يوم : 2023/05/21

# الاجابة النموذجية لامتحان الدورة العادية في مقياس السلاسل الزمنية2

## التمرين الاول:7ن

1

3.75

$$Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \zeta_t = \emptyset_0 + \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, Y_{t-i} + \zeta_t$$

ومنه: $E(Y_t) = \emptyset_0 + \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, E(Y_{t-i}) + E(\zeta_t)$ . ولدينا:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-i}) = \mu \qquad i = 1-2$$

اذن :

$$\mu = \emptyset_0 + \mu \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i \Longrightarrow \emptyset_0 = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\right)$$

$$\therefore \quad Y_t = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\right) + \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, Y_{t-i} + \zeta_t$$

من العلاقة الاخيرة نجد انّ:

$$(Y_t - \mu) - \sum_{i=1}^{p} \emptyset_i\, (Y_{t-i} - \mu) = \zeta_t \qquad \ldots..(1)$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في $(Y_{t-k} - \mu)$ وناخذ الامل الرياضي؛ اي:

$$E[(Y_{t-k} - \mu)(Y_t - \mu)] - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, E[(Y_{t-k} - \mu)(Y_{t-i} - \mu)] = E[(Y_{t-k} - \mu)\zeta_t]$$

مع العلم انّ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

الصيغة الاخيرة يمكن كتابتها باستعمال التغاير كالاتي:

$$\gamma_k - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_{k-i} = E[(Y_{t-k} - \mu)\zeta_t]$$

مع العلم انّ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

ونحل هذه العلاقة تكراريا فنجد:

$$k = 0 \Longrightarrow \gamma_0 - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_i = E[(Y_t - \mu)\zeta_t] \qquad \ldots\ldots.(2)$$

الطرف الايمن للعلاقة (2) هو:

$$E[(Y_t - \mu)\zeta_t] = E[\emptyset_0 \zeta_t + \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, Y_{t-i}\zeta_t + \zeta_t\zeta_t - \mu\zeta_t]$$

بالنشر نجد:

$$E[(Y_t - \mu)\zeta_t] = E(\zeta^2) = \sigma_\zeta^2$$

اذا:(*)

$$\gamma_0 - \sum_{i=1}^{p} \emptyset_i\, \gamma_i = \sigma_\zeta^2 \Longrightarrow \gamma_0 = var(Y_t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{1 - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i \rho_i}$$

ومن اجل $k = 1$ لدينا:

$$\gamma_1 - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_{1-i} = E[(Y_{t-1} - \mu)\zeta_t] \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$E[(Y_{t-1} - \mu)\zeta_t] = E[Y_{t-1}\zeta_t] - \mu E[\zeta_t] = 0 - 0 = 0$$

ويمكن الوصول الى العلاقة الموالية رقم (4) واثباتها ايضا من اجل $k = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

$$\gamma_k - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_{k-i} = E[(Y_{t-k} - \mu)\zeta_t] = 0 \qquad \ldots\ldots.(4)$$

كالاتي:

$$\gamma_k - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_{k-i} = E[(Y_{t-k} - \mu)\zeta_t] = E[Y_{t-k}\zeta_t] - \mu E[\zeta_t] = 0 - 0 = 0$$

من العلاقة (4) لدينا :

$$\gamma_k - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \gamma_{k-i} = 0 \qquad \ldots\ldots..(5)$$

الان يمكن قسمة العلاقة (5) على $\gamma_0$ فنجد:

$$\rho_k - \sum_{i=1}^{2} \emptyset_i\, \rho_{k-i} = 0 \qquad \ldots\ldots.(6)$$

بتعويض قيم $\rho_1$ و $\rho_2$ في (*) نجد:

$$var(Y_t) = \sigma_\zeta^2 \Big/ \left(1 - \frac{\emptyset_1^2}{1-\emptyset_2} - \emptyset_2\frac{\emptyset_1^2}{1-\emptyset_2} - \emptyset_2^2\right)$$

بضرب البسط والمقام للجزء الايمن للعلاقة الاخيرة في $(1 - \emptyset_2)$ نجد:

$$var(Y_t) = \frac{(1-\emptyset_2)\sigma_\zeta^2}{(1-\emptyset_2) - \emptyset_1^2 - \emptyset_1^2\emptyset_2 - \emptyset_2^2\,(1-\emptyset_2)}$$ و هو المطلوب

| | | |
|---|---|---|
| 1.25 | شرط الامتساخ يضمن عدم امتساخ النموذج الى نموذج اقل درجة؛ بمعنى اذا كان النموذج ARMA(1,1)؛ فهذا الشرط يضمن أن لا يمتسخ النموذج الى ARMA(0,0) | 2 |
| 1 | بحيث: $\emptyset_{kj} = \emptyset_{(k-1,j)} - \emptyset_{kk}\emptyset_{(k-1,k-1)}$ <br> $\emptyset_{11} = \rho_1$ <br> $\emptyset_{kk} = \dfrac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1}\emptyset_{(k-1,j)}\rho_{(k-j)}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\emptyset_{(k-1,j)}\rho_j}$ | 3 |
| 1 | $\rho_{(3)} = \dfrac{-\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$ <br> $\rho_{(k)} = 0 \qquad ; k \geq 4$ <br> $\rho_{(1)} = \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$ <br> $\rho_{(2)} = \dfrac{-\theta_2+\theta_1\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$ | 4 |

## التمرين الثاني (4نقاط):

| $y_t y_{t-2}$ | $y_t y_{t-1}$ | $y_{t-1}y_{t-2}$ | $y_{t-2}^2$ | $y_{t-1}^2$ | $y_{t-2}$ | $y_{t-1}$ | $y_t$ | $Y_t$ | الايام |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | - | - | - | - | - | - | -6,4286 | 10 | 1 |
| - | - | - | - | - | - | -6,4286 | -1,4286 | 15 | 2 |
| -22,9593 | -5,1021 | 9,1839 | 41,3269 | 2,0409 | -6,4286 | -1,4286 | 3,5714 | 20 | 3 |
| 2,0409 | -5,1020 | -5,1021 | 2,0409 | 12,7549 | -1,4286 | 3,5714 | -1,4286 | 15 | 4 |
| -22,9590 | 9,1839 | -5,1021 | 12,7549 | 2,0409 | 3,5714 | -1,4286 | -6,4286 | 10 | 5 |
| -5,1021 | -22,9593 | 9,1839 | 2,0409 | 41,3269 | -1,4286 | -6,4286 | 3,5714 | 20 | 6 |
| -55,1023 | 30,6120 | -22,9591 | 41,3269 | 12,7549 | -6,4286 | 3,5714 | 8,5714 | 25 | 7 |
| -104,082 | 6,6325 | -14,7955 | 99,4905 | 70,9185 | - | - | 0 | 115 | مجموع |
| | | | | | | | | | الجدول على 2.25 نقطة |

$$\overline{Y} = 16,4286$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=3}^{7} y_t y_{t-2}\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}y_{t-2} - \sum_{t=3}^{7} y_t y_{t-1}\sum_{t=3}^{7} y_{t-2}^2}{\left(\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}y_{t-2}\right)^2 - \sum_{t=3}^{7} y_{t-2}^2\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}^2} \cong -0.1285$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{7} y_t y_{t-1}\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}y_{t-2} - \sum_{t=3}^{7} y_t y_{t-2}\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}^2}{\left(\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}y_{t-2}\right)^2 - \sum_{t=3}^{7} y_{t-2}^2\sum_{t=3}^{7} y_{t-1}^2} \cong -1.0653$$

$$\hat{\phi}_0 = \overline{Y}\left(1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_1\right) = 16,4286(1 + 0.1285 + 1.0653) \cong 36.0411$$

$$Y_t = 36.0411 - 0.1285Y_{t-1} - 1.0653Y_{t-2} + \zeta_t$$

## التمرين الثالث (4نقاط)

| | | |
|---|---|---|
| 1.5 | الصيغة المختصرة: $\vec{Y}_t = \vec{\phi}_0 + A\vec{Y}_{t-1} + \vec{\zeta}_t$ <br> باستخدام المصفوفات: $\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | 1 |
| 2.5 | $det[A - \lambda I] = det\begin{bmatrix} 0.5-\lambda & 0.3 & 0.2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 0.5\lambda^2 + 0.3\lambda + 0.2 = 0$ <br> بالملاحظة نجد 1 جذر لكثير الحدود المميز ومنه يمكن كتابة الطرف الايسر لهذه المعادلة على الشكل $(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1})(a\lambda^2 + b\lambda + c)$، وبالمطابقة نجد: $a = -1, b = -0.5, c = -0.2$ ، ومنه جذور $-\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.2 = 0$ (بحيث $\Delta = -\mathbf{0.55}$ ) هي: $\frac{\mathbf{0.5 \mp i\sqrt{0.55}}}{\mathbf{-2}}$ . ومنه النموذج غير مستقر (لابد ان تكون كل الجذور طويلتها اقل من الواحد) | 2 |

## التمرين الرابع (5نقاط)

| $X_t^2$ | $\hat{u}_i^2$ | $\hat{u}_t = Y_t - w_t$ | $w_t = \hat{\alpha} + \hat{B}X_t$ | $x_t y_t$ | $x_t^2$ | $x_t$ | $y_t$ | $\hat{Y}_t = X_t$ | $Y_t$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 47,61 | 0,0448 | -0,2116 | 7,2116 | 0,072 | 0,0324 | -0,18 | -0,4 | 6,9 | 7 | $\bar{Y} = 7.4$ |
| 23,04 | 0,0002 | -0,0136 | 5,0136 | 5,472 | 5,1984 | -2,28 | -2,4 | 4,8 | 5 | |
| 64 | 0,4058 | 0,637 | 8,363 | 1,472 | 0,8464 | 0,92 | 1,6 | 8,0 | 9 | $\bar{X} = 7.08$ |
| 98,01 | 0,1237 | -0,3517 | 10,3517 | 7,332 | 7,9524 | 2,82 | 2,6 | 9,9 | 10 | |
| 33,64 | 0,0036 | -0,0603 | 6,0603 | 1,792 | 1,6384 | -1,28 | -1,4 | 5,8 | 6 | |
| 266,3 | 0,5781 | -0.0002 | | 16.4 | 15,668 | 0 | 0 | 35.4 | 37 | المجموع |
| | | | | | | | | | | الجدول على 3 نقطة |

اولا: نقدر $Y_i = \alpha + B\hat{Y}_i + u$:

$$\hat{B}_0 = \frac{\sum(y_i)(x_i)}{\sum(x_i)^2} = \frac{16.4}{15.668} \cong 1.0467, \hat{\alpha}_0 = \bar{Y} - \hat{B}\ \ \bar{X} \cong -0.0106$$

ثانيا:تقدير $s = \sqrt{\frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}} = 0.439$

ثالثا: تقدير $S_{\hat{\alpha}_0} = \sqrt{\frac{s^2 \sum X^2}{n \sum x^2}} = 0.8187$ , $S_{\hat{B}} = \sqrt{\frac{(s)^2}{\sum x^2}} = 0.1109$

رابعا:اختبار الفرضيات الصفرية: $B = 1\ ,\ \alpha = 0$ علما أنّ $t_{\text{الجدولية}}$=3.1824 عند $\alpha = 0,05$ ودرجة حرية 3

بالنسبة لـــ B: $t_{\hat{B}} = \frac{\hat{B}\ -1}{S_{\hat{B}}} = 0.4211$ ومنه $\hat{B}$ تختلف معنويا عن الواحد ومنه النموذج ليس ذو دقة عالية في التنبؤ.