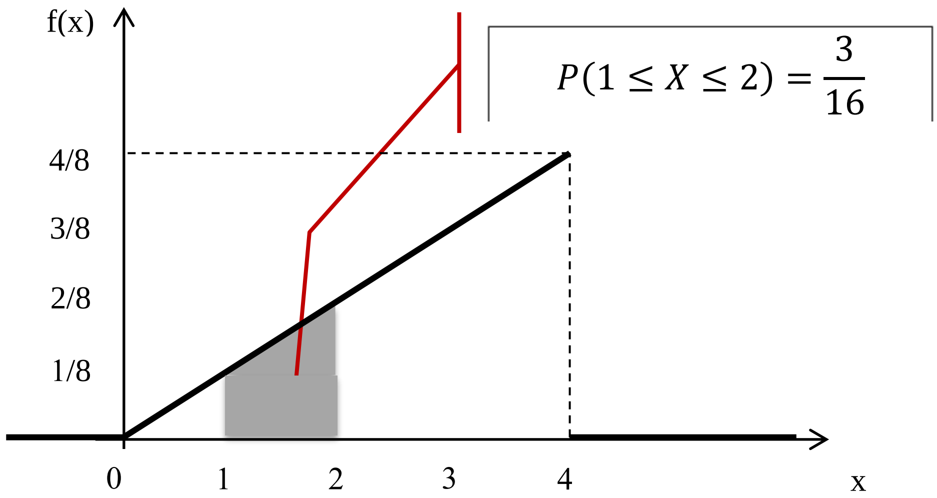
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{8}dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{8}\left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{16}{16} = 1$$

وبما أن الشرط الثاني أيضا محقق فإن f(x) تابع كثافة احتمالية.

- **حساب الاحتمال** $P(1 \leq X \leq 2)$:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{x}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{8}\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = \frac{3}{16}$$

- **التمثيل البياني لتابع الكثافة وتضليل مساحة الاحتمال المقابلة لـ $(1 \leq X \leq 2)$** :



IV تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر F(x): لا يتغير مفهوم تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر عن مفهوم تابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع ويرمز له أيضا بـ F(x).

لذا فتابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (X) أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة (x_i).

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا مستمرا معرفا على R أي ينتمي إلى المجال: $]-\infty , +\infty[$ فإن تابع التوزيع F(x) يعبر عنه بالصيغة الآتية:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ ; \ \ x \in R$$

ومنه فإن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

أي أن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \ = F(b) - F(a)$$

وهذه الأخيرة خاصية مهمة جدا، وهي تنص على أنه إذا كانت الثوابت a وb تحقق (a≤b) فإن احتمال أن تكون قيمة (X) محصورة بين a وb يساوي قيمة تابع التوزيع عند النقطة b مطروحا منها قيمة تابع التوزيع عند النقطة a.

بطبيعة الحال يمكن النظر إلى المتمم من خلال الاهتمام بأن يأخذ المتغير العشوائي (X) قيمة أكبر (x_i) هو:

$$P(X > x_i) = 1 - F(x_i)$$

كما بإمكاننا الاهتمام بأخذ المتغير العشوائي (X) لقيمة أكبر أو تساوي x_i هو:

$$P(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$$

مثال 37:

لنعتمد على معطيات المثال السابق رقم (34)، حيث أعطي تابع الكثافة الاحتمالية كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & \quad x \in [0,1] \\ 0 & \quad x \notin \ [0,1] \end{cases}$$

المطلوب:

- إيجاد تابع التوزيع F(X).
- أحسب $F(1/2)$، $F(0)$.
- استنتج قيمة الاحتمال: $P(0 \leq X \leq 3/4)$.

الحل:

- **إيجاد تابع التوزيع F(X):**

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_{-\infty}^{x} x\, dx = \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{x} x^2\, dx + \int_{-\infty}^{x} x\, dx$$

$$F(x) = \frac{3}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{3x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$$

حيث أن: $x \in [0,1]$، وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- **حساب F(1/2):**

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 0,1875$$

بما أن: $0,5 \in [0,1]$ نقوم بالتعويض قيمة x مباشرة بـ $0,5$ في الدالة: $\left(\frac{3x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)$.

- **حساب F(0):**

من خلال تابع التوزيع نستنتج مباشرة أن:

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0$$

- **استنتاج قيمة الاحتمال** $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$:

بما أن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

فإن:

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = 0,1875 - 0 = 0,1875$$

وهي نفس القيمة التي تحصلنا عليها من خلال المثال رقم (34).

1. خواص تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر: خواص تابع التوزيع واحدة بغض النظر عن نوع المتغير العشوائي مستمرا كان أو متقطعا (باستثناء المدلول)، ومن هنا يمكن الإشارة إلى:

- أن تابع التوزيع F(x) تابع متزايد؛
- تنحصر قيمة تابع التوزيع F (x) بين الصفر والواحد؛
- $F(+\infty)=1$؛
- $F(-\infty)=0$؛
- تابع الكثافة ما هو إلا تفاضل (مشتق) تابع التوزيع أي أن:

$$f(x) = F^{/}(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$$

2. التمثيل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر: يمكن توضيح كيفية التمثيل البياني لتابع التوزيع من خلال المثال التالي:

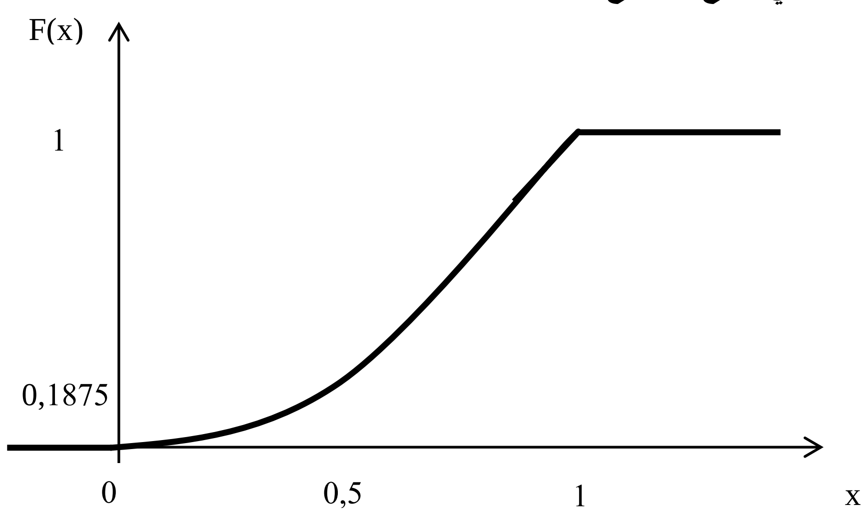
مثال 38:

رسم تابع التوزيع في المثال رقم (36) يعكسه الشكل أدناه:

- **تابع التوزيع في المثال رقم (36) هو:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- **التمثيل البياني لتابع التوزيع:**



V المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر: إن إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع للمتغير العشوائي لا يكفي لدراسة المتغير العشوائي المستمر، بل لابد أيضا من دراسة خصائصه الاحصائية، من توقع رياضي، وكذا من تباين وانحراف معياري.

1. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر E(X): إذا كان (X) متغيرا عشوائيا مستمرا له كثافة احتمالية f(x)، فإنه يمكن حساب توقعه الرياضي من خلال الصيغة التالية:

$$E(X) = \int_D x \cdot f(x)\ dx$$

حيث أن الدالة f(x) معرفة على المجال D.

ملاحظة 1: يجب الانتباه إلى أنه ليس من الضروري أن يوجد للمتغير العشوائي المستمر (X) توقع رياضي، فإذا كان التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\ dx$$

غير معرف (غير متقارب) فإنه ليس لـ (X) في هذه الأحوال توقع رياضي.

ملاحظة: خصائص التوقع الرياضي هي واحدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**. أنظر خصائص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع (ص-ص 50-51).

مثال 39:

إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية f(x) للمتغير العشوائي المستمر (X) معطى كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب:

- حساب التوقع الرياضي E(x) للمتغير العشوائي (X).

<u>الحل:</u>

لدينا:

$$E(X) = \int_D x \cdot f(x)\ dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \; dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{6} - 0$$
$$= \frac{4}{3}$$
$$E(X) = 1{,}33$$

2- التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المستمر: يعتبر التباين والانحراف المعياري أنسب المقاييس المستخدمة في قياس تشتت القيم عن القيمة المركزية للمتغير العشوائي المنفصل.

- **التباين V(X)**: تباين المتغير العشوائي المستمر X يرمز له بالرمز V(X) ويعطى بالعلاقة:

$$V(X) = \int_D \left[x - [E(X)]\right]^2 . f(x) \; dx$$

بفرض أن: D=[a,b] فإن التعريف السابق يكتب كما يلي:

$$V(X) = \int_a^b \left[x - [E(X)]\right]^2 . f(x) \; dx$$

يمكن جعل العلاقة السابقة أكثر سهولة في الحساب، فبعد النشر نحصل على الصيغة المختصرة الآتية:

$$V(X) = \int_a^b x^2 . f(x) \; dx \; - [E(X)]^2$$

أو

$$V(X) = E(X^2) \; - [E(X)]^2$$

ملاحظة: خصائص التباين هي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**.

أنظر خصائص التباين للمتغير العشوائي المتقطع (ص 52).

- **الانحراف المعياري (X) δ**: كما سبق وأشرنا فإن الانحراف المعياري يشتق من التباين عن طريق أخذ الجذر التربيعي له، ويعرف رياضيا بالعلاقة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال 40:

نفرض أن (X) متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(x) = \begin{cases} cx^4 & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب:

- أحسب قيمة الثابت c.
- أحسب الاحتمال p(X<1,5).
- إيجاد تابع التوزيع F(X).
- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u>

- **حساب قيمة الثابتC:**

بما أن التابع المعطي تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 cx^4\, dx = 1$$

$$= c\int_0^2 x^4\, dx = 1$$

$$= C\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = C\frac{32}{5} = 1$$

ومنه فإن:

$$C = \frac{5}{32}$$

- **حساب الاحتمال p(X<1,5):**

$$P(X < 1,5) = \int_0^{1,5} \frac{5}{32}x^4\, dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1,5} = 0,2373$$

- **إيجاد تابع التوزيع F(X):**

$$\boldsymbol{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{5}{32}x^4\, dx = \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

حيث أن $1 \leq x \leq 2$، وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

- **حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:**

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_D x \, . f(x) \; dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x \, . \frac{5}{32} x^4 \; dx = \int_0^2 \frac{5}{32} x^5 \; dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3} - 0 = \frac{5}{3}$$

$$E(X) = 1{,}66$$

التباين:

$$V(X) = \int_a^b x^2 \, . f(x) \; dx \; - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2 \, . \frac{5}{32} x^4 \; dx \; - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \int_0^2 \frac{5}{32} x^6 \; dx \; - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2{,}85 - 2{,}77 = 0{,}07$$

$$V(X) = 0{,}07$$

الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}07} = 0{,}2645$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

قطعة نقود متحيزة بحيث أن فرصة ظهور الصورة ثلاثة أضعاف فرصة ظهور الكتابة. ألقيت هذه القطعة ثلاث مرات.

المطلوب:

1. أوجد قانون التوزيع الاحتمالي لعدد الصور التي تظهر على السطح العلوي ومثله بيانيا؟
2. أوجد تابع التوزيع التراكمي ومثله بيانيا.

التمرين الثاني:

ليكن المتغير العشوائي (X) الممثل بالقانون الاحتمالي التالي:

X_i	-5	-4	1	5
P_i	0,25	0,125	0,5	0,125

المطلوب:

1. حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.
2. إيجاد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي (Y) بحيث أن: $Y=X^2$.

التمرين الثالث:

ليكن المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد الرجال ضمن وفد معين مشكل من 4 أشخاص، يتبع القانون الاحتمالي المبين في الجدول التالي:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	a	3a	3a	2a	a

المطلوب:

1. ما نوع المتغير العشوائي (X)؟
2. أوجد قيمة a حتى يكون (X) يتبع قانون التوزيع الاحتمالي ومثل بيانيا التوزيع الاحتمالي.
3. أوجد تابع التوزيع التراكمي ومثله بيانيا.
4. أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.
5. أحسب احتمال أن يكون عدد الرجال في الوفد: أقل من 3، أكبر من 5، أكبر من 1 وأقل من 5.

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على كرتين بيضاء، 4 كرات سوداء وثلاث كرات زرقاء. تم سحب 3 كرات بطريقة عشوائية وبدون إرجاع. يمثل المتغير العشوائي (X) عدد الكرات البيضاء التي تم سحبها.

المطلوب:

1. إيجاد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
2. إيجاد تابع التوزيع لهذا المتغير.
3. إيجاد التوقع الرياضي.

التمرين الخامس:

ليكن (X) متغيرا عشوائيا متقطعا، قانون التوزيع الاحتمالي له معطى بالشكل التالي:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{x}{15} & x = 1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد تابع التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي (X) ومثله بيانيا.
2. أوجد الاحتمالات التالية: $P(1 \leq X < \frac{3}{2})$، $P(X \leq 2)$، $P(X > 3)$.

التمرين السادس:

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا مستمرا معرفا كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} C(4X - X^2) & x \in [0,4] \\ 0 & x \notin [0,4] \end{cases}$$

المطلوب:

1. إيجاد قيمة الثابت C حتى يكون التابع المعطى تابع كثافة احتمالية، ومثله بيانيا.
2. حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي ومثله بيانيا.
3. أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

التمرين السابع:

يعترض دخول السيارات إلى منطقة صناعية 3 حواجز أمنية، واحتمال إيجاد حاجز ما مفتوح يساوي 0,7 (مع العلم أن هذه الحواجز تشتغل مستقلة عن بعضها البعض).

يمثل المتغير العشوائي (X) عدد الحواجز التي يمكن لسيارة ما عبورها قبل أن تواجه حاجزا مغلقا.

المطلوب:

1. إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
2. إيجاد تابع التوزيع الاحتمالي وتمثيله بيانيا.
3. حساب كل من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثامن:

ليكن لدينا تابع التوزيع للمتغير العشوائي (X) بحيث أن:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - \dfrac{9}{x^3} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$$

المطلوب:

- إيجاد تابع الكثافة للمتغير العشوائي (X).

التمرين التاسع:

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا متصلا تابع كثافته الاحتمالية هي:

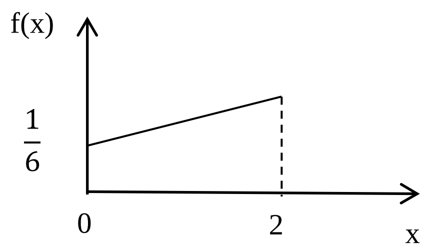
$$f(X) = \begin{cases} a\,X & 0 \leq x < 1 \\ a & 1 \leq x < 2 \\ -a\,X + 3a & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد قيمة الثابت a.
2. أوجد تابع التوزيع التراكمي ومثله بيانيا.

التمرين العاشر:

ليكن (X) متغيرا عشوائيا مجال تعريف تابع كثافته الاحتمالية مبين في الشكل التالي:



المطلوب:

1. أوجد تابع الكثافة الاحتمالية ومجال تعريفه.
2. أوجد تابع التوزيع ومثله بيانيا.
3. أحسب التوقع الرياضي والتباين.

التمرين الحادي عشر:

بفرض أن (X) متغير عشوائي تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 2(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد: $E(X)$، $E(X2)$، $E(\frac{1}{X})$، $E(2^{\frac{X}{2}})$، $V(X)$، $F(X)$.

التمرين الثاني عشر:

ليكن المتغير العشوائي (X) المعرف بتابع التوزيع F(X) كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ \frac{2}{15} & -5 \leq x < -3 \\ \frac{7}{15} & -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{13}{15} & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

المطلوب:

1. أوجد تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X).
2. أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.
3. أحسب الاحتمالات التالية: $P(-3 < X \leq 2)$، $P(X < 0)$، $P(X \geq -3)$.

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية

أولا: التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

- التوزيع المنتظم
- التوزيع الاحتمالي لبرنولي
- توزيع ثنائي الحدين
- التوزيع الاحتمالي لبواسون
- التوزيع الهندسي
- التوزيع فوق الهندسي

ثانيا: التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

- التوزيع المنتظم
- التوزيع الأسي
- التوزيع الطبيعي
- توزيع كاي مربع
- توزيع ستيودنت
- توزيع فيشر

ثالثا: التقريب بين التوزيعات الاحتمالية

- تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون
- تقريب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي
- تقريب التوزيع فوق الهندسي بالتوزيع الثنائي
- تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي
- تقريب توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية

تمهيد:

بعد تطرقنا في الفصل السابق إلى المتغير العشوائي المنفصل والمستمر ومميزاتهما العددية، سينصب اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة عدد من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام في التطبيقات الإحصائية المتعددة الأغراض، وعلى معرفة كيفية استعمال قوانين التوزيع الاحتمالية لعدد من الظواهر التي تتميز بسلوك مماثلة، ولو أنها مختلفة بمميزاتها العددية (التوقع الرياضي، الانحراف المعياري،...) للوصول إلى نتائج بطرقة أسرع على أساس الخصائص التي تتميز بها هذه القوانين.

بما أن هذه التوزيعات تتبع نوع المتغير فهناك نوعان من التوزيعات الخاصة؛ توزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا متقطعا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المتقطعة وتوزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا مستمرا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المستمرة.

أولا– قوانين التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

من بين أبرز التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الآتي:

I التوزيع المنتظم (المتقطع): Distribution Uniform

هو من أبسط التوزيعات المتقطعة، ويستخدم التوزيع المنتظم لمتغير عشوائي متقطع (x) عندما تكون الاحتمالات المقابلة لهذا المتغير متساوية، مثل تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، فإذا كان (x) يأخذ عددا محددا من القيم المنفصلة $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ في هذه الحالة يكون لها نفس الاحتمال $(\frac{1}{n})$ ويتوزع وفق التوزيع المنتظم.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا منتظما متقطعا، يكون تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

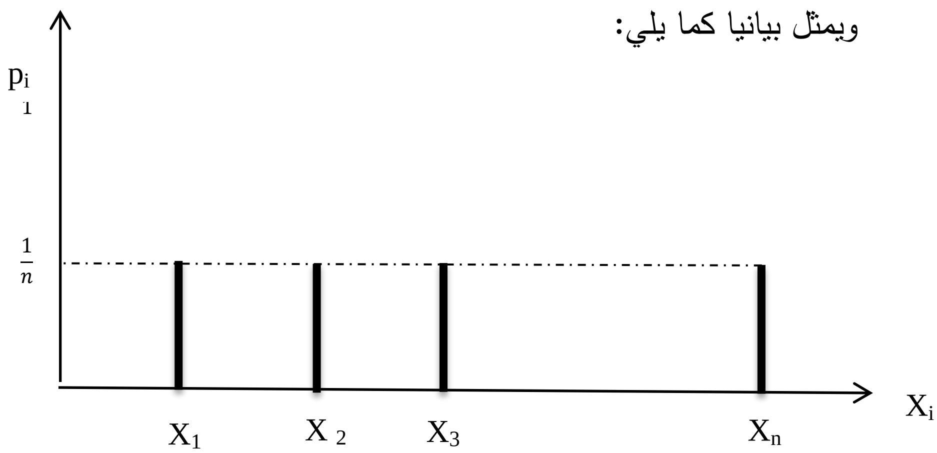
$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x = 1,2,3, \ldots \ldots n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

حيث: n يمثل عدد صحيح موجب.

ويتوفر في هذا القانون الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \end{cases}$$

ويمثل بيانيا كما يلي:



2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع المنتظم يعرف كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} P_i$$

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{n} & 0 \leq x \leq n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

3. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي**: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع التوزيع المنتظم المتقطع كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i.\mathrm{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\mathrm{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$

ب. **التباين**: تعطى الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع المنتظم المتقطع كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

و:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} P_i.\mathrm{x}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\mathrm{x}_i{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i{}^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \frac{(\mathrm{n}+1)(2n+1)}{6}$$

حيث: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i{}^2$ مجموع مربعات أعداد طبيعية وقيمة هذا المجموع هي:

$$\left(\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2n+1)}{6}\right)$$

إذن:

$$V(X) = \frac{(\mathrm{n}+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

مثال 41: في تجربة إلقاء قطعة النرد المنتظمة مرة واحدة: إذا فرضنا أن (x) يمثل العدد الظاهر على السطح العلوي لقطعة النرد، حيث فضاء العينة: Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6}، عندئذ يكون لـ (X) توزيعا متقطعا منتظما ويكون:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2{,}916$$

II التوزيع الاحتمالي لبرنولي: Distribution de Bernoulli $\boldsymbol{x \to B(1,p)}$

يسمى هذا التوزيع باسم مكتشفه جيمس برنولي في نهاية القرن 17 للميلاد، ويعد توزيعه الأساس لبناء التوزيع الثنائي، وتعرف تجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها أما نجاح وتحدث باحتمال (P) أو الفشل وتحدث باحتمال (q=1−p). أي أن توزيع برنولي يستعمل في التجارب التي تحتمل نتيجتين ممكنتين فقط وهما متنافيتان، مثل نتائج إلقاء قطعة نقد فأن النتيجة قد تكون وجه (F) أو رقم (P)، أو تجربة اختيار مريض من بين الأشخاص الذين كانت عملياتهم ناجحة أو فاشلة.

ويكون المتغير العشوائي (x) يمثل نجاح التجربة أو فشلها، بحيث يأخذ (x=0) إذا فشلت هذه التجربة و(x=1) إذا نجحت. ويمكن وصف هذا التوزيع على الشكل الآتي:

x_i	0	1
p_i	q	p

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا متقطعا يتبع توزيع برنولي، يكون تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

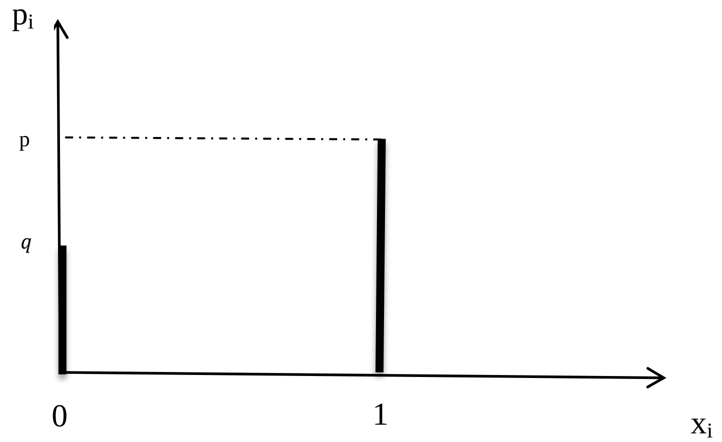
$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} p^X q^{1-X} & , x = 0,1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

حيث: p+q=1.

ويتوفر في هذا القانون الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{1} P_i = \sum_{i=0}^{1} p^X q^{1-X} = p + q = 1 \end{cases}$$

ويمثل بيانيا كما يلي:



2. تابع التوزيع: تابع التوزيع لمتغير عشوائي (x) يتبع توزيع برنولي يعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3. المميزات العددية:

أ. التوقع الرياضي: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع توزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i.\mathrm{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i.p^X q^{1-X} = \sum_{i=1}^{n} 0\, p^0 q^{1-0} + 1.p^1 q^{1-1} = P$$

ب. التباين: تعطى الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع توزيع برنولي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X) = p$$

و:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i.\mathrm{x}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i{}^2.p^X q^{1-X} = \sum_{i=1}^{n} 0^2\, p^0 q^{1-0} + 1^2\, p^1 q^{1-1} = P$$

إذن:

$$V(X) = \mathrm{p} - \mathrm{p}^2 = pq$$

مثال 42: أوجد قانون الاحتمالي للتجربة التالية مع تحديد ماذا يمثل (x)، ثم أحسب كل من التوقع الرياضي والتباين، حيث التجربة تقول: احتمال أن يتخرج طالب من جامعة أم البواقي هو 0,6.

الحل: بما أن للطالب حالتين هما إما النجاح أو الفشل، فالمتغير العشوائي (x) يمكن أن يأخذ قيمتين (x=1) وهي تمثل نجاح الطالب (تخرجه) وإما (x=0) وهي فشل الطالب (رسوبه)، ومن هذه المعطيات يمكن تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي وهو الموافق لهذه التجربة كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} (0,6)^X (0,4)^{1-X} & , x = 0,1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

ويمكن حساب التوقع الرياضي والتباين انطلاقا من العلاقات السابقة، حيث:

$$E(X) = p = 0,6$$
$$V(X) = pq = (0,6)(0,4) = 0,24$$

ملاحظة: قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي يعبر على دراسة إحصائية تتم على عينة مشكلة من وحدة واحدة أي: (n=1)، وعليه فإن هذا القانون غير صالح تطبيقيا لأن العينة المشكلة من وحدة واحدة لا تمثل المجتمع فتكون الاستنتاجات خاطئة، ولكن أهمية قانون برنولي هي أهمية نظرية إذ يعتبر هو أساس كل القوانين الاحتمالية الأخرى.

III توزيع ثنائي الحدين: Distribution Binomiale $x \rightarrow B(n,p)$

يمكن تعريف التوزيع الثنائي بأنه عبارة عن جمع لعدد (n) من متغيرات برنولي المستقلة لها نفس فرص التحقيق (p متساوية). وهو بذلك يستعمل أساسا في التجربة العشوائية التي لها الخواص التالية:

- تتضمن التجربة (n) من المحاولات؛
- كل محاولة لها نتيجتان متنافيتان هما الفشل أو النجاح؛
- احتمال النجاح (p) ثابت من محاولة لأخرى، وعليه فإن احتمال الفشل هو (q=1−p)؛
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتائج المحاولات الأخرى.

ومن الأمثلة عن هذه التجارب:

- إلقاء قطعة نقد مرات عديدة (n) مرة والمتغير العشوائي يمثل عدد الأوجه أو الصور (F) أو عدد الأرقام (P) الممكن الحصول عليها؛
- اختيار عدد (n) من عناصر (مع الإرجاع) في صندوق به (m_1) عنصر تالف و(m_2) عنصر سليم مع (x) يمثل عدد العناصر السليمة المستخرجة؛
- اختبار الجودة (موافق أو غير موافق للمواصفات)؛
- نتيجة الامتحان نجاح أو رسوب.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: عمليا توزيع ثنائي الحدين يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة، ...) بشرط أن يتم سحب العينة مع الإرجاع.

إن احتمال عدد ما (x) من النجاحات من بين n تجربة برنولية مستقلة يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} & , x \in n, n \neq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك}, \end{cases}$$

حيث: q=1−p.

ويتوفر في هذا التوزيع الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

حيث:

- الشرط الأول محقق لأن:

$$C_n^X \geq 0 \quad et \quad p^X \geq 0 \rightarrow C_n^X \, p^X \, q^{n-X} \geq 0$$

- الشرط الثاني:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, p^X \, q^{n-X}$$

وفق منشور نيوتن الذي يكتب وفق الصيغة التالية:

$$(a + b)^n = C_n^0 \, a^0 \, b^n + C_n^1 \, a^1 \, b^{n-1} + \cdots \dots \dots \dots + C_n^n \, a^n \, b^0$$

$$(a + b)^n = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, a^X \, b^{n-X}$$

وبالتالي فإن تطبيق هذا المنشور على قانون التوزيع الثنائي ليصبح كما يلي:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} = (p + q)^n$$

بما أن: (q+p=1) وبالتالي يصبح الشرط الثاني محقق، أي:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = (p + q)^n = (1)^n = 1$$

2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الثنائي يعرف كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} C_n^X \, p^X \, q^{n-X}$$

حيث: $0 \leq X \leq n$.

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \displaystyle\sum_{X=0}^{n-1} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} & 0 \leq x \leq n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

3.المميزات العددية: على أساس أن القانون الثنائي هو عبارة عن جمع عدد (n) من متغيرات برنولي يمكن حساب كل من التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathrm{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p} = np$$

ب. التباين: المتغيرات مستقلة وبالتالي:

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(\mathrm{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{pq} = npq$$

مثال 43: صندوق به 5 تفاحات فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة 0,4. **المطلوب:**

- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد التفاح التالف.
- مثل بيانيا تابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع.
- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u> هنا (n=5)، (p=0,4).

بفرض أن (x) متغير عشوائي يمثل عدد التفاح التالف، فإنه يتبع توزيع ثنائي الحدين بمعالم (n=5)، (p=0,4)، أي أن: $X \to B(5,\ 0{,}4)$.

– **التوزيع الاحتمالي لعدد التفاح التالف:**

إن تابع الكثافة الاحتمالية لعدد التفاح التالف هي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} C_5^X \, 0{,}4^X \, 0{,}6^{n-X} & , x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

وتابع التوزيع يكون كما يلي:

$$F(x_i) = \sum_{X=0}^{X} C_5^X \, 0{,}4^X \, 0{,}6^{n-X}$$

حيث: $0 \leq X \leq n$.

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

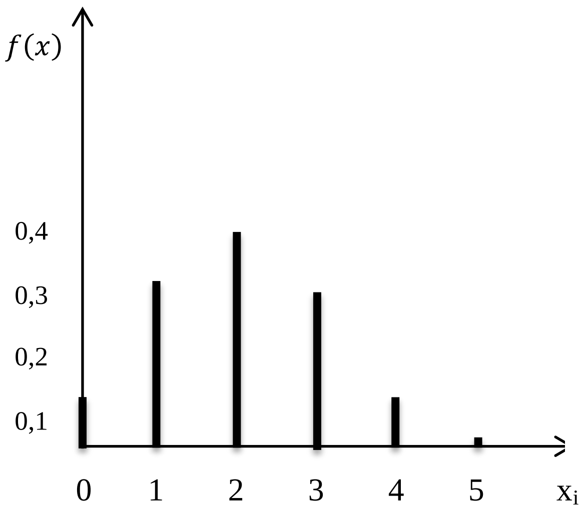
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{X=0}^{n-1} C_5^X \, 0{,}4^X \, 0{,}6^{n-X} & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

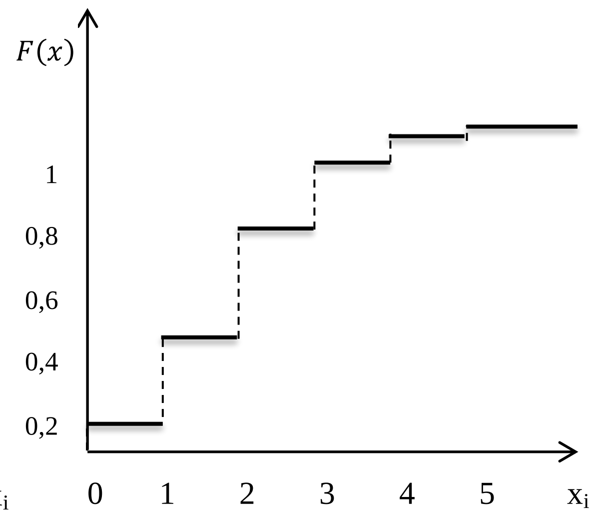
وعلى ذلك فإن:

$f(x)$	$F(x)$
$f(0) = 0{,}0778$	$F(0) = 0{,}0778$
$f(1) = 0{,}25920$	$F(1) = 0{,}3370$
$f(2) = 0{,}34560$	$F(2) = 0{,}6826$
$f(3) = 0{,}23040$	$F(3) = 0{,}9130$
$f(4) = 0{,}07680$	$F(4) = 0{,}9898$
$f(5) = 0{,}0102$	$F(5) = 1$

ملاحظة: يمكن استخراج قيم F(x) عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين (أنظر الملحق رقم 1).

-التمثيل البياني لتابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع:





– حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = np = 5(0{,}4) = 2$$

- التباين:

$$V(X) = npq = 5(0{,}4)(0{,}6) = 1{,}2$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}2} = 1{,}0954$$

IV التوزيع الاحتمالي لبواسون: Distribution de Poisson $x \rightarrow P(\lambda)$

إذا كان التوزيع الثنائي يستعمل لإيجاد احتمال عدد معين من (النجاحات) من بين عدد (n) من المحاولات، فإن توزيع بواسون يستعمل لإيجاد نفس الاحتمال ولكن في فترة زمنية معينة أو في منطقة معينة. إن الوحدة الزمنية قد تكون ثانية أو دقيقة أو ساعة أو أسبوع أو... الخ، أما المكان قد يكون في صفحة من كتاب أو قسم من الأقسام على سبيل المثال.

يسمى هذا القانون باسم مكتشفه عالم الرياضيات الفرنسي سيمون دينيس، ويدعى بتوزيع الحوادث النادرة أو قانون بواسون للأعداد الصغيرة، لذا يمكن استعماله عندما يكون احتمال تحقق حدث ما صغيرا $(P\leq 0{,}1)$ وخاصة إذا أعيدت التجربة عدد كبير من المرات. وهي الحالة التي يؤول فيها جداء n و p إلى عدد ثابت (λ).

$$\lim_{n\to\infty} np = \lambda$$

إن شروط تطبيق التوزيع الثنائي تبقى سارية المفعول عند استعمال توزيع بواسون:

- تؤول كل محاولة إلى نتيجة واحدة من نتيجتين متنافيتين؛
- إذا افترضنا وجود عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض، فإن حدوث النجاحات في أي فترة مستقلة عن حدوث النجاحات في فترة أخرى؛
- عدد النجاحات في وحدة من الزمن يبقى ثابتا؛
- معدل النجاحات (λ) التي تحدث في فترة زمنية معينة معلوم.

من الأمثلة عن الحالات التي يستخدم فيها توزيع بواسون ما يلي:

- عدد الكوارث أو الوفيات الناجمة عن أمراض نادرة خلال فترة زمنية معينة؛
- عدد السلع التالفة التي ينتجها مصنع ما في فترة معينة؛
- عدد حوادث المرور في طريق معين خلال يوم أو أسبوع؛
- عدد الأخطاء في صفحة من كتاب معين؛
- عدد المكالمات الهاتفية خلال وحدة من الزمن.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إن تابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون بمعلمة (λ) يعطى وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} & , x = 0,1,2,3 \dots \dots \dots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

حيث: $(\lambda > 0)$.

$e=2,718$.

إن المتغير العشوائي (x) يتبع توزيع بواسون $P(\lambda)$ ويتوفر فيه الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

حيث:

-الشرط الأول محقق لأن:

$$\forall X \in \aleph, \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} \geq 0$$

-الشرط الثاني:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} = e^{-\lambda}\sum_{X=0}^{n} \frac{\lambda^X}{X!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

علما أنه حسب تايلر فإن $\sum_{X=0}^{n} \frac{\lambda^X}{X!}$ يمثل مجموع حدود سلسلة لا نهائية تتقارب من e^{λ}:

$$\sum_{X=0}^{n} \frac{\lambda^X}{X!} = e^{\lambda}$$

2. تابع التوزيع: تابع التوزيع لتوزيع بواسون يعرف كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} f(X)$$

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^X}{X!}$$

حيث: $x \geq 0$.

لا يمكن صياغة هذه الدالة بشكل آخر غير الشكل الموضح أعلاه، والتعامل مع هذه الدالة بهذا الشكل يبدو معقدا بعض الشيء وخصوصا عند حساب $(F(x))$ لقيم كبيرة إلى (x)، غير أنه يمكن الاستعانة بجداول خاصة بهذا التوزيع (أنظر الملحق رقم 2).

3. المميزات العددية: إن الخاصية المميزة لتوزيع بواسون عن بقية التوزيعات الأخرى هي أن التوقع الرياضي له مساو لتباينه ويكون مساويا لقيمة المعلمة (λ) كما سنوضحه في الآتي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{X=0}^{\infty} X\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^X}{X!} = \lambda \sum_{X=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X-1}}{(X-1)!}$$

وحيث أن:

$$\sum_{X=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X-1}}{(X-1)!} = \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{Y}}{Y\,!} = 1 \quad ; \; Y = X-1$$

فإن:

$$E(X) = \lambda$$

ب.التباين: للحصول على تباين توزيع بواسون نجد أولا التوقع الرياضي لـ:

$$E[X(X-1)] = \sum_{X=0}^{\infty} X\frac{(X-1)e^{-\lambda}\,\lambda^X}{X!} = \lambda^2 \sum_{X=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X-2}}{(X-2)!} = \lambda^2$$

أي أن:

$$E(X^2) - E(X) = \lambda^2$$
$$\rightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

وبذلك نحصل على التباين كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

مثال 44: يتلقى مركز الحجز في شركة الخطوط الجوية الجزائرية في المتوسط 300 مكالمة هاتفية خلال ساعة. **المطلوب:**

- أي قانون احتمالي سيتبعه المتغير العشوائي (x) الذي يعبر عن عدد المكالمات ولماذا؟
- ما هو احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ما يلي:
  - ثلاث مكالمات؛
  - على الأكثر مكالمتين.

<u>الحل</u>: من خلال المعطيات المتوفرة (عدد المكالمات خلال ساعة) فإننا سنعتمد على توزيع بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر في الفترات الزمنية المحددة.

ويكتب قانونه كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{X!} & , x = 0,1,2,3 \ldots\ldots\ldots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

(λ=300) خلال فترة ساعة.

-حساب احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ثلاث مكالمات:

$$300 \quad \rightarrow \quad 60\ \text{min}$$
$$\lambda \quad \rightarrow \quad 02\ \text{min}$$
$$\lambda = \frac{600}{60} = 10$$
$$f(3) = P(X = 3) = \frac{e^{-10}\,10^{3}}{3!} = 0{,}0076$$

كما يمكن حساب قيمة الاحتمال باستعمال جدول خاص بتوزيع بواسون كما يبين الجدول التالي:

λ=		6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
x=	0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
	1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
	2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
	3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
	4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
	5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
	6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
	7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
	8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
	9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579

القيم المعطاة في الجدول تبين قيم تابع التوزيع F(x)، وعليه:

$$f(3) = P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0{,}0103 - 0{,}0028 = 0{,}0076$$

-حساب احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين على الأكثر مكالمتين:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{-10}\, 10^0}{0!} + \frac{e^{-10}\, 10^1}{1!} + \frac{e^{-10}\, 10^2}{2!} = 0{,}0028$$

كما يمكن حساب قيمة الاحتمال باستعمال الجدول الخاص بتوزيع بواسون المبين سابقا، حيث:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$P(X \leq 2) = F(0) + F(1) - F(0) + F(2) - F(1) = F(2) = 0{,}0028$$

مثال 45: يمثل المتغير العشوائي (x) عدد الإصابات بمرض مهني نادر (P=0,5%) في مجتمع مؤلف من 3000 شخص. **المطلوب:**

- ما احتمال أن يصاب 10 أشخاص بهذا المرض؟.

الحل: من خلال المعطيات المتوفرة (مرض نادر في مجتمع معين) فإننا سنعتمد على توزيع بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر النادرة في فترات زمنية أو أماكن محددة. يكتب قانونه كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\, \lambda^{X}}{X!} & , x = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots \infty \\ 0 & , \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

$$\lambda = np = 3000(0{,}005) = 15$$

-احتمال أن يصاب 10 أشخاص بهذا المرض:

$$f(10) = P(X = 10) = \frac{e^{-15}\, 15^{10}}{10!} = 0{,}0486$$

V قانون التوزيع الهندسي: Distribution Géométrique $x \to G(p)$

يقال أن المتغير العشوائي (x) له توزيع هندسي إذا كانت هناك مجموعة من تجارب برنولي؛ بمعنى أن كل تجربة لها نتيجة نجاح (p) أو فشل (q) كما أن احتمال النجاح ثابت من تجربة إلى أخرى وكل التجارب مستقلة عن التجارب الأخرى، بالإضافة إلى أن المتغير العشوائي (x) في حالة التوزيع

الهندسي يمثل عدد التجارب اللازمة للحصول على أول نجاح؛ أي أن عدد التجارب غير محدد من البداية كالتوزيع ثنائي الحدين، ومن الأمثلة عن هذا التوزيع إلقاء قطعة نقد بعدة تكرارات حتى ظهور أو صورة (P).

إذا افترضنا أن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة (x) تسبقه العديد من المحاولات الفاشلة والتي قدرها $(x-1)$، فالمتغير العشوائي الذي يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح يتبع التوزيع الهندسي ويعطى تابع كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} Pq^{X-1} & , x = 0,1,2,3 \dots \dots \dots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

والمتغير العشوائي (x) يتبع التوزيع الهندسي يتوفر فيه الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) \ = 1 \end{cases}$$

ونلخص المميزات العددية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الهندسي في الآتي:

- **التوقع الرياضي**: يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- **التباين**: يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

مثال 46: رميت زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية عدة مرات حتى يتم الحصول على أحد الأوجه.

المطلوب:

- كتابة تابع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي (x).
- ما هو احتمال أن تحتاج إلى ثلاث محاولات على الأقل حتى الحصول على العدد 6 على وجه زهرة النرد؟.
- أحسب معدل (التوقع الرياضي) عدد المحاولات التي تحتاجها وتباين ذلك.

الحل: من خلال المعطيات المتوفرة فإننا سنعتمد على التوزيع الهندسي، لأن هذا التوزيع يستعمل في المسائل التي تتعلق بعدد التجارب اللازمة للحصول على أول نجاح، كما أن احتمال الحصول على أحد الوجوه الستة في الرمية الواحدة ثابت، حيث:

$$P = \frac{1}{6}$$

- ومنه $\mathbf{x \to G(p)}$، ويكتب تابع كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{X-1} & , x = 0,1,2,3 \dots \dots \dots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

- **احتمال أن تحتاج إلى ثلاث محاولات على الأقل حتى تحصل على العدد 6 على وجه زهرة النرد هو:**

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$
$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}\right] = 0{,}6944$$

- **حساب معدل عدد المحاولات التي تحتاجها وتباين ذلك:**

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

- **التباين:**

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$$

VI قانون التوزيع فوق الهندسي: Distribution Hypergéométrique $\mathbf{x \to H(N, n, p)}$

يعتبر استقلال التجارب عن بعضها البعض من بين الشروط الضرورية لاستعمال القانون الثنائي، ولكن في الواقع يصعب تحقيق هذا الشرط عند سحب عينة حجمها (n) عنصر من مجتمع حجمه (N) عنصر بشكل متتال وبدون إعادة، وبالتالي يعبر السحب بدون إرجاع على أن التجارب غير مستقلة وفي هذه الحالة نطبق قانون التوزيع فوق الهندسي.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: لتوضيح شكل دالة تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع فوق الهندسي ننطلق من المثال التالي:

ليكن لدينا صندوق به (N) كرية و(n) يمثل العينة المسحوبة منه، وفي هذا الصندوق (M) كرة حمراء والتي نعتبرها نجاح التجربة و(N−M) كرة بيضاء، فعند سحب العينة (n) وبدون إرجاع نعتبر أن (x) يمثل عدد الكريات الحمراء المسحوبة (x=1,2,3,4,.....k).

لدينا:

- C_N^n هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار (n) كرية من الكريات الكلية (N).
- C_M^X هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار (x) كرية حمراء من كل الكريات الحمراء الموجودة (M).
- C_{N-M}^{n-X} هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار الكريات البيضاء من مجموع الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق.

وبتطبيق قاعدة ضرب الاحتمال فإننا نكتب قانون تابع الكثافة للتوزيع فوق الهندسي كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{C_M^X C_{N-M}^{n-X}}{C_N^n} & , x = 0,1,2,3 \dots \dots \dots n \\ 0 & \text{, ماعدا ذلك} \end{cases}$$

المتغير العشوائي (x) يتبع قانون التوزيع فوق الهندسي يتوفر فيه الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

2. المميزات العددية: تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي والتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع فوق الهندسي كما يلي:

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \frac{M * n}{N} = np \qquad \backslash\, p = \frac{M}{N}$$

- **التباين:**

$$V(X) = \left(\frac{N - n}{N - 1}\right) npq$$

مثال 47: أثناء مراقبة دورية لحالة المنتوج في مؤسسة، اكتشف المراقب تلفا جزئيا لعدة صناديق في وحدة التخزين، وأن كل صندوق يحتوي 25 وحدة منها 10 وحدات معيبة (تالفة)، نفرض أننا سحبنا عينة مكونة من خمسة وحدات بطريقة عشوائية من أحد الصناديق، وكان السحب بدون إرجاع.

المطلوب:

- أوجد تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (x) الذي يمثل عدد الوحدات التالفة المسحوبة.
- أوجد احتمال الحصول على 5 وحدات سليمة.
- أوجد احتمال الحصول على 4 وحدات معيبة.
- أحسب قيمة التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

- **تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد الوحدات التالفة المسحوبة**

من المعطيات لدينا سحب بدون إرجاع ونتيجتين إما وحدات سليمة أو وحدات تالفة، وبالتالي نطبق التوزيع فوق الهندسي $x \to H\big(25, 5, (0{,}4)\big)$.

- C_{25}^{5} هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 5 وحدات من الوحدات الكلية 25.
- C_{10}^{X} هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار (x) وحدات معيبة من 10 الوحدات المعيبة الموجودة في الصندوق.
- C_{15}^{5-X} هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار الوحدات السليمة من مجموع 15 وحدة سليمة موجودة في الصندوق.

وبذلك تكون الصيغة الرياضية لتابع الكثافة للتوزيع فوق الهندسي كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{C_{10}^{X}\, C_{15}^{5-X}}{C_{25}^{5}} & , x = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots n \\ 0 & , \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- **احتمال الحصول على 5 وحدات سليمة:** احتمال الحصول على 5 وحدات سليمة يطابق ويساوي احتمال عدم الحصول على وحدات معيبة، أي:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{C_{10}^{0}\, C_{15}^{5-0}}{C_{25}^{5}} = 0{,}0565$$

- **احتمال الحصول على 4 وحدات معيبة:**

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{C_{10}^{4}\, C_{15}^{5-4}}{C_{25}^{5}} = 0{,}0593$$

- **حساب قيمة التوقع الرياضي والتباين:**
  - **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \frac{M * n}{N} = np = 5(0{,}4) = 2$$

  - **التباين:**

$$V(X) = \left(\frac{N - n}{N - 1}\right) npq = \left(\frac{25 - 5}{25 - 1}\right) 5(0{,}4)(0{,}6) = 1$$

ثانيا– التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

I التوزيع المنتظم (المستمر): Distribution Uniform $x \to \mu(,b)$

يعد التوزيع المنتظم المتصل التوزيع المناظر للتوزيع المنتظم المنفصل عندما يكون المتغير العشوائي متصلا في فترة محدودة، وهو يستخدم في دراسة مثلا: احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريغ حمولتها وأوقات مغادرتها ووصول الشاحنات إلى محطة التفريغ وكل ذلك في وقت محدد.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا منتظما منفصلا ومعرفا على المجال $[,b]$، يكون تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} c & ,a \le x \le b \\ 0 & ,\text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث: c ثابت.

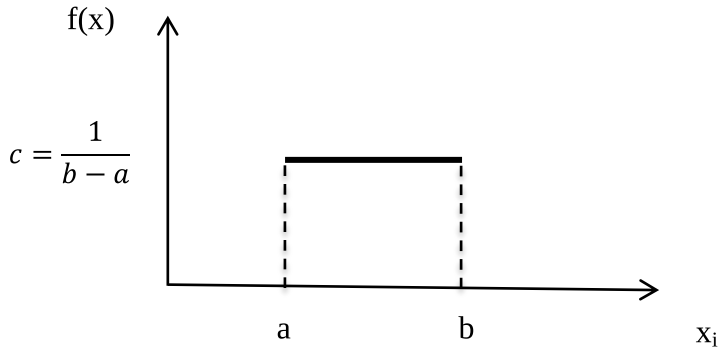
ويتوفر في هذا القانون الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} \forall\, X \in [a,b], f(x) \ge 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} c\, dx = c[x]_a^b = c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{b-a} \end{cases}$$

وبالتالي يكتب تابع الكثافة كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

ويمثل بيانيا كما يلي:



2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع المنتظم المستمر يعرف كما يلي:

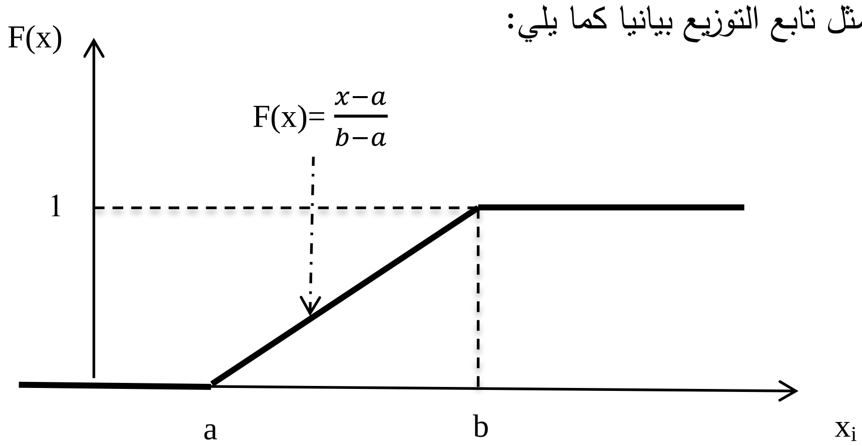
$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx$$

$$= \frac{1}{b-a}[x]_a^x = \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$$

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

ويمثل تابع التوزيع بيانيا كما يلي:



3. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي:** تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع التوزيع المنتظم المستمر كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{(b+a)}{2}$$

ب. التباين: تعطى الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع المنتظم المستمر كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2}$$

و:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\, dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)$$

إذن:

$$V(X) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

__مثال 48:__ ليكن لدينا المتغير العشوائي المتصل (x) يتبع التوزيع المنتظم بالمعلمتين (b=6) و(a=−2)

أي: $x \to \mu(6,-2)$

المطلوب:

- كتابة تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (x).
- كتابة تابع التوزيع للمتغير العشوائي (x).
- إيجاد قيم الاحتمالات التالية:

$$P(X > 2), \quad P(X \le 3), \quad P(-3 < X \le 7)$$

- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل: لدينا: (b=6) و(a=−2) أي: $x \to \mu(6,-2)$

- **كتابة تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي:**

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & , -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

- **كتابة تابع التوزيع للمتغير العشوائي (x):**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \dfrac{x+2}{8} & -2 \leq x \leq 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

- **إيجاد قيم الاحتمالات:**

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2+2}{8} = 0{,}5$$

$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3+2}{8} = 0{,}625$$

$$P(-3 < X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) = F(7) - F(3) = 1 - 0 = 1$$

- **حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:**

- **حساب التوقع:**

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} = \frac{(6-2)}{2} = 2$$

- **حساب الانحراف المعياري:**

بما أن:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

فإن:

$$\delta(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\frac{(8)^2}{12}} = 2{,}309$$

II التوزيع الأسي: Distribution exponentielle $X \rightarrow e(\lambda)$

التوزيع الأسي يقابل التوزيع الهندسي في المتغيرة العشوائية المتقطعة؛ ففي التوزيع الهندسي يتمثل المتغير العشوائي في عدد المحاولات حتى يحصل حادث ما، أما في حالة التوزيع الأسي يمثل المتغير العشوائي الوقت الذي يمضي حتى يحصل حادث ما مثل: وقت الانتظار في الطابور أو الوقت اللازم لإصلاح جهاز معين أو مدة الحياة لبعض الأجزاء الالكترونية...الخ.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: بافتراض أنه لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) يتوزع وفق التوزيع الأسي بمعلمة (λ)، يكون تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

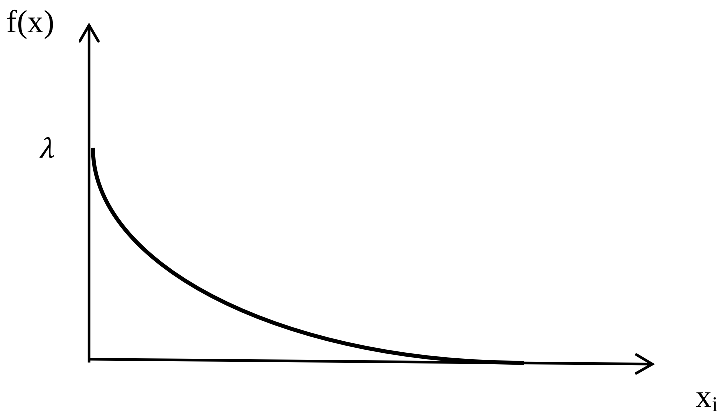
$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

حيث: λ>0 .

ويتوفر في هذا القانون الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} \forall\, X \in [0, +\infty], f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 1 \end{cases}$$

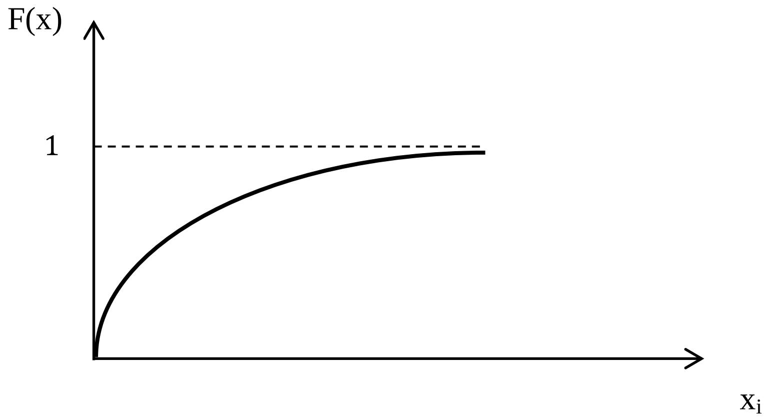
ويمثل تابع الكثافة الاحتمالية بيانيا كما يلي:



2.1. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الأسي يعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

ويمثل تابع التوزيع بيانيا كما يلي:



3. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي:** تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع التوزيع الأسي كما يلي:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ب. **التباين:** تعطى الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع الأسي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال 49: إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع تتبع توزيعا أسيا بمتوسط 1500 ساعة. **المطلوب:**

- ما احتمال أن يعيش أحد المصابيح أكثر من 3000 ساعة.
- ما احتمال أن يحترق أحد المصابيح خلال 150 ساعة من الاستعمال.
- إذا أراد صاحب المصنع أن يضمن أن واحدا في الألف من المصابيح يحترق قبل 5 ساعات من الاستعمال فما هو أقل متوسط يسمح به لإنتاجه.

<u>**الحل:**</u> نفرض أن المتغير العشوائي (x) يمثل عمر المصابيح وأن E(x) متوسط العمر:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1500 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1500}$$

- **تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (x):**

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1500} e^{-\frac{x}{1500}} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

- **تابع التوزيع للمتغير العشوائي (x):**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{1500}} & x \geq 0 \end{cases}$$

- **احتمال أن يعيش أحد المصابيح أكثر من 3000 ساعة:**

$$P(X > 3000) = e^{-\frac{x}{1500}} = e^{-2} = 0{,}135$$

- **احتمال أن يحترق أحد المصابيح خلال 150 ساعة من الاستعمال:**

$$P(X \leq 150) = 1 - e^{-\frac{x}{1500}} = 1 - e^{-1} = 0{,}1$$

- **أقل متوسط يسمح به لإنتاجه (μ) ليضمن صاحب المصنع أن واحدا في الألف من المصابيح يحترق قبل 5 ساعات من الاستعمال هو:**

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{5}{\mu}} = 0{,}001$$

$$e^{-\frac{5}{\mu}} = 0{,}999 \Rightarrow \mu = 5000$$ ساعة

III التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس: D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية كون معظم الظواهر تتبع هذا القانون أو تؤول إليه إذا توفرت شروط معينة. يوجد هذا التوزيع تحت صيغتين مختلفتين:

1. التوزيع الطبيعي العام: $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

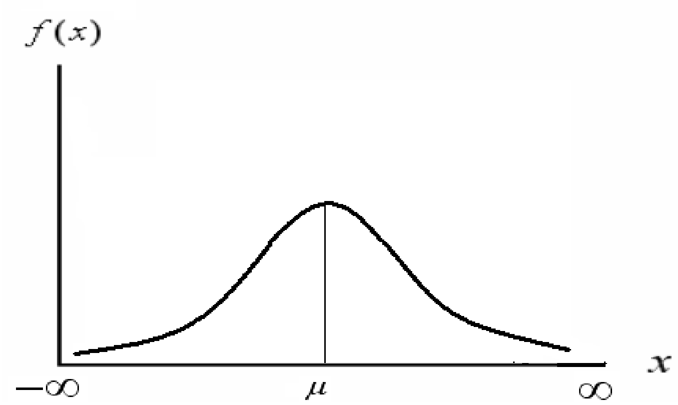
1.1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ) وانحراف معياري (σ) فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي (x) تعطى بالعلاقة :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad X \in \mathrm{R}$$

حيث: μ و σ ثابتان.

π هو مقدار ثابت ($\pi = 3{,}1416$).

2.1. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري: كما نلاحظ من خلال الشكل أدناه منحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي للتوزيع، ويأخذ الشكل الجرسي وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقي شيئا فشيئا دون أن يتماسا مع هذا المحور. وإذا أسقطنا عمودا من قمة المنحنى على المحور الأفقي فإن هذا العمود يعتبر محورا للتماثل لأنه يقسم المساحة تحتي المنحنى إلى قسمين متساويين تماما وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة كل قسم تساوى 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية.



3.1. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الطبيعي العام تأخذ الشكل التالي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

حيث: f(x) يأخذ الصيغة السابقة.

لحساب F(x) يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x_i)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لتابع الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة تابع الكثافة الاحتمالية.

4.1. المميزات العددية:

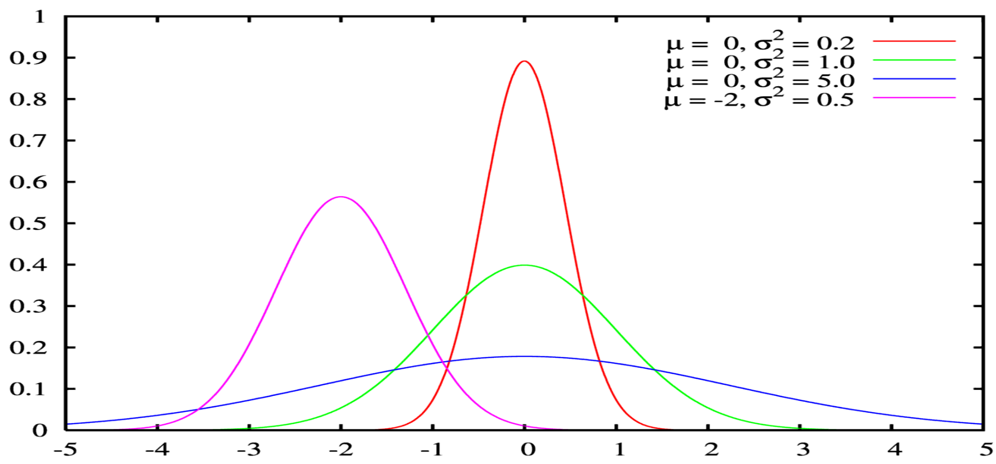
أ. **التوقع الرياضي:** الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع التوزيع الطبيعي العام هي:

$$E(X) = \mu$$

ب. **التباين:** الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع الطبيعي العام هي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$V(X) = \sigma^2$$

ملاحظة: التوزيع الطبيعي ليس توزيعاً وحيدا ولكنه يمثل عائلة من التوزيعات الطبيعية، وكل توزيع من هذه العائلة يمكن تحديده وتعريفه بدقة متى عرفت معالمه وهي المتوسط ويرمز له بالرمز μ، والانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ، حيث تحدد قيمتي هاتين المعلمتين شكل منحنى التوزيع، حيث تحدد قيمة المتوسط μ موقع التوزيع على المحور الأفقي من نقطة الأصل، كما تحدد قيمة الانحراف المعياري مدى تشتت التوزيع فكلما كانت σ كبيرة كلما زاد تشتت القيم وبالتالي اتساع المنحنى.



وبالتالي لا يمكن إعداد جداول لكل قيم σ وμ (عدد غير منتهي من الجداول). ولتجاوز هذه المشكلة تم استعمال تحويل بسيط للمتغير العشوائي بحيث نحصل على $(\mu = 0)$ و $(\sigma = 1)$ ويعتبر هذا التوزيع $\mathcal{N}(0,1)$ كمعيار يسمح باستعمال جدول موحد كما نوضح في ما يلي.

2. التوزيع الطبيعي المعياري: $Z \to \mathcal{N}(0,1)$

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ) وانحراف معياري (σ)فإن (Z) تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، وانحراف معياري يساوى الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وتسمى (Z) بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري (أنظر الملحق رقم 3).

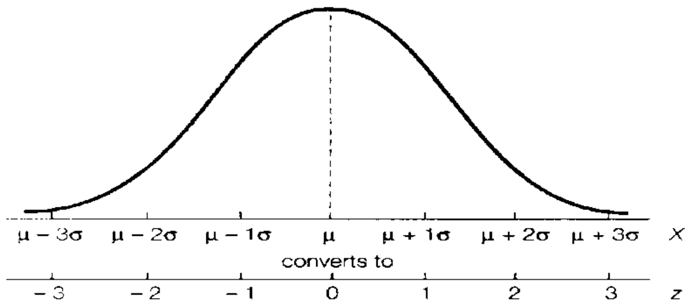
1.2. تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري: دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي (Z) تأخذ الشكل التالي:

$$f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}Z^2} \quad , \qquad Z\in \mathrm{R}$$

2.2. خصائص المنحنى الطبيعي المعياري:

- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودي الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوى 0,5.
- منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه، والتوائه يساوى 0 وتفرطحه يساوى 3.
- المساحة المحصورة بين ±1 درجة معيارية تساوى 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. والمساحة المحصورة بين 2 ± درجة معيارية تساوى 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. أما المساحة المحصورة بين 3 ± درجات معيارية تساوى 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كما يلي:

$$P(-1\le Z\le 1)=0{,}6826$$
$$P(-2\le Z\le 2)=0{,}9544$$
$$P(-3\le Z<\le)=0{,}9974$$

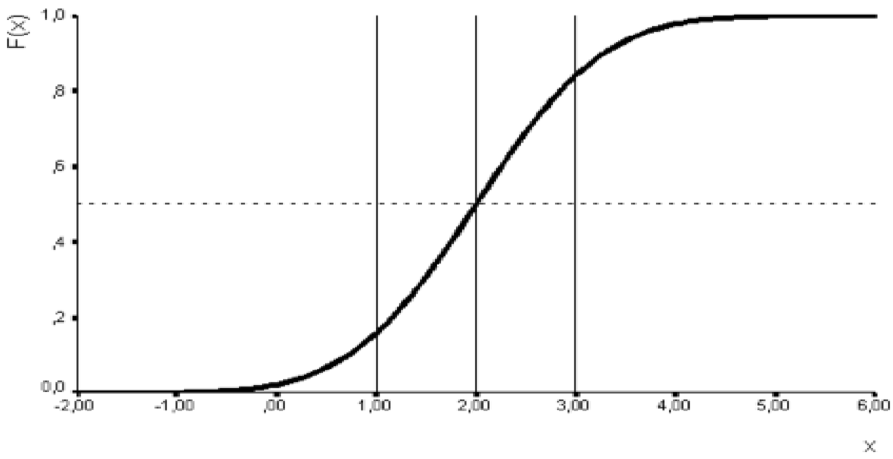


3.2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الطبيعي المعياري تأخذ الشكل التالي:

$$F(z_i)=P(Z\le z_i)=\int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

حيث: $f(z)$ يأخذ الصيغة السابقة.

ويمثل تابع التوزيع بيانيا كما يلي:



4.2. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي:** تستخرج الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$E(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(x)-\mu] = 0$$

ب. **التباين:** تستخرج الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$V(Z) = \mathrm{V}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(x-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}[V(x)] = \frac{1}{\sigma^2}[\sigma^2] = 1$$

مثال 50: إذا علمت أن فترة حياة جهاز آلي يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط $(\mu = 10)$ سنوات وانحراف معياري $(\sigma = 2)$ سنوات. **المطلوب:**

- ما احتمال أن يصل عمر الجهاز 15 سنة؟
- ما احتمال ان تكون مدة حياة هذا الجهاز ما بين 12 و15 سنة؟
- ما احتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز ما بين 5 و8 سنوات؟

الحل:

- **احتمال أن يصل عمر الجهاز 15 سنة:**

$$P(X \leq 15) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{15-10}{2}\right)$$

$$P(X \leq 15) = P(Z \leq 2{,}5)$$

بعدها نقوم باستخراج قيمة الاحتمال المناظر لـ $(Z \leq 2{,}5)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وفق ما يبينه الجدول التالي:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964

إذن:

$$P(X \leq 15) = P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

- **احتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 12 و15 سنة:**

$$P(12 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{12-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{12-10}{2} \leq Z \leq \frac{15-10}{2}\right)$$
$$P(12 \leq X \leq 15) = P(1 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq 1)$$

$$P(12 \leq X \leq 15) = 0{,}9938 - 0{,}8413 = 0{,}1525$$

- **احتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 5 و8 سنوات:**

$$P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5-10}{2} \leq Z \leq \frac{8-10}{2}\right)$$
$$P(5 \leq X \leq 8) = P(-2{,}5 \leq Z \leq -1) = [1 - P(Z \leq 1)] - [1 - P(Z \leq 2{,}5)]$$
$$P(12 \leq X \leq 15) = [1 - 0{,}8413] - [1 - 0{,}9938] = 0{,}1587 - 0{,}0062$$
$$= 0{,}1525$$

ملاحظة: في حالة كون قيمة (z) سالبة فإنها تحسب بواسطة علاقة التناظر، أي بواسطة احتمالات القيم الموجبة. ولفهم أكثر لكيفية استعمال الجدول في كل الحالات الممكنة نستعين بالعلاقات الرياضية التالية:

$$P(Z = z) = 0$$
$$P(Z \leq z) = P(Z < z)$$
$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$
$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z > -z) = 1 - P(Z < -z) = (Z < z)$$

IV توزيع كاي مربع: Distribution en Khi-carré (ou Khi-deux) (ch→ 2) (χ^2)

ليكن لدينا متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ الموزعة حسب القانون الطبيعي المعياري $(\mathcal{N}(0,1))$.

ولدينا أيضا المتغير (χ^2) بحيث:

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

χ_n^2: كاي مربع بعدد (n) من درجات الحرية التي تمثل عدد أبعاد الفضاء الذي تمثل فيه النقاط المناسبة لمختلف قيم المتغير.

توزيع كاي مربع من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التي لها أهمية كبيرة في الكثير من الاختبارات الإحصائية، مثل:

- اختبار تجانس عينتين أو أكثر؛
- اختبار الاستقلالية؛
- اختبار حسن المطابقة (جودة التوفيق).

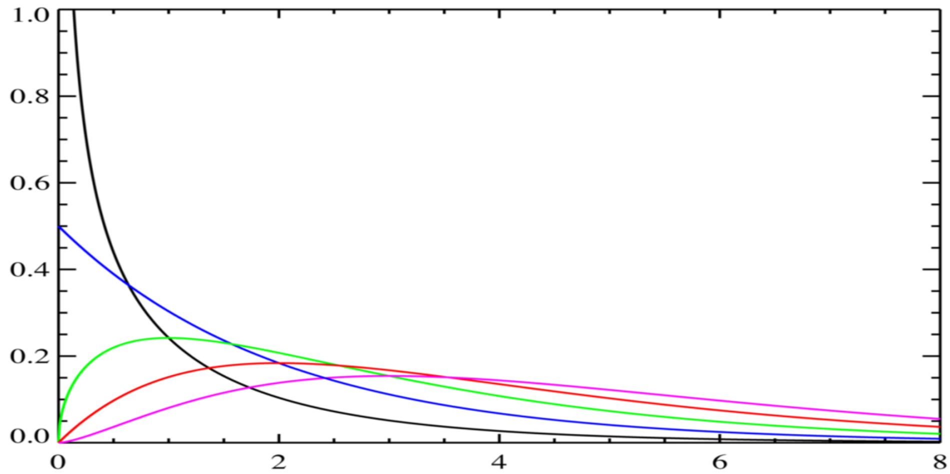
1. تابع الكثافة الاحتمالية: يعرف تابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\frac{-x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

حيث: n عدد صحيح موجب يمثل عدد درجات الحرية.

Γ هو دالة قاما الرياضية.

يتغير شكل تابع الكثافة الاحتمالية مع تغير قيمة (n) كما يوضحه الشكل الموالي:

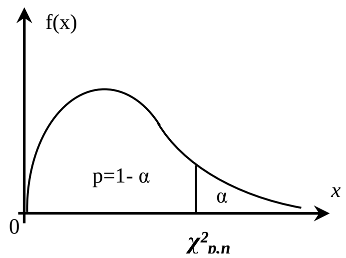


إن المنحنى الممثل لتابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع غير متماثل بل هو منحنى ملتو إلتواء موجبا (أي نحو جهة اليمين).

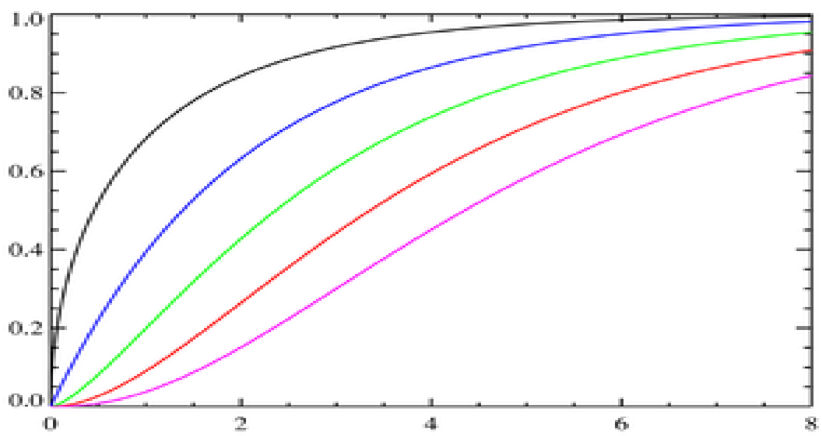
2. تابع التوزيع: يعرف تابع التوزيع لتوزيع كاي مربع كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^x e^{\frac{-x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1}$$

ويعكس هذا الاحتمال المسافة الإجمالية المتواجدة بين خط منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ومحور الفواصل، من النقطة (X=0) إلى غاية القيمة (x) وفق الشكل التالي:



أما تابع التوزيع فيمثل بيانيا كما يلي:



نلاحظ أن شكل تابع التوزيع يتغير مع تغير قيمة (n).

3. المميزات العددية: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي والتباين لمتغير يتبع توزيع كاي مربع كما يلي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(X) = n$$

ب. التباين:

$$V(X) = 2n$$

ملاحظة: لإيجاد قيمة الاحتمال المقابل لقيمة معينة وحسب جدول كاي مربع يجب أن تكون الصيغة كالآتي:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{n,\propto}\right) = \propto$$

حيث: (α) تمثل مستوى المعنوية (قيمة الاحتمال).

مثال 51: إذا كان المتغير العشوائي (χ^2) يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (10). **المطلوب:**

- أوجد التوقع الرياضي والتباين، مع ذكر دالة تابع الكثافة الاحتمالية.
- أوجد قيمة الاحتمالات التالية: $P(\ \ ^2 > 12,55)$، $P(\chi^2 < 20,48)$، $P(15,99 < \chi^2 < 29,59)$، $P(\chi^2 > -1)$.

<u>**الحل:**</u>

- **ايجاد التوقع الرياضي والتباين:**

من المعلومات المتوفرة فإن: $\chi^2 \rightarrow \square^2_{10}$

أي أن: (n=10)، وبذلك يكون:

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = n = 10$$

- **التباين:**

$$V(X) = 2n = 2(10) = 20$$

أما الصيغة الرياضية لتابع الكثافة الاحتمالية فهي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{10}{2}}\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)}e^{\frac{-x}{2}}x^{\frac{10}{2}-1} & ,x\geq 0\\ 0 & \text{ماعدا ذلك},\end{cases}$$

- **حساب قيمة الاحتمالات:**

من جدول توزيع كاي مربع (أنظر الملحق رقم 4) نقوم باستخراج القيم وحساب الاحتمالات كالتالي:

	α							
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34

$P(\chi^2>12{,}55)=0{,}25$

$P(\chi^2<20{,}48)=1-P(\chi^2>20{,}48)=1-0{,}025=0{,}975$

$$\begin{aligned}P(15{,}99<\chi^2<29{,}59)&=P(\chi^2<29{,}59)-P(\chi^2<15{,}99)\\&=[1-P(\chi^2>29{,}59)]-[1-P(\chi^2>15{,}99)]\\&=0{,}1-0{,}001=0{,}099\end{aligned}$$

$P(\chi^2>-1)=0$

V توزيع ستيودنت: Distribution de student $(T\to t(n))$

توزيع ستيودنت مشتق من حاصل قسمة متغيرين مستقلين؛ المتغير الأول الموجود في البسط (Z) وهو متغير ذو توزيع طبيعي معياري، والمتغير الثاني الموجود في المقام ما هو إلا الجذر التربيعي الموجب لمتغير ذو توزيع كاي مربع (χ^2) مقسوما على درجة حريته (n).

ويعرف المتغير العشوائي (T) بالشكل التالي:

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$$

يعتبر توزيع ستيودنت أحد أهم توزيعات المعاينة، والذي يستخدم عادة في تقدير المتوسطات النظرية وفي التحقق من قيمة التباين النظري للتوزيعات (σ^2 مجهول).

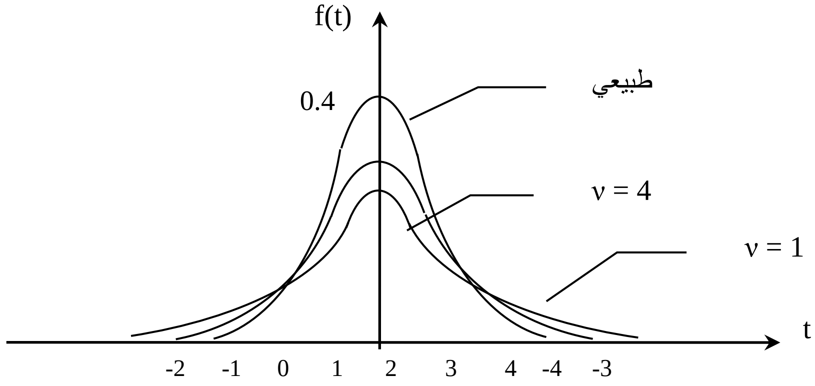
1. تابع الكثافة الاحتمالية: يعرف تابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت بالصيغة التالية:

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{T^2}{2}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} & ,T \in R \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

حيث: n عدد صحيح موجب يمثل عدد درجات الحرية.

Γ هو دالة قاما الرياضية. π قيمة ثابتة $(\pi = 3{,}1416)$.

يتغير شكل تابع الكثافة الاحتمالية مع تغير قيمة (n) كما يوضحه الرسم الموالي:



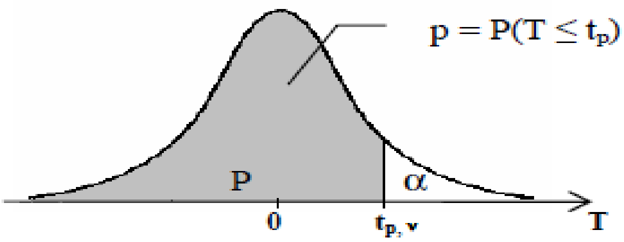
إن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت يأخذ شكلا متناظرا مدببا نحو الأعلى، وكلما ارتفعت درجت الحرية كلما بدأ في التقارب نحو التوزيع الطبيعي، عمليا عندما تكون درجة الحرية تساوي أو تفوق 30 يتقارب توزيع ستيودنت نحو التوزيع الطبيعي.

أما حساب الاحتمال فيتم بالطريقة التالية:

$$P\left(T \geq t_{(\propto,n)}\right) = \int_{t_{(\propto,n)}}^{+\infty} f(T)dt = \propto$$

حيث أن القيمة يتم استخراجها من جدول توزيع ستيودنت (t) وفق (α) مستوى المعنوية وهو السطر الأفقي، و(n) درجة الحرية الموجودة في السطر العمودي (أنظر الملحق رقم 5، حيث درجة الحرية (n) يعبر عنها بـ (v_1))، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$t_{(\propto,n)} = -t_{(1-\propto,n)}$$



2. المميزات العددية: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي والتباين لمتغير يتبع توزيع ستيودنت كما يلي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(T) = 0$$

ب. التباين:

$$V(T) = \frac{n}{n-2} \quad \backslash n > 2; \qquad V(T) = +\infty \qquad \backslash n \leq 2$$

مثال 52: إذا علمت ان المتغير العشوائي (T) يتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية 8، **المطلوب:**

- ايجاد دالة تابع الكثافة الاحتمالية.
- ايجاد قيمة التباين.
- ايجاد قيمة الاحتمالات التالية: $P(T > 3{,}355)$، $P(\chi^2 < -1{,}860)$.

الحل:

- **تابع الكثافة الاحتمالية:**

لدينا من المعطيات (n=8)، إذن: ((T→t(8))

ومنه تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (T) يكون بالشكل التالي:

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(4)}\left(1 + \dfrac{T^2}{2}\right)^{-\left(\frac{9}{2}\right)} & , T \in R \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

- **حساب التباين:**

$$V(T) = \frac{n}{n-2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- **حساب قيمة الاحتمالات:**

من جدول توزيع ستيودنت (أنظر الملحق رقم 5) نقوم باستخراج القيم وحساب الاحتمالات كالتالي:

	α											
v	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	$\boxed{1.860}$	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	$\boxed{3.355}$
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250

$$P(T > 3{,}355) = 1 - P(T \leq 3{,}355) = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$$
$$P(T < -1{,}860) = 1 - P(T < 1{,}860) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

VI توزيع فيشر: Distribution de Fisher $F \rightarrow f(m,n)$

إن توزيع فيشر (f) من التوزيعات الاحصائية الهامة، حيث يستخدم في الإحصاء الاستنتاجي لإجراء العديد من اختبارات الفروض المتعلقة بتحليل التباين واختبار معنوية معادلة الانحدار وغيرها من الاختبارات. ويعرف هذا التوزيع كما يلي:

إذا كان (X) و(Y) متغيرين عشوائيين ومستقلين، وكان (X) يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (m) وكان (Y) يتبع أيضا توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n) فإن (F) كمتغير عشوائي $\left(F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}\right)$ له توزيع (f) بدرجة حرية (m) و(n) ونكتب: $F \rightarrow f(m,n)$

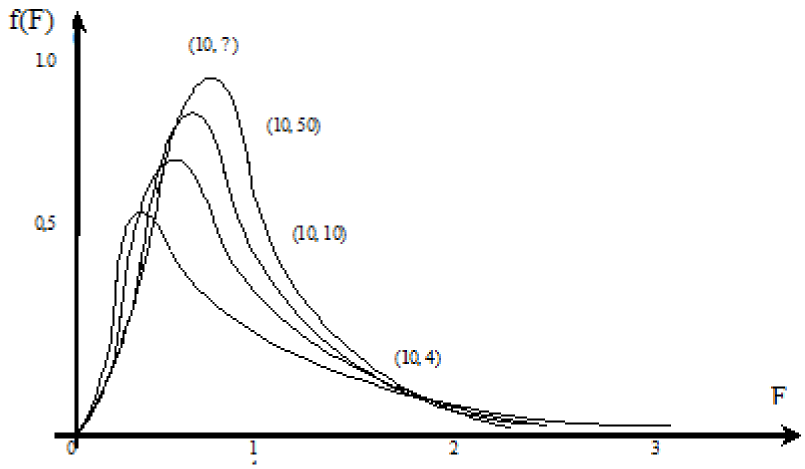
1. تابع الكثافة الاحتمالية: تابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر بأخذ الصيغة التالية:

$$f(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} * \dfrac{F^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}} & , F > 0 \\ 0 & \text{, ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث: n و m يمثلان عددين صحيحين موجبين لعدد درجات الحرية.

Γ هو دالة قاما الرياضية.

يتغير شكل تابع الكثافة الاحتمالية مع تغير قيمتي درجة حرية البسط ودرجة حرية المقام، كما يوضحه الشكل الموالي:



يعتبر توزيع فيشر ملتويا نحو اليمين (التواء موجب) كلما زادت درجات حرية البسط (m) أو المقام (n) أو كليهما معا.

أما حساب الاحتمال فيتم بالطريقة التالية:

$$P\left(F_{(m,n)} \geq f_{(\propto,m,n)}\right) = \int_{f_{(\propto,m,n)}}^{+\infty} f(F)df = \propto$$

حيث قيم $(\propto, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ يتم استخراجها من جدول توزيع فيشر وفق مستوى المعنوية (α) ودرجتي الحرية (m و n)، والملحق رقم (6) خاص بمستوى معنوية (α=0,05)، ودرجة الحرية (m) ممثلة في الجدول بـ (v_1)، ودرجة الحرية (n) ممثلة بـ (v_2).

2. المميزات العددية: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي والتباين لمتغير يتبع توزيع فيشر كما يلي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(F) = \frac{n}{n-2} \qquad \backslash n > 2$$

ب. التباين:

$$V(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad \backslash n > 4$$

مثال 53: إذا علمت أن المتغير العشوائي (F) يتبع توزيع فيشر بدرجات حرية 4 و 6 للبسط والمقام على التوالي، **المطلوب:**

- ايجاد دالة تابع الكثافة الاحتمالية.
- ايجاد قيمة التوقع الرياضي والتباين.

- ايجاد قيمة الاحتمال التالية: $P(F > 4{,}53)$.

الحل:

- **تابع الكثافة الاحتمالية:**

لدينا من المعطيات (m=4) و (n=6)، إذن: ((F⟶f(4,6))

ومنه تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (F) يكون بالشكل التالي:

$$f(F) = \begin{cases} \dfrac{5\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\Gamma\,2\,\Gamma\,3} * \dfrac{F^1}{\left(1+\frac{3}{2}F\right)^5} & , F > 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

- **حساب التوقع الرياضي والتباين:**
  - **التوقع الرياضي:**

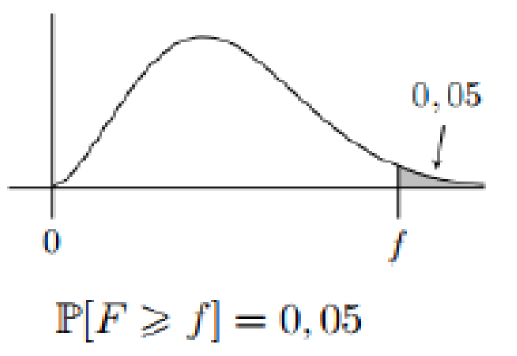
$$E(F) = \frac{n}{n-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

  - **التباين:**

$$V(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} = \frac{2\,(6)^2(4+6-2)}{4(6-2)^2(6-4)} = \frac{2\,(6)^2(8)}{4(4)^2(2)} = 4{,}5$$

- **ايجاد قيمة الاحتمال $P(F > 4,53)$:** تستخرج من الجدول الخاص بتوزيع فيشر، كما يلي:

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	$\boxed{4,53}$	4,39	4,28
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22



$P(F > 4{,}53) = 0{,}05$

ثالثا- التقريب بين التوزيعات الاحتمالية

باختصار شديد نذكر أهم التقريبات والأكثر استخداما فيما يأتي:

1. تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون: يمكن تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون، إذا كانت (n) كبيرة والاحتمال (p) صغيرا، عمليا يمكن القيام بهذا التقريب إذا توفرت الشروط التالية:

$$P \leq 0{,}1$$
$$n \geq 30$$
$$np \leq 15$$

2. تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي: عندما يكون عدد المحاولات (n) كبير نجد أن حساب الاحتمال بواسطة دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الثنائي يكون جد معقد، ولتفادي هذه الصعوبة يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي للحصول على القيم التقريبية لتلك الاحتمالات، حيث أن شروط هذا التقارب هي:

$$n \geq 30$$
$$np > 15$$
$$npq > 5$$

ملاحظات:

- إن حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري للقانون الطبيعي يتم بواسطة مقاييس القانون الأصلي:

$$\mu = np \quad ; \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

- إن تقريب توزيع متقطع (التوزيع الثنائي) بتوزيع مستمر (التوزيع الطبيعي) يتطلب القيام بتصحيح الاستمرارية حسب القاعد التالية:

$$P(X \leq k) = P(X \leq k + 0{,}5) = F(k + 0{,}5) = \phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$
$$P(X < k) = P(X < k - 0{,}5) = F(k - 0{,}5) = \phi\left(\frac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$
$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F(k + 0{,}5) - F(k - 0{,}5)$$
$$= \phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

3. تقريب التوزيع فوق الهندسي بالتوزيع الثنائي: يعتبر القانون الثنائي تقريبا جيدا للقانون فوق الهندسي عندما يكون:

$$\frac{n}{N} < \left(\frac{1}{10}\right) N$$

4. تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي: يستعمل التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، إذا كان:

$$\lambda > 15$$

بما أننا نقوم بتقريب توزيع متقطع بتوزيع مستمر فإن كل الملاحظات المذكورة في النقطة (2) من التقريبات تبقى سارية المفعول، وعليه:

- إن حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري للقانون الطبيعي يتم بواسطة مقاييس القانون الأصلي:

$$\mu = \lambda \quad ; \qquad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

- إن تقريب توزيع بواسون المتقطع بالتوزيع الطبيعي المستمر يتطلب القيام بتصحيح الاستمرارية حسب نفس القاعدة.

5. تقريب توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي: عندما تؤول (n) إلى مالانهاية $(n \to \infty)$ فإنه يمكن تحويل أو تقريب توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري $(\mathcal{N}(0,1))$.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

معدل عدد الحوادث على الطريق العام 7 مرات في الأسبوع، فما احتمال عدم وقوع حادث في أسبوع معين على نفس الطريق؟

التمرين الثاني:

في ميدان الفروسية يجتاز متنافس 4 حواجز متتابعة. احتمال أن يجتاز حاجزا هو 0,4 . نتائج اجتياز الحواجز مستقلة عن بعضها البعض. يخسر الفارس 10 نقاط كلما أخفق.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن يجتاز الفارس حاجزا واحدا فقط؟
2. ما هو احتمال أن يجتاز الفارس حاجزا واحدا على الأقل؟
3. ما هو قانون الاحتمال المرفق بخسارة النقاط بالنسبة للفارس؟
4. أحسب معدل الخسارة بعد الحواجز الأربعة.

التمرين الثالث:

يمثل زمن الانتظار أمام الشباك في إحدى الإدارات متغيرا عشوائيا (X) يناسب (بالدقائق) فترة الانتظار ويتبع قانونا أسيا بوسيط λ حيث $\lambda = 0{,}08$.

المطلوب:

1. ما احتمال أن ينتظر شخص: أ) أقل من 10 دقائق ؟ ب) أكثر من 30 دقيقة ؟
2. ما هو معدل زمن الانتظار ؟

التمرين الرابع:

تقدر شركة لإنتاج الشاحنات بأن مدة صلاحية الشاحنة (مقدرة بالسنوات) هي متغير عشوائي (X) يتبع قانونا أسيا. علما أن معدل مدة الصلاحية هو 14 سنة.

المطلوب:

1. حدد تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X).

2. أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية شاحنة أكبر من 20 سنة.

التمرين الخامس:

تخضع أوزان عبوات إحدى أنواع الحلوى لتوزيع طبيعي وسطه 85 غ وانحرافه المعياري 2,5 غ.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن وزن إحدى العبوات الذي اخذته عشوائيا تزيد عن 90 غ؟
2. ما هو احتمال أن وزن أحد العبوات التي أخذتها عشوائيا تقل عن 82 غ.

التمرين السادس:

تخضع تكاليف الولادات الطبيعية في المستشفيات في بلد ما لتوزيع طبيعي وسطه 115 دينارا وتباينه 49 دينارا.

المطلوب: ما هو احتمال أن تكون تكاليف إحدى الولادات الطبيعية ما بين 104، و122 دينارا؟

التمرين السابع:

إذا كانت نسبة الإصابة بمرض الأنفلونزا في إحدى المدن في فصل الشتاء هي: 60%. تم اختيار 60 شخص من هذه المدينة.

المطلوب: ما احتمال أن يكون:

1. 7 أشخاص مصابون بالأنفلونزا؟
2. جميعهم أصحاء؟ جميعهم مرضى؟
3. نصفهم مرضى؟

التمرين الثامن:

بينت الإحصائيات أنه في المتوسط تقع في منطقة ما 10 هزات أرضية كل سنة.

المطلوب:

1. ما احتمال تسجيل 3 هزات في سنة ما؟
2. أحسب احتمال تسجيل أكثر من 5 هزات في سنة ما؟
3. أحسب احتمال تسجيل 4 هزات في شهر ما.

4. بين نفس الإحصائيات أن 10% فقط من هذه الهزات تعتبر هزات عنيفة:
   أ) أحسب احتمال تسجيل أكثر من هزتين عنيفتين في سنة واحدة؟
   ب) أحسب احتمال تسجيل أقل من 3 هزات عنيفة في شهر واحد؟

التمرين التاسع:

تصل حافلة نقل المسافرين للمحطة على التتابع كل 20 دقيقة بدءا من الساعة 6 صباحا، فإذا علمت بوصول أحد الركاب لتلك المحطة خلال أول 40 دقيقة عمل لتلك الحافلات والتي يخضع وقت الوصول فيها للتوزيع المنتظم المستمر.

المطلوب:

1. تحديد احتمال انتظار الشخص الواصل أقل من 5 دقائق فيصعد فيه.
2. تحديد احتمال انتظار الشخص الواصل أكثر من 15 دقيقة لتصل الحافة فيصعد فيها.

التمرين العاشر:

ليكن (X) متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في السنة، حيث: $\boldsymbol{x} \rightarrow \lambda(\mathbf{1})$

المطلوب:

1. حدد مجال التعريف والتوزيع الاحتمالي.
2. أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.
3. أحسب الاحتمالات التالية: $P(X=2)$، $P(X>2)$ ، $P(2<X<5)$.

التمرين الحادي عشر:

يصوب شخص نحو هدف معين، ويستمر في التصويب حتي يصيب الهدف للمرة الأولى، فإذا كان احتمال إصابة الهدف في كل مرة هو 0,65.

المطلوب:

1. حساب احتمال أن يحتاج إلى 3 محاولات لإصابة الهدف.
2. حساب احتمال أن يحتاج إلى 5 محاولات على الأقل لإصابة الهدف.
3. حساب احتمال إصابة الهدف قبل المحاولة العاشرة.

التمرين الثاني عشر:

إذا كانت مدة الانتظار التي يعبر عنها بالمتغير العشوائي (X) والتي يقضيها المواطن أمام شباك لسحب راتبه من الحساب يخضع للتوزيع الأسي بمتوسط 15 قيقة.

المطلوب:

1. أوجد تابع الكثافة الاحتمالية والتوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع.
2. ما هو احتمال أن يقضي المواطن مدة انتظار تقل عن 10 دقائق.
3. ما احتمال مدة انتظار المواطن على الأقل 15 دقيقة علما أنه انتظر 10 دقائق على الأقل.

التمرين الثالث عشر:

تقوم شركة أدوية بإنتاج صنف من الأدوية الخطيرة وعليه تشترط الشركة في مراقبة جودة منتوجها أن يكون عدد العبوات المعيبة والتي يكون فيها تركيز الدواء أكثر من المسموح به أقل من 5 عبوات من بين 1000 عبوة.

فإذا كان احتمال أن تنتج الآلة عبوة معيبة يساوي 0,0002 وتم اختيار عينة من 1000 عبوة تم إنتاجها.

المطلوب: ما هو احتمال أن تقبل العينة؟

التمرين الرابع عشر:

تشير الإحصائيات المتوفرة إلى أن 4% من الأطفال يكتبون باليد اليسرى، أخذت عينة عشوائية حجمها 400 طفل.

المطلوب:

1. ما هي طبيعة التوزيع الاحتمالي المتبع من طرف هذه الظاهرة؟
2. ما احتمال أن نجد 14 طفلا يكتبون باليد اليسرى؟
3. ما احتمال أن نجد أقل من 14 طفلا يكتبون باليد اليسرى؟
4. ما احتمال أن نجد ما بين 12 طفلا و18 طفلا يكتبون باليد اليسرى؟

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

1. المراجع العربية:

- **الكتب:**

- أمير حنا هرمز، الإحصاء الرياضي، دار ابن الأثير للطباعة والنشر، العراق، 1990.
- جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، ط1، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن، 2011.
- جلال مصطفى الصياد، نظرية الاحتمالات، ط 6، دار حافظ للنشر والتوزيع، المملكة العربية السعودية، 2008.
- جيلالي جلاطو، نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية، دار هومة للطباعة والنشر، الجزائر، 2014.
- دلال القاضي وآخرون، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2003.
- السعدي رجال، نظرية الاحتمالات –التحليل التوافقي والمبادئ الاحتمالية، ج 3، دار البعث، دون سنة نشر.
- السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ج1، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، 2005، الجزائر.
- سيمون ليبشتز، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، ترجمة سماح داود، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2003.
- كمال فليفل وفتحي حمدان، الإحصاء، ط 1، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، 2006.
- مبارك اسبر ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، منشورات جامعة تشرين، سورية، 2008.
- محمد صبحي أبو صالح، الطرق الإحصائية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2000.
- موراي شبيجل، الإحصاء، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، ط1، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.
- موساوي عبد النور، يوسف بركان، الإحصاء، 2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010.

قائمة المراجع

- **المطبوعات الجامعية:**

- إدريس عبدلي، مطبوعة بعنوان: دروس مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء 2، جامعة البليدة، الجزائر، 2019/2018.
- بوبلوطة بلال، مطبوعة بعنوان: نظريات وتمارين محلولة في الاحتمالات، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
- بوعبد الله صالح، مطبوعة بعنوان: محاضرات في الإحصاء الرياضي، جامعة المسيلة، الجزائر، 2008.
- عبد الحميد قطوش، مطبوعة بعنوان: الإحصاء 2، جامعة المسيلة، الجزائر، 2019/2018.
- العمري علي، حيدوشي عاشور، وعيل ميلود، مطبوعة بعنوان: الإحصاء 2، جامعة البويرة، الجزائر، 2020/2019.
- موسي عبد الناصر، مطبوعة بعنوان: دروس في الإحصاء الوصفي، جامعة بسكرة، الجزائر، 2007/2006.

3. المراجع الأجنبية:

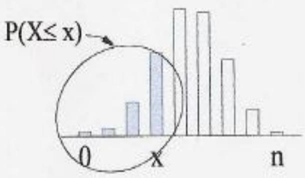
- Bernard Verlant, Statistiques et Probabilités : Manuel de cours, Exercices corrigés – Sujets d’examens, BERTI Editions, Alger, 2008.
- Chamoun Chamoun, Elements de statistiques et la probabilités, OPU, Alger, 2010.
- Dress. F, Les Probabilités et La Statistique, Edition DUNOD, France, 2012.
- Ghorbanzadeh. D, Probabilités : Exercices Corriges, Edition Technip, france, 1998.
- Khaldi Khaled, Probabilités, OPU, Algérie, 2005.
- Rachid Souidi, Statistique inférentielle, OPU, Alger, 1999.
- Sheldon Ross, Introduction to Probability Models, Tenth Edition, Academic Press is an Imprint of Elsevier, 2010.

الملاحق

الملحق رقم (1): جدول توزيع ثنائي الحدين

Table de la variable aléatoire Binomiale

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$
pour $X \sim Bi(n,p)$



p		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=5	x											
	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0312	0,0102	0,0024	0,0010	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0156	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,1035	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,3672	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,7627	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=10	x											
	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0035	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0197	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0781	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,2241	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,4744	0,3222	0,0702
	8		1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,7560	0,6242	0,2639
	9		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,9437	0,8926	0,6513
	10				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=15	x											
	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000				
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000			
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000		
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0001	0,0000	
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0008	0,0001	
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0042	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0173	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0566	0,0181	0,0003
	9		0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,1484	0,0611	0,0022
	10		1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,3135	0,1642	0,0127
	11		1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,5387	0,3518	0,0556
	12			1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,7639	0,6020	0,1841
	13				1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,9198	0,8329	0,4510
	14					1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9866	0,9648	0,7941
	15						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=20	x											
	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000					
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000					
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000				
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000				
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000			
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000		
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0002	0,0000	
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0009	0,0001	
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0139	0,0026	0,0000
	11		0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0409	0,0100	0,0001
	12		1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,1018	0,0321	0,0004
	13		1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,2142	0,0867	0,0024
	14			1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,3828	0,1958	0,0113
	15				1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,5852	0,3704	0,0432
	16					1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,7748	0,5886	0,1330
	17					1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,9087	0,7939	0,3231
	18						1,0000	0,9995	0,9924	0,9757	0,9308	0,6083
	19						1,0000	1,0000	0,9992	0,9968	0,9885	0,8784
	20							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=25	x											
	0	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000						
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000					
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000					
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000				
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000				
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001				
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000			
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000			
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000		
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000	
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0002	0,0000	
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0009	0,0001	
	12		0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0034	0,0004	
	13		0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0107	0,0015	0,0000
	14		1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0297	0,0056	0,0000
	15		1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0713	0,0173	0,0001
	16			1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,1494	0,0468	0,0005
	17				1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,2735	0,1091	0,0023
	18				1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,4389	0,2200	0,0095
	19					0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,6217	0,3833	0,0334
	20					1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,7863	0,5793	0,0980
	21					1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,9038	0,7660	0,2364
	22						1,0000	0,9996	0,9910	0,9679	0,9018	0,4629
	23						1,0000	0,9999	0,9984	0,9930	0,9726	0,7288
	24							1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9282
	25							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

الملحق رقم (2): جدول توزيع بواسون

Tables of the Poisson Cumulative Distribution

The table below gives the probability of that a Poisson random variable X with mean = λ is less than or equal to x. That is, the table gives

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!}$$

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الملحق رقم (3): جدول التوزيع الطبيعي المعياري

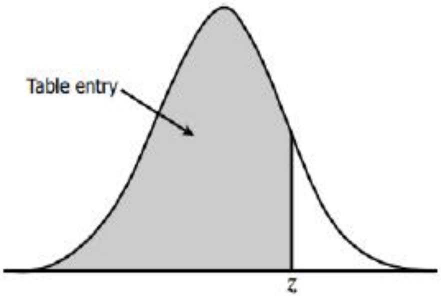
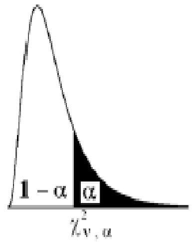


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

الملحق رقم (4): جدول توزيع كاي مربع



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v,\alpha}$

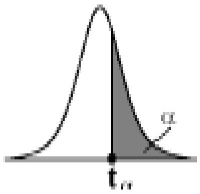
$P(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

الملحق رقم (5): جدول توزيع ستيودنت

Percentage Points of the t Distribution; $t_{v,\alpha}$

$P(T > t_{v,\alpha}) = \alpha$

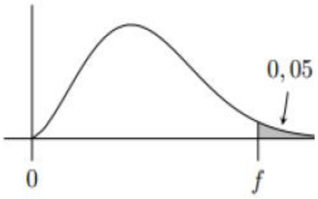


	α													
v	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0005
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

الملحق رقم (6): جدول توزيع فيشر

Valeurs de f telles que $\mathbb{P}[F \geqslant f] = 0,05$

où F suit la loi de Fisher-Snedecor à ν_1, ν_2 degrés de liberté
ν_1 : nombre de ddl du numerateur
ν_2 : nombre de ddl du denominateur



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20	22	24	25
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,67	8,66	8,65	8,64	8,63
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,79	5,77	5,77
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,54	4,53	4,52
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,86	3,84	3,83
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,43	3,41	3,40
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,11
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,92	2,90	2,89
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,80	2,77	2,75	2,74	2,73
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,63	2,61	2,60
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,52	2,51	2,50
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42	2,41
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,37	2,35	2,34
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,28
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,25	2,24	2,23
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,18
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,17	2,15	2,14
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,18	2,16	2,13	2,11	2,11
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,05
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,05	2,03	2,02
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	2,02	2,01	2,00
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,96
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,94
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,00	1,97	1,95	1,93	1,92
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,91
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,97	1,94	1,92	1,90	1,89
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,88
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	2,03	2,00	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,87
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,85
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,93	1,90	1,87	1,85	1,84
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,83
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99	1,96	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,82
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,95	1,93	1,90	1,87	1,85	1,82	1,81
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02	2,00	1,97	1,95	1,93	1,89	1,86	1,84	1,82	1,81
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,80
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,98	1,95	1,93	1,91	1,88	1,85	1,82	1,80	1,79
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94	1,92	1,90	1,86	1,83	1,81	1,79	1,78
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80	1,78	1,77
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,85	1,82	1,79	1,77	1,76
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,92	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97	1,94	1,91	1,89	1,87	1,83	1,80	1,78	1,76	1,75
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96	1,93	1,91	1,88	1,86	1,83	1,80	1,77	1,75	1,74
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,86	1,82	1,79	1,77	1,75	1,74
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85	1,82	1,79	1,76	1,74	1,73
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,73
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,85	1,83	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,78	1,75	1,72	1,70	1,69
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90	1,87	1,85	1,82	1,80	1,76	1,73	1,71	1,69	1,68
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81	1,79	1,75	1,72	1,70	1,67	1,66
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88	1,85	1,83	1,80	1,78	1,74	1,71	1,69	1,66	1,65