

Corrigés type de Mathématique I

exo 1 008

Part I

$$V_n = \frac{n(-1)^n + 1}{2n(-1)^n + 3} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{on a: } V_n &= \frac{n(-1)^n + \frac{1}{n}}{n(2(-1)^n + \frac{3}{n})} \\ &= \frac{(-1)^n \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]}{(-1)^n \left[2 + \frac{3}{n}(-1)^n \right]} \end{aligned}$$

Comme la suite $(-1)^n$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-1)^n}{n} = 0$$

$$\text{Par suite} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{2}$$

Partie II

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = (U_n + 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Soit (P_n) : $1 < U_n < 2$

En utilisant le raisonnement par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

* pour $n=0$ par hypothèse on sait que $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ ①

* Supposons que (P_n) est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$ et prouvons que $P(n+1)$ l'est aussi ($1 < U_{n+1} < 2$). ②

comme $1 < u_n < 2$

$$\Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \text{ ou } 0 < (u_n - 1)^2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2$$

c-à-d P_{n+1} est aussi vraie

Par le principe de récurrence, on déduit que (P_n) est vraie pour

tout $n \in \mathbb{N}$ c-à-d : $1 < u_n < 2$. O.K.

② Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_{n+1} - u_n &= (u_n - 1)^2 + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 1)(u_n - 2) \end{aligned}$$

J.1.

D'après question ①) $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 < 0$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \text{ d'où } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement}$$

0,25

décroissante.

③ Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1 et strictement

décroissante alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l tel que l

0,75

$$\text{Vérifie } l = (l - 1)^2 + 1$$

$$l^2 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow l = 1 \text{ ou } l = 2$$

Comme le premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
alors $l = 1$. J.1.

Exo 2 partie I

$a \in \mathbb{R}$, f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \overset{0,87}{\int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} dx} + \overset{0,13}{\int_0^1 \frac{1+a}{2} dx} \\ &= \frac{1-a}{2} \int_{-1}^0 1 dx + \frac{1+a}{2} \int_0^1 1 dx \\ &= \frac{1-a}{2} [x]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} [x]_0^1 \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = \underset{0,6}{1} \end{aligned}$$

Corrigé type et Mathématique

exo 2: Partie II

les solutions homogènes $y_h(m) = C e^{3m}$ 0,8 ✓

et pour la solution particulière de type

$$y_p(m) = A \sin(3m) + B \cos(3m) + D \sin(2m) + E \cos(2m)$$

avec A, B, D, et E à déterminer 0,1 ✓

Pour les trouver on va substituer $y_p(m)$ dans l'éq

$$3A \cos(3m) - 3B \sin(3m) + 2D \cos(2m) - 2E \sin(2m) = 0,1 \checkmark$$

$$3A \sin(3m) + 3B \cos(3m) + 3D \sin(2m) + 3E \cos(2m) + \sin(3m) + \sin(2m)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} 3A - 3B = 0 \\ -3A - 3B - 1 = 0 \\ 2D - 3E = 0 \\ -2E - 3D - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \\ D = -\frac{3}{13} \\ E = -\frac{2}{13} \end{cases} \quad 0,2 \times 4$$

$$\text{Donc } y(m) = C e^{3m} - \frac{1}{6} \sin(3m) - \frac{1}{6} \cos(3m) - \frac{3}{13} \sin(2m) - \frac{2}{13} \cos(2m)$$

$$\text{tel que } y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = C e^0 - \frac{1}{6} - \frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{25}{78} \Rightarrow C = \frac{25}{78} \quad 0,1 \checkmark$$

Donc la solution unique est

$$y(m) = \frac{25}{78} e^{3m} - \frac{1}{6} \sin(3m) - \frac{1}{6} \cos(3m) - \frac{3}{13} \sin(2m)$$

exp3
 $f(x) = (x-1)e^{-2x}$

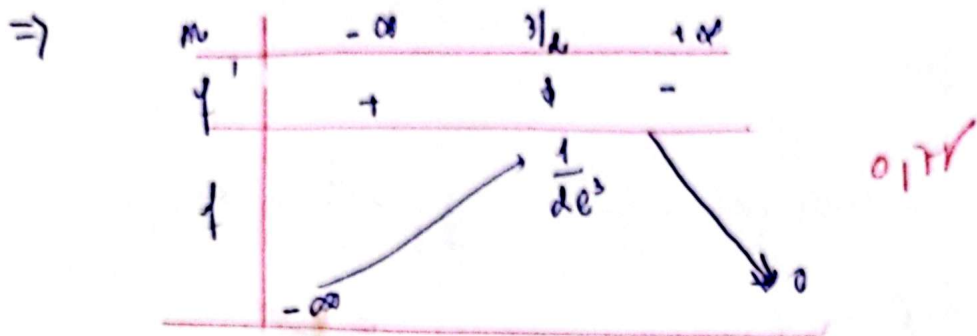
$$D_p = 1P_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f = 0$$

0, 25 12

$$2) \quad f'(z) = (3-2z) e^{-2z} \quad 0,25$$



$$\Rightarrow f(n) = 1 \Rightarrow (n-1)e^{-ln} - 1 = 0$$

Donc f est strictement croissant sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$

et strictement décroissant sur $[3/2, +\infty[$

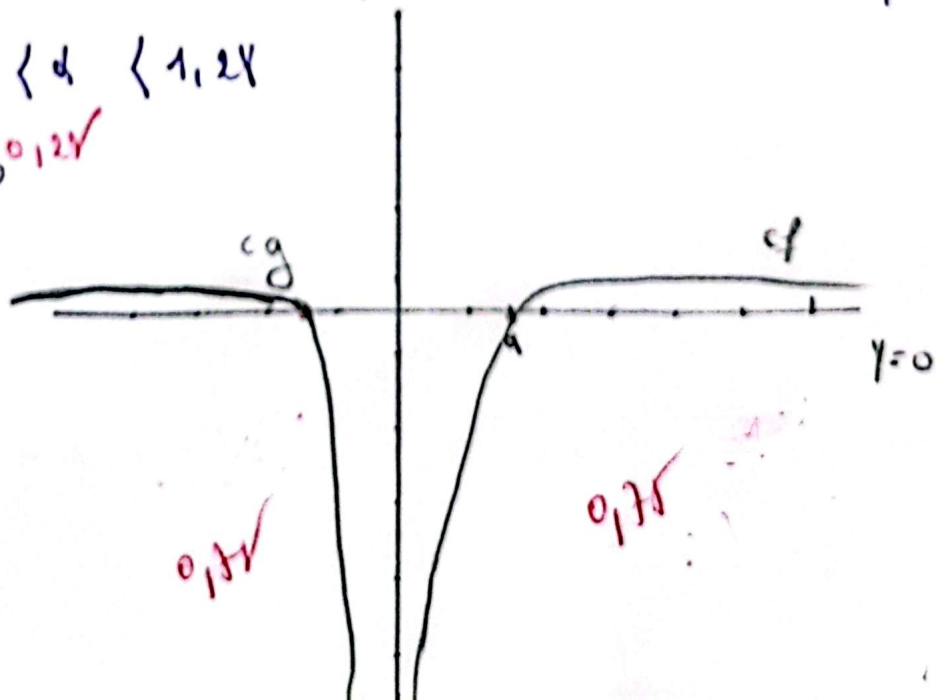
$$\Delta f(1,27) = -0,917, \quad f(1,27) - 1 = 0,917 \quad 0,2512$$

$$f(1,27) \vee f(1,28) < 0$$

also d'après le théorème de croissance, $f(x)$ a une solution unique y

$$t_q(1,2) \leq d(1,2)$$

③ (cf) $\gamma = 0.12 \checkmark$



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$|g(m)| = (|m| + 1) e^{-2|m|}$$

① g est paire

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad g(-m) = (|-m| + 1) e^{-2|-m|} \\ = g(m)$$

donc g est paire

② D'après les questions précédentes (g) est symétrique par rapport à l'axe des y