Université Larbi Ben M'Hidi de Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences et des sciences appliquées

Département de Génie Civil

3ème année Licence Génie Civil

Année universitaire : 2019– 2020

Module : Béton armé II

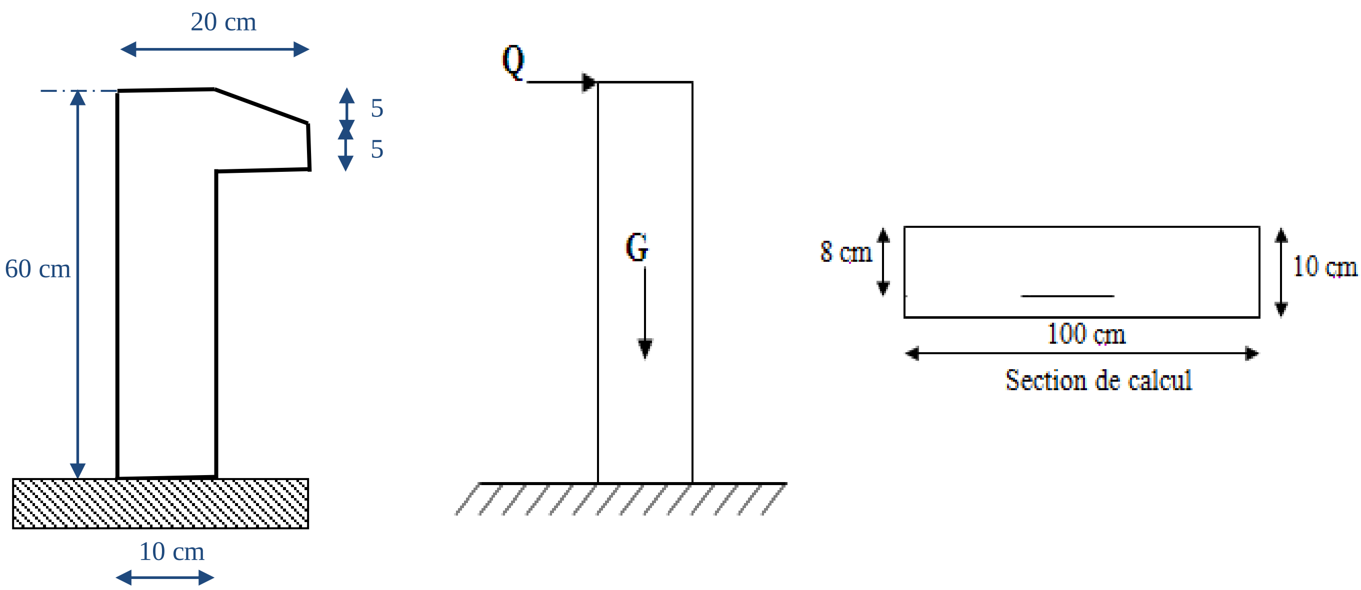
SERIE N°(7) : Flexion composée

Exercice N°(1) :

Soit un élément vertical (acrotère) soumis à son poids propre et l'effet de la main courante (Q = 1 KN/m) comme le montre la figure ci-dessous :

On demande de calculer les sections d'armatures à l'ELU et de vérifier les contraintes à l'ELS si la fissuration est considérée nuisible.

Béton : f_{c28} = 25 MPa   Acier : Fe E400 (Type I)



Exercice N°(2) :

Soit une section rectangulaire en béton armé, de dimensions 40 x 90 cm soumise à une combinaison d'efforts :

A l'ELU ; Mu = 250 KN.m et **Nu = 6000 KN (compression)**

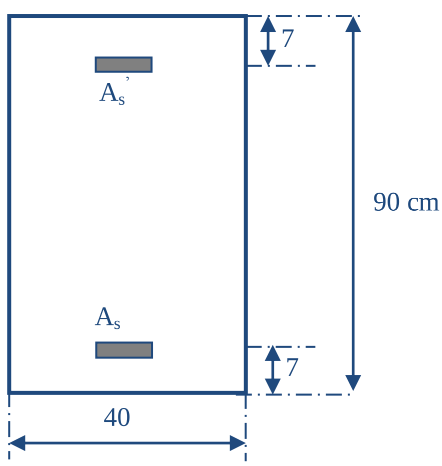
A l'ELS ; Mser = 175 KN.m et **Nser = 4100 KN (compression)**

On demande de calculer les sections d'armatures à l'ELU et de vérifier les contraintes à l'ELS.

On donne :

Béton : f_{c28} = 25 MPa

Acier : Fe E400 (Type I)



Solutions :

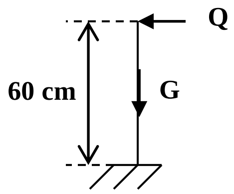
Exercice N° (1) :
1. Evaluation des efforts internes :

- **Calcul de l'effort normal :**

Poids propre : G = 25 x (0,1 x 0,6 + 0,1 x 0,05 + 0,5 x 0,1 x 0,05) x 1 = 1,6875 KN

Puisque le poids propre est une force de compression stabilisatrice ⇒ $N_u = N_{ser}$ = 1,6875 KN.

- **Calcul de moment fléchissant :**



Q = 1 KN/ml.

M_u = 1,5 Q. h = 1,5 x 1 x 0,6 → M_U = 0,9 KN.m

M_{ser} = Q h = 1 x 0,6 → M_{SER} = 0,6 KN.m

L'acrotère travaille à la flexion composée avec compression. Les sections soumises à un effort normal de compression doivent être justifiées vis-à-vis de l'état limite de stabilité de forme, lorsque $l_f / h \leq \max(15\ ;\ 20(e_1 + e_a) / h)$, elle peut être vérifiée uniquement en flexion composée en remplaçant l'excentricité réelle par une excentricité totale de calcul : $e_{tot} = e_1 + ea + e_2$

- e_1 : excentricité (dite du premier ordre), de la résultante des contraintes normales

$$e_1 = \frac{MU}{NU} = \frac{0,9}{1,6875} = 0,533 \text{ m}$$

- e_a : excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques initiales (après exécution) :

$$e_a = \max\left\{2cm; \frac{l}{250}\right\} \Rightarrow e_a = \max\{2cm; 0,24cm\} \Rightarrow e_a = 2cm = 0,02m$$

$l_f / h \leq \max(15\ ;\ 20(e_1 + e_a) / h$

$l_f = 2l_0 = 2 \times 0,6 = 1,2$ m

$$\rightarrow \frac{l_f}{h} = \frac{1,2}{0,1} = 12 \prec \max(15\ ;\ 20(0,533+0,02)/0,1) = 110,6 ....OK$$

- e_2 : excentricité due aux effets de second ordre, liés à la déformation de la structure

$$e_2 = \frac{3{l_f}^2}{10000h}(2+\alpha\phi)$$

ϕ : Le rapport de la déformation finale due au fluage à la déformation instantanée sous la charge considérée ; ce rapport est généralement pris égal à 2.

$$\alpha = \frac{M_G}{M_G + M_Q} \qquad / M_G = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Donc ; $e_2 = \frac{3\times1,2^2}{10000\times0,1} \times 2 = 0,0086$ m

e_{tot}= 0,533 + 0,02 + 0,0086 = **0,5616 m**

$M_U = N_U \times e_{tot}$= 1,6875 x 0,5616 **= 0,9477 KN.m**

Le moment fictif : $M_{UAs} = M_U + N_U (d-h/2)$ **=** 0,9477 + 1,6875(0,08 - $\frac{0,1}{2}$) = **0,99833 KN.m**

- **Type de section**

$A = (d - d')N_U - M_{UAs} = (0{,}08\text{-}0{,}02)1{,}6875 - 0{,}99833 = -\mathbf{0{,}89708\ KN.m}$

$B = (0.337\text{-}0.81d'/h)bh^2\ f_{bu} = (0{,}337\text{-}0{,}81x0{,}02/0{,}1)1x0{,}1^2x14{,}17 \times 10^{+3} = \mathbf{24{,}80\ KN.m}$

$A < B$ (la section est partiellement comprimée)

2. Calcul du ferraillage à l'ELU :

- **A la flexion simple :**

Moment ultime réduit : $\mu = M_u / (b \times d^2 \times f_{bu})$

M_U (N.m)	b (cm)	d (cm)	f_{bu} (MPa)	μ	α	β	$A_{s\ cal}(cm^2)$
998,33	100	8	14,17	$0{,}011 < \mu_l = 0{,}392$ $\rightarrow A_s' = 0$	0,014	0,9944	0,36

- **A la flexion composée :**

La section réelle des armatures ; $A_{réelle} = A_f - \frac{N_u}{100\sigma_s}$

$= 0{,}36 - 1{,}6875/(100\times 347{,}83) = 0{,}36\ cm^2$

- **Condition de non-fragilité:**

$A_{min} \geq \left\{\frac{0.23bdf_{t28}}{f_e}\right\} = 0{,}97cm^2.$ Avec $f_{t28} = 0{,}6 + 0{,}06f_{c28} = 2{,}1$ MPa

Soit $A_{sadopt} = \max\{A_{min}\ ;\ A_{s\ réel}\} = 0{,}97\ cm^2$

Soit **: 4T8** $\rightarrow$ $\mathbf{A_s = 2{,}01\ cm^2}$

- **Les armatures de répartition** :

$A_t = \frac{A_s}{4} = 2{,}01/4 = 0{,}503\ cm^2$

Soit : $A_s\ (3\Phi6) = 0{,}85\ cm^2$

3. Vérification des contraintes à L'ELS :

L'excentricité vaut : $e_G = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = \frac{0{,}6}{1{,}6875} = 0{,}3556$ m > h/6 = 0,017 m $\rightarrow$ section partiellement comprimée

- **Vérifications des contraintes;**

Contrainte maximale de compression du béton : $\sigma_b < \overline{\sigma_{bc}} \Rightarrow \quad \overline{\sigma_{bc}} = 0{,}6\ f_{c28} = 0{,}6 \times 25 = 15\ MPa$

Contrainte maximale de traction des aciers : $\sigma_{ser} < \overline{\sigma_{ser}}$

$\overline{\sigma_s} \leq \left\{\frac{2}{3}\ f_e\ ,110\sqrt{1{,}6\times f_{c28}}\right\} \Rightarrow \overline{\sigma_s} \leq \min\{266.66\ ,201.63\} \rightarrow \overline{\sigma_s} = 201{,}63$ MPa (FP)

c : est la distance entre la fibre la plus comprimée est le centre de compression C.

$c = d - e_A = h/2 - e_G = 10/2 - 35{,}56 = -30{,}56$ cm

$p = -3c^2 + 90A_s \times \frac{d-c}{b} + 90A'_s \times \frac{d'-c}{b}$ (A's = 0)

$p = -3((-30{,}56)^2) + 90x2{,}01\ \frac{8+30{,}56}{100} = -2731{,}986\ cm^2.$

$q = -2c^3 - 90A_s\ x\frac{(d-c)^2}{b} - 90A'_s\ \frac{(d'-c)^2}{b}$ (A's = 0)

q = $-2(-30{,}56)^3 - 90\times 2{,}01\,\frac{(8+30{,}56)^2}{100} = 54391{,}045\ cm^3$.

La résolution de l'équation du troisième degré $y_c^3 + p\,y_c + q = 0$, donne :

$y_c^3 + (-2731{,}986)\,y_c + 54391{,}045 = 0$

$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 54391{,}045^2 + \frac{4\times(-2731{,}986)^3}{27} = -62481436{,}99 < 0$

Donc on calcule :

$\varphi = \text{Arcos}\left[\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right] \Rightarrow \varphi = \text{Arcos}\left[\frac{3\times 54391{,}045}{2\times(-2731{,}986)}\sqrt{\frac{-3}{-2731{,}986}}\right] = 171{,}73\ °$

et $a = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} = 2\sqrt{\frac{-(-2731{,}986)}{3}} = 60{,}35\ \text{cm}$

$y_{c1} = a\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 60{,}35\cos\left(\frac{171{,}73\,°}{3}\right) = \mathbf{32{,}65\ cm}$

$y_{c2} = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) = 60{,}35\cos\left(\frac{171{,}73\,°}{3} + 120°\right) = \mathbf{-\,60{,}28\ cm}$

$y_{c3} = a\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) = 60{,}35\cos\left(\frac{171{,}73\,°}{3} + 240°\right) = \mathbf{27{,}63\ cm}$

$y_{ser} = y_c + c$: représente la distance du centre de pression à l'axe neutre à la fibre Supérieure de la section.

$\Rightarrow y_{ser1} = y_{c1} + c$ = 32, 65 – 30,56 = **2,09 cm** **acceptée**

$\Rightarrow y_{ser2} = y_{c2} + c$ = - 60,28 – 30,56 = **- 90,84 cm** **refusée**

$\Rightarrow y_{ser3} = y_{c3} + c$ = 27,63 – 30,56 = **- 2,93 cm** **refusée**

Donc $\mathbf{y_{ser}}$ **= 2,09 cm.**

Moment statique :

$S = \frac{1}{2} b y_{ser}^2 + 15A_s'(y_{ser} - d') - 15A_s(d - y_{ser}) \quad (A_s' = 0)$

$\Rightarrow S = 40{,}22\ cm^3$

La contrainte de compression dans le béton :

$\sigma_{bc} = \frac{N_{ser}.y_{ser}}{S} = \frac{1{,}6875x10^3x2{,}09x10}{40{,}22x10^3}$ = 0,88 MPa < 0.6 f_{c28} = 15 MPa (condition vérifiée)

La contrainte de traction dans les aciers tendus :

$\sigma_s = n\sigma_b\frac{(d - y_{ser})}{y_{ser}} = 15x0{,}88x\frac{(8-2{,}09)}{2{,}09}$ = 37,33 MPa < $\overline{\sigma_s} = 201{,}63$ MPa (condition vérifiée)

Vérification de l'effort tranchant :

$V_u = 1{,}5Q = 1{,}5\times 1 = 1{,}5KN/ml$

$\tau_u = \frac{V_u}{b.d} = \frac{1{,}5\times 1000}{1000\times 80} = 0{,}01875\ MPa$

Dans le cas de la fissuration nuisible (préjudiciable), on a :

$\tau_u < \min\left\{0{,}15\frac{f_{c28}}{\gamma_b}, 4MPa\right\} \Rightarrow \tau_u < \min\{2{,}50MPa\,;\,4MPa\}$

$\tau_u = 0{,}019\ \text{MPa} < 2{,}50\ \text{MPa}$ CV

Il n'est pas nécessaire de concevoir des armatures transversales, les armatures de répartition sont suffisantes.

Exercice N°(2) :

1. Calcul du ferraillage à l'ELU :

On calcule :

$$f_{bu} = \frac{0{,}85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 14{,}17\text{MPa}$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} \Rightarrow f_{su} = 347{,}83\text{MPa}$$

Le moment fictif :

M_{UAs} = $M_U + N_U$ (d-h/2) = 250 + 6000 x (0,83 - $\frac{0{,}90}{2}$) = **2530 KN.m**

- **Type de section :**

On calcule :

A = (d – d')N_U - M_{UAs} = 0,76 x 6000 - 2530 = **2030 KN.m**

B = (0.337 - 0,81d'/h)bh^2 f_{bu}= (0,337 - 0,81 x 0,07/0,9) x 0,4 x $0{,}9^2$ x 14,17 x 10^3 = **1258 KN.m**

A > B → la section est entièrement comprimée.

On calcule :

$$C = (0{,}5h - d') \times b \times h \times f_{bu} = 1938{,}5KN.m$$

A > C → Nous aurons donc :

$$\begin{cases} A'_2 = \dfrac{1}{(d-d')\sigma'_{s2}}\left[M_{uAs} - (d - \dfrac{h}{2}) b \times h \times f_{bu}\right] et \\ A'_1 = \dfrac{1}{\sigma'_{s2}}\left[N_u - b \times h \times f_{bu}\right] - A'_2 \end{cases}$$

avec ε_s'= 2 ‰ > ε_l = 1,74 ‰

→ $\sigma'_{s2} = f_e/\gamma_s$ = 347,83MPa

$$A'_2 = \frac{1}{760x347{,}83}\left[2530x10^{+6} - (830 - \frac{900}{2})400 \times 900 \times 14{,}17\right] = 22{,}4x10^{-2}mm^2$$

$$\Rightarrow A'_2 = 22{,}4cm^2$$

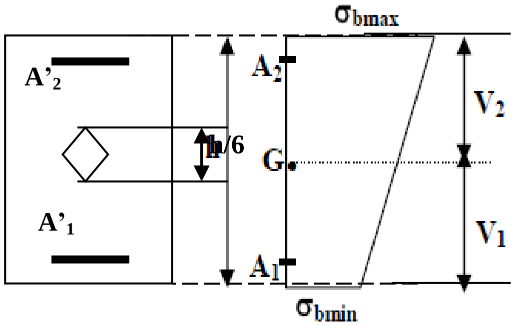
$$A'_1 = \frac{1}{347{,}83}\left[6000x10^{+3} - 400 \times 900 \times 14.17\right] - 2240 = 344mm^2$$

$$\Rightarrow A'_1 = 3{,}44cm^2$$

2. Vérification des contraintes à L'ELS :

L'excentricité vaut : $e_G = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = \frac{175}{4100}$ = 0,0427 m = 4,27 cm < h/6 = 90/6 = 15 cm

→ la section est entièrement comprimée.



Calcul de V_1 :

$$V_1 = \frac{b \times \frac{h^2}{2} + n \times A_1^{'}(h-d) + n \times A_2^{'}(h-d^{'})}{(b \times h + n \times (A_1^{'} + A_2^{'})}$$

$$= 47,71cm$$

$$V_2 = h - V_1 = 42,29cm$$

$B_h = bh + n(A_1' + A_2') = 3987,6\ cm^2$

Le moment quadratique I de la section homogène est obtenu par la relation :

$$\mathbf{I = \frac{bh^3}{12} + bh\left(V_2 - \frac{h}{2}\right)^2 + nA'_{S1}(d - V_2)^2 + nA'_{S2}(V_2 - d')^2}$$

$$\mathbf{= 2\ 960\ 404{,}7\ cm^4}$$

Dans ces conditions tout le béton de la section intervient et les contraintes extrêmes sont données par les formules classiques de la RDM :

$$\begin{cases} \sigma_{b\max} = \frac{N_{ser}}{B_h} + \frac{M_{ser}}{I} \times V_2 = 12,78MPa < \overline{\sigma_b} = 0,6 f_{c28} = 15MPa \\ \sigma_{b\min} = \frac{N_{ser}}{B_h} - \frac{M_{ser}}{I} \times V_1 = 7,46MPa \succ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma'_{s2} = 15\left[\frac{N_{ser}}{B_h} + \frac{M_{ser}}{I}(V_2 - d')\right] = 185{,}52\ \text{MPa} \\ \sigma'_{s1} = 15\left[\frac{N_{ser}}{B_h} - \frac{M_{ser}}{I}(d - V_2)\right] = 118{,}13\ \text{MPa} \end{cases}$$