التمرين الأول:

تبسيط العبارة

• $2ch^2(x) - sh(2x) = 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

1 $= e^{-2x}+1$

• $x - \ln(ch(x)) - \ln 2$ 1

$= x - \ln(e^x+e^{-x}) + \ln 2 - \ln 2$

$= x - \ln(e^x+e^{-x})$

$= \ln e^x - \ln(e^x+e^{-x})$

$= -\ln(1+e^{-2x})$

ومنه:

$$F = \frac{-(e^{-2x}+1)}{\ln(1+e^{-2x})}$$

حساب النهايات:

نضع $t = 1+e^{-2x}$

• $x \to +\infty \Rightarrow t \overset{>}{\to} 1$ 1

$\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 1} \frac{-t}{\ln t} = -\infty$

• $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$ 1

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-t}{\ln t} = -\infty$

التمرين الثاني:

① حل المعادلة $y'\ln 2 + y = \ln 8$

-(P)

$\Leftrightarrow y' + \frac{1}{\ln 2} y = \frac{\ln 8}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow y' + \frac{1}{\ln 2} y = \frac{\ln 2^3}{\ln 2} = \frac{3\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}$

$\Leftrightarrow y' + \frac{1}{\ln 2} y = 3$ 0,5

بما أنها معادلة من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة نحلها العام هو

1,5

$y = k e^{-\frac{x}{\ln 2}} + 3\ln 2$

② - تحديد الحل الذي يحقق $y(\ln 2) = \frac{1}{e}$

$\frac{1}{e} = k e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2}} + 3\ln 2$ 0,5

$\Leftrightarrow 1 = k + 3e\ln 2$

$\Leftrightarrow k = 1 - e\ln 8$ ~~1,5~~

وبالتالي

$y(x) = (1 - e\ln 8) e^{-\frac{x}{\ln 2}} + \ln 8$

0,5

② - لإيجاد المعادلة التفاضلية من النوع $y' = ay + b$ حتى يكون y حلا لها نستعمل طريقة المطابقة إعتمادا على المعادلة نعلم أن حلها يكتب من الشكل

0,5

$y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$

بالمطابقة نجد $a=-\sqrt{2}$ 0,75

و $-\frac{b}{a}=-\sqrt{2}$

إذن $b=-2$ 0,75

ومنه فيمكن كتابة المعادلة حيث

$$y'=-\sqrt{2}\,y-2$$

التمرين الثالث:

1):

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$$ 0,5 0,5

$$=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}$$ 1

2): إيجاد α و β و μ

$$\mu\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix}8\mu+\beta&4\mu+2\alpha&4\mu+2\alpha\\4\mu+2\alpha&8\mu+\beta&4\mu+2\alpha\\4\mu+2\alpha&4\mu+2\alpha&8\mu+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 0,5

$$\begin{cases}8\mu+\beta=0\\4\mu+2\alpha=0\end{cases}$$ 1

$8\mu=-\beta \Rightarrow \boxed{\mu=\left(-\frac{1}{8}\right)\beta}$ 0,5

ومنه

$4\mu+2\alpha = -\frac{1}{2}\beta+2\alpha=0$

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{4}\beta}$$ 0,5

وبالتالي معادلتين بثلاث مجاهيل تقبل مالانهاية من الحلول 1,5

3) -

$$-\frac{1}{8}A^2+\frac{1}{4}A+I=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}A^2+\frac{1}{4}A=-I$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{8}A^2-\frac{1}{4}A=I$$ 0,75

ومنه

$$A\left(\frac{1}{8}A-\frac{1}{4}I\right)=I$$ 1

$$\left(\frac{1}{8}A-\frac{1}{4}I\right)A=I$$ 1

ومنه فإن A قابلة للقلب ومقلوبها هو 0,25

$$A^{-1}=\frac{1}{8}A-\frac{1}{4}I$$ 1