Université Larbi Ben M'Hidi de Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences et des sciences appliquées

Département de Génie Civil

3ème année Licence Génie Civil

Année universitaire : 2019 – 2020

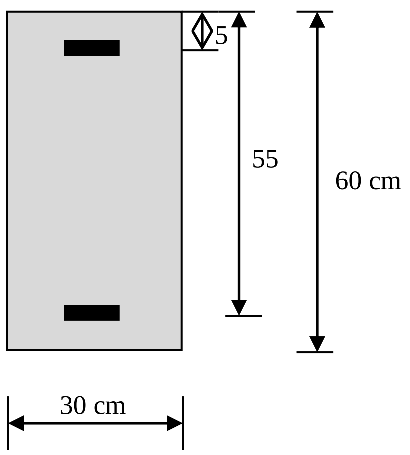
Module : Béton armé II

Série N°(3) : flexion simple à l'ELU - section rectangulaire -

Exercice N°(1) :

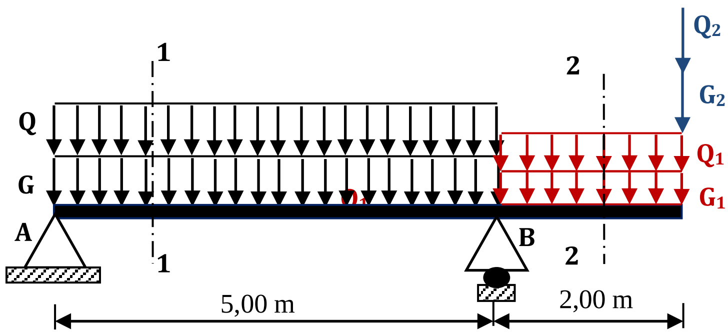
Soit à déterminer à l'ELU, les sections d'armatures à placer dans la section rectangulaire ci-contre réalisée en béton armé de résistance à la compression à 28 jours f_{c28} = 25 MPa, armée par des aciers HA feE500 (type I) et soumise successivement aux valeurs du moment fléchissant suivantes :

- 0.193 ; 0.284 et 0.530 MN.m.



Exercice N°(2) :

Soit une poutre simplement appuyée avec console en béton armé de section rectangulaire, soumise à une combinaison d'actions permanente et d'exploitation comme le montre la figure ci-contre, on vous demande de calculer le ferraillage longitudinal de cette poutre à l'E.L.U avec schéma de ferraillage correspondant.



Données :

G = 40 KN/m. Q = 32 KN/m.

G_1 = 30 KN/m. Q_1 = 30 KN/m.

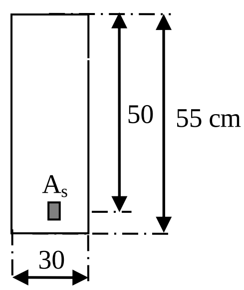
G_2 = 54 KN. Q_2 = 46 KN.

Béton :

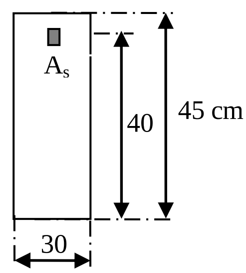
f_{c28} = 30 MPa

Acier :

Fe E500 (Type I).



Coupe 1-1



Coupe 2-2

Solutions :

Exercice N° (1) :

Paramètres de calcul

b = 0.3 m ; h = 0.6 m ; d = 0.55 m ; d'= 0.05 m

f_{c28} = 25 MPa ; f_{bu} = 14.2 MPa ; fe = 500 MPa

ε_l = 500/200x1.15 = **2.174 ‰**

α_l = 3.5/(3.5+2.174) = **0.6168**

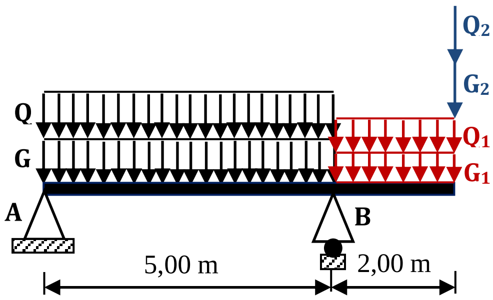
μ_l = 0.8 x 0.6168(1-0.4 x 0.6168) = **0.371**

σ_{sc} = fe/1.15 = 500/1.15 = 435 MPa

	$N^0$1	**$N^0$2**	**$N^0$3**
Mu (MN.m)	**0.193**	**0.284**	**0.530**
$\mu = Mu/b.d^2.f_{bu}$	**0.150**	**0.220**	**0.411**
Cas	**$\mu < 0.186$** Pivot A	**$0.186 < \mu < \mu l$** Pivot B sans Asc	**$\mu > \mu l$** Pivot B avec Asc
α	**0.200**	**0.314**	**$\alpha l = 0.617$**
Z	**0.506 m**	**0.480**	**0.414**
Ast	**8.80 cm²**	**13.58 cm²**	**28.94 cm²**
Asc			**2.39 cm²**
Choix de barres	**6T14 (9,24 cm²)**	**7T16 (14,07 cm²)**	**5T16 + 4T25 (29,69 cm²)**
			3T12 (3,39 cm²)

Exercice N°(2) :

1. Calcul des efforts internes :



q_u = 1,35G + 1,50Q = 1,35x40 + 1,50x32

→ q_u = 102 KN/m

q_{u1} = 1,35G_1 + 1,50Q_1 = 1,35x30 + 1,50x30

→ q_{u1} = 85,5 KN/m

P_u = 1,35G_2 + 1,50Q_2 = 1,35x54 + 1,50x46

→ P_u = 141,9 KN

Au niveau de cette poutre, on a deux sections dangereuses :

Section N°1 : au niveau de la travée :

Réaction : $V_A = \dfrac{q_u l}{2} - \dfrac{q_{u1} l_1^2}{2l} - \dfrac{P_u l_1}{l}$

ELU : V_A= 164,04 KN

Le moment à une distance x de l'appui A, a pour expression : $M(x) = V_A x - \dfrac{q_u x^2}{2}$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V_A - q_u x = 0 \rightarrow x_0 = \frac{V_A}{q_u}$$

ELU : x_0 = 1,61 m → M_U^{max} = 131,91 KN.m > 0

<u>Section N°2 :</u> sur appui, au niveau de l'encastrement de la console (à x = 2,00 m),

$M_{max} = \dfrac{q_1 l_1^2}{2} + P l_1 < 0$

$M_u = 454{,}8$ KN.m

<u>2. calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU :</u>

$f_{bu} = \dfrac{0{,}85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 17\,MPa$ $\qquad \sigma_s = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78$ MPa

<u>Section N°1 :</u> $M_u = 131{,}91$ KN.m ($M > 0 \longrightarrow$ partie tendue en bas)

<u>Le moment reduit :</u>

$$\mu = \frac{M_u}{b_o d^2 f_{bu}} = \frac{131{,}91 \times 10^3}{30 \times (50)^2 \times 17} \Rightarrow \mu = 0{,}103$$

$\mu < 0.186 \Rightarrow$ pivot A $\Rightarrow \varepsilon_s = 10$ % $\Rightarrow \sigma_s = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78\ MPa$

$$\alpha = 1{,}25 \times \left(1 - \sqrt{(1 - 2\mu)}\right) = 0{,}136$$

$$Z = d \times (1 - 0{,}4\alpha) = 47{,}28\,cm$$

Donc, la quantité d'armature tendue sera égale à :

$$A_s = \frac{M_u}{Z\sigma_s} = 6{,}42\ cm^2$$

<u>Condition de non fragilité :</u>

$$A_s \geq A_{min} = \frac{0{,}23 b_o d f_{t28}}{f_e} = 1{,}66\,cm^2$$

Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2{,}4$ MPa

Condition vérifiée.

<u>Dispositions Constructives :</u>

L'armature inférieure : $A_{adoptée} = A_S$ (6T12) = **$6{,}79\ cm^2$**

L'armature supérieure (de montage) : A'_s (3T12) = **$3{,}39\ cm^2$**

<u>Section N°2 :</u> $M_u = 454{,}8$ KN.m ($M < 0 \longrightarrow$ partie tendue en haut)

<u>Le moment reduit :</u>

$$\mu = \frac{M_u}{b_o d^2 f_{bu}} = \frac{454{,}8 \times 10^3}{30 \times (40)^2 \times 17} \Rightarrow \mu = 0{,}557$$

$\mu > 0.186 \Rightarrow$ pivot B $\Rightarrow$ on calcule $\mu_l = 0{,}8\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$

D'après le théorème des triangles semblables, on a : $\alpha_1 = \dfrac{3{,}5\,{}^0\!/_{00}}{3{,}5\,{}^0\!/_{00} + \varepsilon_1}$

et $\varepsilon_l = \dfrac{fe}{\gamma_s E_s} = \dfrac{500}{1{,}15 x 2 x 10^5} = 2{,}17 \times 10^{-3} = 2{,}17$ ‰

$\Rightarrow \alpha_l = 0{,}617$

$\Rightarrow \mu_l = 0{,}372$

On remarque que $\mu = 0{,}557 > \mu_l = 0{,}372 \Rightarrow$ section doublement armée ($A_s' \neq 0$)

Moment absorbé par le béton seul :

$M_l = \mu_l\, b\, d^2\, f_{bu} = 0{,}372 \times 30 \times 40^2 \times 17$

$\Rightarrow M_l = 303552$ N.m = $303{,}552$ KN.m

Donc ; la section d'armature tendue sera égale à :

$$A_s = \frac{M_l}{\beta_l d \sigma_s} + \frac{M_u - M_l}{(d-d')\sigma_s} \quad avec \quad \beta_l = (1-0{,}4\alpha_l) = 1-0{,}4x0.617 = 0.753$$

$$A_s = \frac{303{,}552x10^{+3}}{0{,}753x40x434{,}78} + \frac{(454{,}8-303{,}552)x10^{+3}}{(40-5)434{,}78}$$

$A_s = 23{,}18 + 9{,}94 \Rightarrow A_s = 33{,}12\ cm^2$

Et la section d'armature comprimée sera égale à :

$$A_s' = \frac{M_u - M_l}{(d-d')\sigma_s'}$$

D'après le théorème des triangles semblables, on a :

$$\varepsilon_s' = \frac{3{,}5\text{‰}(\alpha_l - \frac{d'}{d})}{\alpha_l} = \frac{3.5x(0{,}617-\frac{5}{40})}{0{,}617}$$

$\varepsilon_s' = 2{,}79$ ‰ $> \varepsilon_l = 2{,}17$ ‰ $\Rightarrow \sigma_s' = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78MPa$

$\Rightarrow A_s' = \dfrac{(454{,}8-303{,}552)x10^{+3}}{(40-5)x434{,}78} \Rightarrow A_s' = 9{,}94\ cm^2$

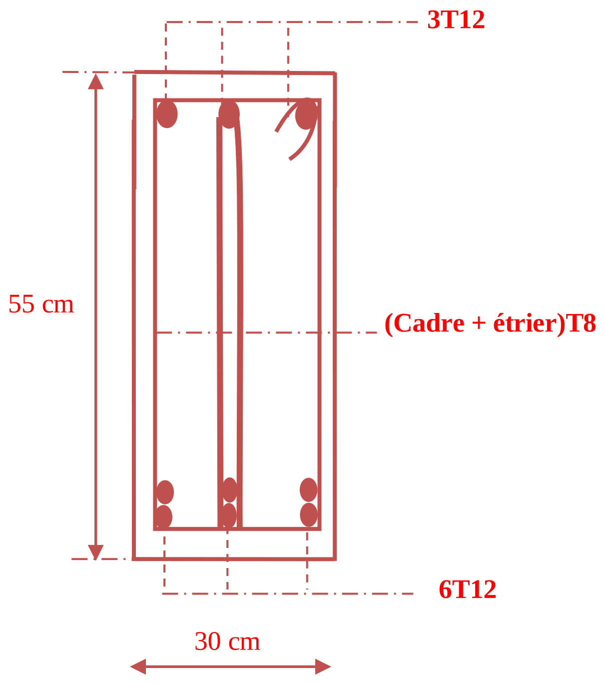
Condition de non fragilité :

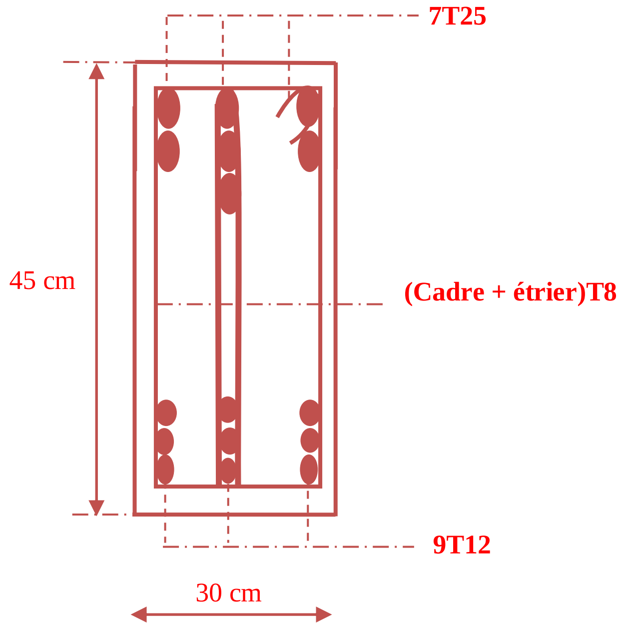
$A_s \geq A_{min} = \dfrac{0{,}23 b_o d f_{t28}}{f_e} = 1{,}32\ cm^2$ Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2{,}4$ MPa

Dispositions Constructives :

L'armature supérieure : $A_{adoptée} = A_S(7T25) =$ **34,36cm²**

L'armature inférieure : A'_s (9T12) = **10,18 cm²**





Université Larbi Ben M'Hidi de Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences et des sciences appliquées

Département de Génie Civil

3ème année Licence Génie Civil

Année universitaire : 2019 – 2020

Module : Béton armé II

Série N°(4) : flexion simple à l'ELU - section en Té -

Exercice N° (1) :

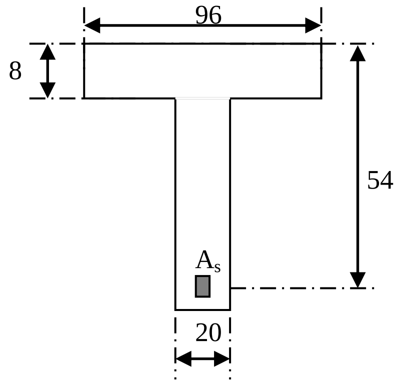
Déterminer les armatures à l'E.L.U.R de la section en BA sous forme de T, montrée sur la figure ci-dessous sollicitée en flexion simple et dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Matériaux :

  béton : f_{c28} = 16 MPa.

  acier : HA f_e = 400 MPa (type 1);

- Moment appliqué : M_u = 370 000 N.m



Exercice N° (2 :

Déterminer les armatures à l'E.L.U.R de la même section en BA sous forme de T, donnée dans l'exercice N°1 sollicitée en flexion simple et dont les caractéristiques des matériaux restent inchangeables Moment appliqué : M_u = 640 000 N.m

Exercice N°(3) :

Soit une poutre console en béton armé de 2 m de portée et de section en Té, soumise à une combinaison d'actions permanente et d'exploitation comme le montre la figure ci-contre.

On vous demande de calculer le ferraillage longitudinal de cette console à l'E.L.U. et de vérifier les contraintes à l'E.L.S. si la fissuration est non préjudiciable.

Données :

G = 25 KN/m.

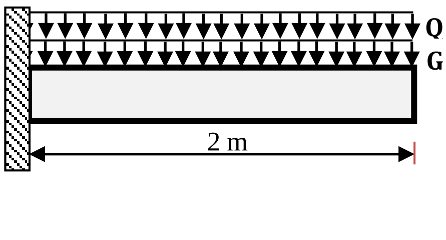
Q = 20 KN/m.

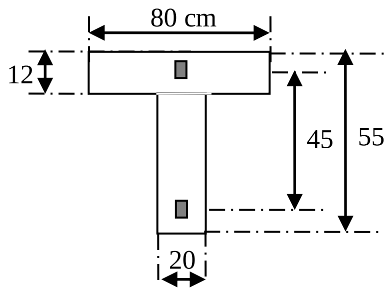
Béton :

f_{c28} = 20 MPa

Acier :

Fe E400 (Type I)





Solutions :

Exercice N°(1) :

1. calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU :

$$f_{bu} = \frac{0{,}85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 9{,}07 \text{ MPa}$$

Position de l'AN :

$M_T = f_{bu} \,.\, bh_0.(d - h_0/2) = 9{,}07 \text{ x } 96 \text{ x } 8\,(54 - 4) \text{ x } 10^{-3} \rightarrow$ **$M_T = 348{,}288$ KN.m**

On remarque que $M_u = 370$ KN.m $> M_T = 348{,}288$ KN.m $\rightarrow$ l'AN est dans la nervure et le calcul se fait pour une section en Té.

Moment developpé par les débords : $M_d = f_{bu} \,.\, (b - b_0).h_0.(d - h_0/2)$

$M_d = 9{,}07 \text{ x } (96 - 20) \text{ x } 8\,(54 - 4) \text{ x } 10^{-3} \rightarrow$ **$M_d = 275{,}728$ KN.m**

Moment developpé par la nervure : $M_n = M_u - M_d = 370 - 275{,}728$

$\rightarrow$ **$M_n = 94{,}272$ KN.m**

Le moment reduit :

$$\mu = \frac{M_n}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{94{,}272 \times 10^3}{20 \times (54)^2 \times 9{,}07} \Rightarrow \mu = 0{,}178$$

$\mu < 0.186 \Rightarrow$ pivot A $\Rightarrow \varepsilon_s = 10$ ‰ $\Rightarrow \sigma_s = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}83$ MPa

$$\alpha = 1{,}25 \times \left(1 - \sqrt{(1 - 2\mu)}\right) = 0{,}247$$

$$\beta = (1 - 0{,}4\alpha) = 0{,}901$$

Donc, la quantité d'armature tendue sera égale à :

$$A_s = \frac{M_d}{(d - \frac{h_0}{2})\sigma_s} + \frac{M_n}{\beta d \sigma_s}$$

$$A_s = \frac{275{,}728 x 10^{+3}}{(54 - \frac{8}{2}) x 347{,}83} + \frac{94{,}272 x 10^{+3}}{0{,}901 x 54 x 347{,}83}$$

$$A_s = 21{,}42 \ cm^2$$

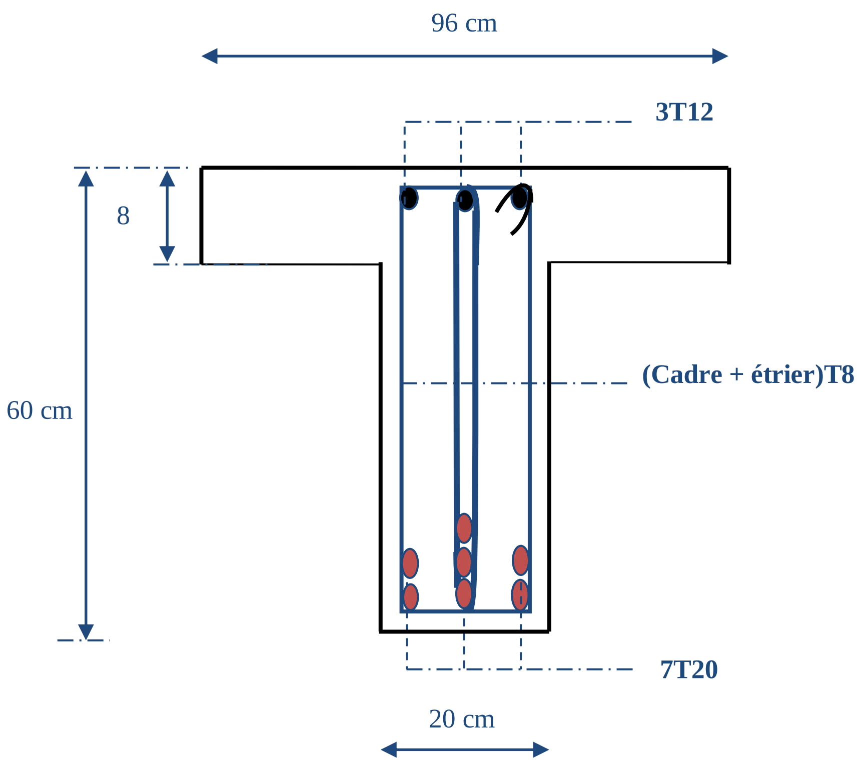
Condition de non fragilité :

$$A_s \geq A_{min} = \frac{0{,}23 b_0 d f_{t28}}{f_e} = 0{,}97 \, cm^2$$

Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1{,}56$ MPa   Condition vérifiée

Donc, l'armature inférieure : $A_{adoptée}$(7T20) = **21,99 cm²**

l'armature supérieure (armature de montage) : A'_s (3T12) = **3,39 cm²**



<u>Exercice N°(2) :</u>

<u>Calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU :</u>

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 9,07\,\text{MPa}$$

<u>Position de l'AN :</u>

$M_T = f_{bu} \cdot bh_0 \cdot (d - h_0/2) = 9,07 \times 96 \times 8\,(54 - 4) \times 10^{-3}$

→ **M_T = 348,288 KN.m**

On remarque que M_u = 640 KN.m > M_T = 348,288 KN.m → l'AN est dans la nervure et le calcul se fait pour une section en Té.

<u>Moment developpé par les débords :</u> $M_d = f_{bu} \cdot (b - b_0) \cdot h_0 \cdot (d - h_0/2)$

$M_d = 9,07 \times (96 - 20) \times 8\,(54 - 4) \times 10^{-3}$ → **M_d = 275,728 KN.m**

<u>Moment developpé par la nervure :</u> $M_n = M_u - M_d = 640 - 275,728$

→ **M_n = 364,272 KN.m**

<u>Le moment reduit :</u>

$$\mu = \frac{M_n}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{364,272 \times 10^3}{20 \times (54)^2 \times 9,07} \Rightarrow \mu = 0,689$$

$\mu > 0.186 \Rightarrow$ pivot B $\Rightarrow$ on calcule $\mu_l = 0{,}8\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$

D'après le théorème des triangles semblables, on a : $\alpha_l = \dfrac{3{,}5\,^0\!/_{00}}{3{,}5\,^0\!/_{00} + \varepsilon_l}$

et $\varepsilon_l = \dfrac{fe}{\gamma_s E_s} = \dfrac{400}{1{,}15x2x10^5} = 1{,}74 \text{ x } 10^{-3} = 1{,}74\ ‰$

$\Rightarrow \alpha_l = 0{,}668 \Rightarrow \mu_l = 0{,}392$

On remarque que $\mu = 0{,}689 > \mu_l = 0{,}392 \Rightarrow$ section doublement armée ($A_s' \neq 0$)

Moment absorbé par le béton seul :

$M_l = \mu_l\, b_0\, d^2\, f_{bu} = 0{,}392 \text{ x } 20 \text{ x } 54^2 \text{ x } 9{,}07$

$\Rightarrow M_l = 207353$ N.m = 207,353 KN.m

Donc la section d'armature comprimée sera égale à :

$$A_s' = \frac{M_n - M_l}{(d - d')\sigma_s'}$$

D'après le théorème des triangles semblables, on a : $\varepsilon_s' = \dfrac{3{,}5\,^0\!/_{00}(\alpha_l - \frac{d'}{d})}{\alpha_l} = \dfrac{3.5x(0{,}668 - \frac{6}{54})}{0{,}668}$

$\varepsilon_s' = 3{,}01\ ‰ > \varepsilon_l = 1{,}74\ ‰ \Rightarrow \sigma_s' = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}83 MPa$

$$\Rightarrow A_s' = \frac{(364{,}272 - 207{,}353)x10^{+3}}{(54-6)x347{,}83} = 9{,}4\ cm^2$$

Et la section d'armature tendue sera égale à :

$$A_s = \frac{M_d}{(d - \frac{h_0}{2})\sigma_s} + \frac{M_l}{\beta_l d \sigma_s} + \frac{M_n - M_l}{(d - d')\sigma_s} \quad avec \quad \beta_l = (1 - 0{,}4\alpha_l) = 1 - 0{,}4x0.668 = 0.733$$

$$A_s = \frac{275{,}728x10^{+3}}{(54 - \frac{8}{2})x347{,}83} + \frac{207{,}353x10^{+3}}{0{,}733x54x347{,}83} + \frac{(364{,}272 - 207{,}353)x10^{+3}}{(54-6)347{,}83}$$

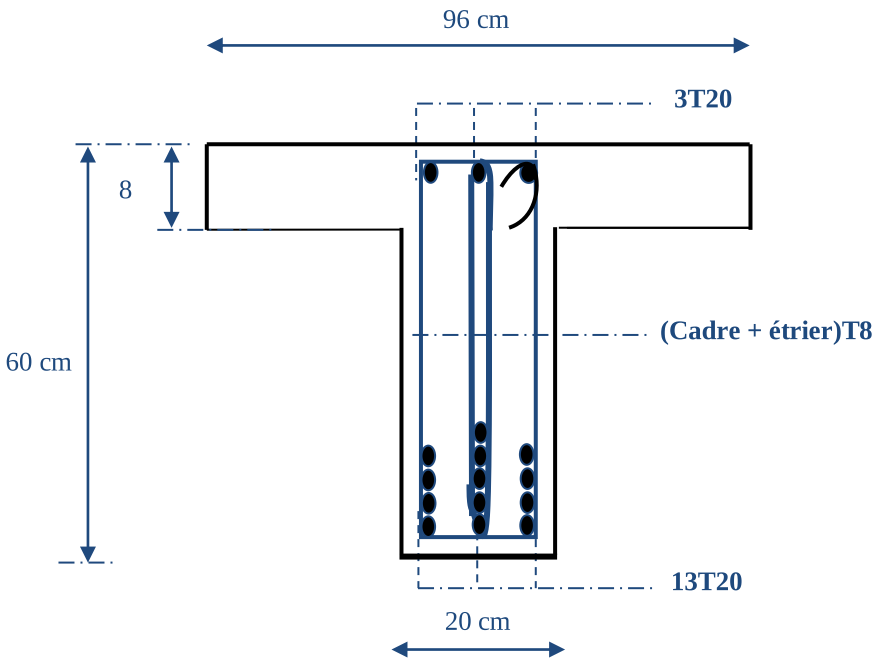
$A_s = 15{,}85 + 15{,}06 + 9{,}40 \Rightarrow A_s = 40{,}31\ cm^2$

Condition de non fragilité :

$A_s \geq A_{min} = \dfrac{0{,}23 b_0 d f_{t28}}{f_e} = 0{,}97\ cm^2$ Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1{,}56$ MPa Condition vérifiée.

Donc, l'armature inférieure : $A_{adoptée}$(13T20) = **40,84 cm²**

l'armature supérieure (armature de montage) : A'_s (3T20) = **9,42 cm²**



Exercice N°(3) :

1. Calcul des efforts internes :

$q_u = 1{,}35G + 1{,}50Q$

$= 1{,}35x25 + 1.5x20$

$q_u = 63{,}75$ KN/m

$q_{ser} = G + Q = 25 + 20$

$q_{ser} = 45$ KN/m

à x = 0 m (section d'encastrement) → $M^{max} = -\dfrac{q\,l^2}{2}$ et $\boldsymbol{V_u^{max} = q_u l}$

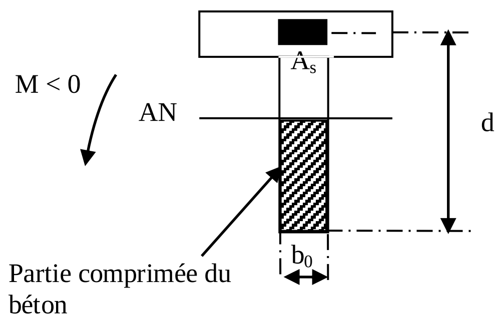
$M_u = -\,127{,}5$ KN.m

$M_{ser} = -\,90$ KN.m

$\boldsymbol{V_u^{max} = 127{,}5\ KN}$

Puisque le moment M < 0, les fibres tendues dans la section en Té seront en haut par rapport à l'A.N. et les fibres comprimées seront en bas donc la forme en Té sera dans la partie tendue qui est selon les hypothèses du BAEL à l'ELU négligée → le calcul se fait pour une section rectangulaire (b_0 x d)

2. Calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU :



$$f_{bu} = \frac{0{,}85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 11{,}33 \text{ MPa}$$

Le moment reduit :

$$\mu = \frac{Mu}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{127{,}5.10^3}{20\times(50)^2\times 11{,}33} \Rightarrow \mu = 0{,}225$$

$\mu > 0.186 \Rightarrow$ pivot B $\Rightarrow$ on calcule $\mu_l = 0{,}8\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$

D'après le théorème des triangles semblables, on a : $\alpha_l = \dfrac{3{,}5\,‰}{3{,}5\,‰ + \varepsilon_l}$

et $\varepsilon_l = \dfrac{fe}{\gamma_s E_s} = \dfrac{400}{1{,}15x2x10^5} = 1{,}74 \text{ x } 10^{-3} = 1{,}74\ ‰$

$\Rightarrow \alpha_l = 0{,}668 \quad \Rightarrow \mu_l = 0{,}392$

On remarque que $\mu = 0{,}225 < \mu_l = 0{,}392 \Rightarrow$ section simplement armée ($A_s' = 0$)

$$\Rightarrow \sigma_s = \frac{\text{fe}}{\gamma_s} = \frac{400}{1{,}15} = 347{,}83 \text{ Mpa}$$

$$\alpha = 1{,}25 \times \left(1 - \sqrt{(1-2\mu)}\right) = 0{,}323$$

$$Z = d \times (1 - 0{,}4\alpha) = 43.55\ cm$$

$$A_s = \frac{M_U}{Z\sigma_s} = 8{,}42\ cm^2$$

Condition de non fragilité :

$$A_s \geq A_{min} = \frac{0{,}23 b_0 d f_{t28}}{f_e} = 1{,}04\ cm^2$$

Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1{,}8$ MPa

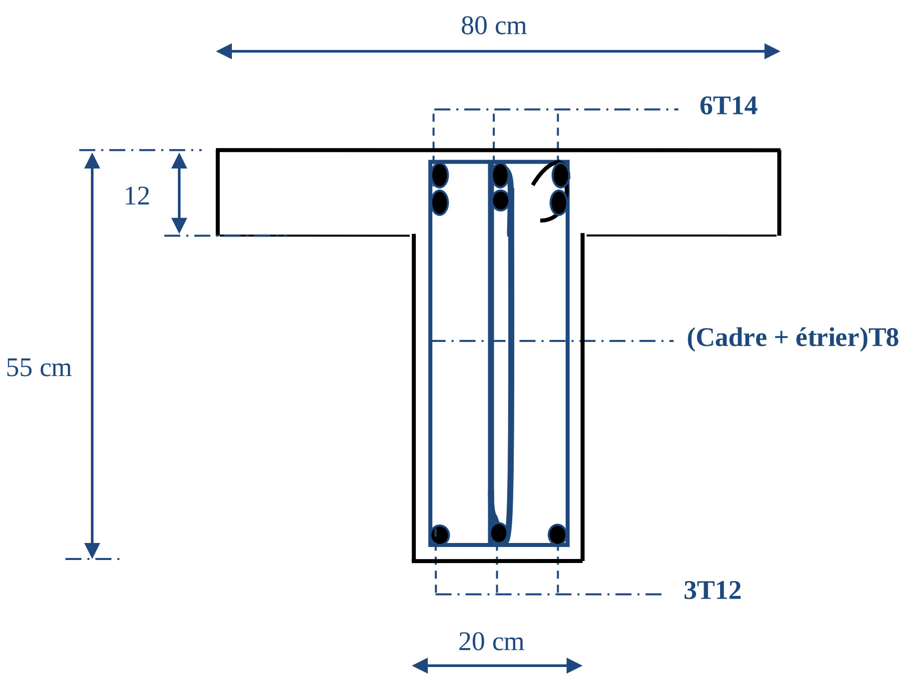
Dispositions constructives :

L'armature supérieure :

$A_{adoptée}$(6T14) = **9,24cm²**

L'armature inférieure : montage

A'_s (3T12) = **3,39 cm²**



3. vérification des contraintes à l'ELS :

M_{ser} = 90 KN.m et $A_s = 9,24\ cm^2$

Puisque la fissuration est peu préjudiciable, il faut vérifier la condition : $\sigma_{bc} < 0.6\ f_{c28} = 12$ MPa

Position de l'AN:

$$\frac{1}{2} b\ y^2 - 15 A_s (d - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10y^2 + 138,6y - 6930 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 544,44 \ \Rightarrow\ y = 20,29 \text{ cm}$$

Moment d'inertie :

$$I = \frac{by^3}{3} + 15 A_s (d - y)^2 \ \Rightarrow I = 178\,027,15 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{bc} = \frac{90x10^6 x20,29x10}{178027,15x10^4} = 10,26 \text{ MPa} < 12 \text{ MPa} \qquad \text{(condition vérifiée)}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n\ M_{ser}(d - y)}{I} = \frac{15 \times 90 \times 10^6 (50 - 20,29) \times 10}{178027,15 \times 10^4} = 225,3\ MPa$$

Université Larbi Ben M'Hidi de Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences et des sciences appliquées

Département de Génie Civil

3ème année Licence Génie Civil

Année universitaire : 2019 – 2020

Module : Béton armé II

Série N°(5) : flexion simple à l'ELS

Exercice N°(1) :

Vérifiez l'état limite service pour une section (25 × 50) sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.S M_{ser} = 0,2 MN.m. avec f_{c28} = 25 MPa et FeE400 ; d' = 5 cm ;

A_{st} = 6T25 = 29,45 cm² ; A_{sc} = 3T12 = 3,39 cm²

Fissuration préjudiciable.

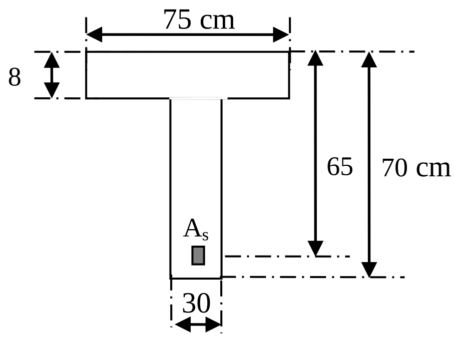
Exercice N°(2) :

Vérifiez l'état limite de service pour une section en Té dont les dimensions sont représentées ci-dessous, sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.S M_{ser} = 520,625 KN.m.

f_{c28} = 28 MPa et FeE 400 (type I) ;

A_s = 36,06 cm² ;

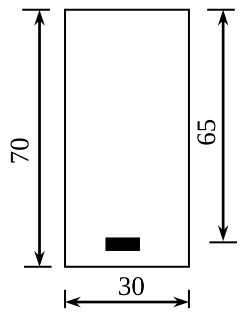
Fissuration non préjudiciable.



Exercice N°(3) :

Soit une section rectangulaire en béton armé, soumise à un moment de flexion à l'ELU : M_U = 306 KN.m et à l'ELS : M_{ser} = 217,5 KN.m comme le montre la figure ci-contre, on vous demande de :

- Calculer le ferraillage longitudinal à l'E.L.U.
- Vérifier les contraintes à l'E.L.S. si la fissuration est nuisible.
- Recalculer le ferraillage longitudinal à l'E.L.S. si les contraintes ne vérifient pas.
- faire le schéma de ferraillage correspondant.



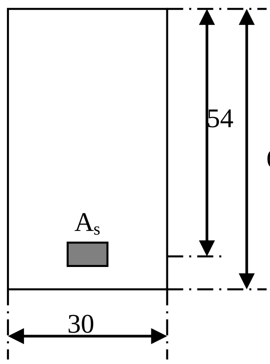
Béton : f_{c28} = 28 MPa **Acier :** Fe E400 (Type I)

Exercice N°(4) ;

Soit une section rectangulaire en béton armé, soumise à un moment de flexion à l'ELU :

M_U = 0,364 MN.m et M_{ser} = 0,251 MN.m comme le montre la figure ci-contre, on demande de :

- Calculer le ferraillage longitudinal à l'Etat Limite Ultime (E.L.U.) et de faire le schéma de ferraillage correspondant.
- Vérifier les contraintes à l'E.L.S. si la fissuration est nuisible.
- Recalculer les armatures si les contraintes ne sont pas vérifiées.



Béton : f_{c28} = 20 MPa

Acier : Fe E400 (Type I)

Solutions :

Exercice N°(1) :

Il faut vérifier les deux conditions :

1).$\sigma_{bc} < 0.6\ f_{c28} = 15$ MPa

2).$\sigma_{st} < \overline{\sigma}_{st}$

Position de l'AN:

$by^2 + 30A_s^{'}(y-d') - 30A_s(d-y) = 0 \quad \Rightarrow 25y^2 + 15x3.39(y-5) - 15\times 29.45(45-y) = 0$

$\Rightarrow 25y^2 + 985,2y - 40265 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 2235,45$

$\Rightarrow$ y = 25,01 cm

Moment d'inertie :

$$I = \frac{by^3}{3} + 15A_s^{'}(y-d')^2 + 15A_s(d-y)^2$$

$\Rightarrow$ I = 327 248,34 cm^4

$\sigma_{bc} = \dfrac{0,2x10^9\,x25,01x10}{327248,34x10^4}$ = 15,3 MPa > 15 MPa (non vérifiée)

La contrainte de traction dans les aciers:

$$\sigma_{st} = \frac{n\,M_{ser}(d-y)}{I} = \frac{15\times 0,2\times 10^9(45-25,01)\times 10}{327248,34\times 10^4} = 183,25\ MPa$$

Puisque la fissuration est nuisible $\Rightarrow \overline{\sigma}_s = \min\left\{\frac{2}{3}fe\ ,\ 110\sqrt{\eta f_{t28}}\right\}$

$f_{t28} = 0.6 + 0.06f_{c28} = 2.1$ MPa $\qquad \eta = 1,6$ (acier à haute adhérence).

$\overline{\sigma_s} = \min\{266,66\ ;\ 201,63\} = 201,63$MPa.

$\sigma_{st} = 183,25\ MPa \prec \overline{\sigma}_s = 201,63MPa$ *condition vérifiée*

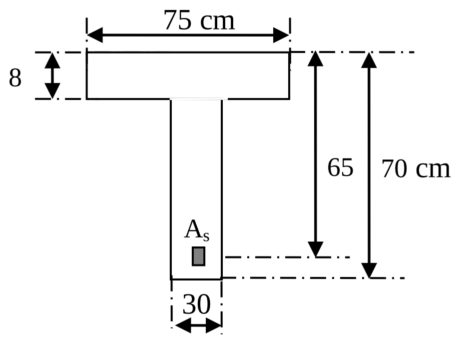
La contrainte de compression dans les aciers:

$$\sigma_{sc} = \frac{n\,M_{ser}(y-d')}{I} = \frac{15\times 0,2\times 10^9(25,01-5)\times 10}{327248,34\times 10^4} = 183,44\ MPa$$

Exercice N°(2) :

Vérification des contraintes à l'ELS :

M_{ser} = 520,625 KN.m et A_s = 36,06 cm^2



Position de l'AN:

$\frac{1}{2}by^2 - 15A_s(d-y) = 0 \quad \Rightarrow 37,5y^2 - 15\times 36,06(65-y) = 0$

$\Rightarrow 37,5y^2 + 540,9y - 35158,5 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2359,31$

$\Rightarrow$ y = 24,25 cm > h_0 = 8 cm $\Rightarrow$ L'AN est dans la nervure

L'équilibre des moments statiques : $\frac{1}{2}b_0y^2 + (b-b_0)h_0(y-\frac{h_0}{2}) - 15A_s(d-y) = 0$

$\Rightarrow 15y^2 + 900{,}9y - 36598{,}5 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1734{,}22 \Rightarrow$ y = 27,78 cm

Moment d'inertie :

$$I = \frac{by^3}{3} - \frac{(b-b_0)(y-h_0)^3}{3} + 15A_s(d-y)^2 \Rightarrow I = 1\,169\,206{,}1\ cm^4$$

1) La contrainte de compression dans le béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}.y}{I} = \frac{520{,}625x10^6x27{,}78x10}{1169206{,}1x10^4} = 12{,}37\ MPa < 0{,}6f_{c28} = 16{,}8\ MPa$$ (vérifiée)

2) La contrainte de traction dans les aciers:

$$\sigma_{st} = \frac{n\,M_{ser}(d-y)}{I} = \frac{15 \times 520{,}625 \times 10^6(65-27{,}78) \times 10}{1169206{,}1 \times 10^4} = 248{,}6\,MPa$$

Puisque la fissuration est peu nuisible, il n'ya pas de limitation de la contrainte σ_{st}

Exercice N°(3) :

1. calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU : M_u= 306 KN.m

$$f_{bu} = \frac{0{,}85f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 15{,}87\,MPa \qquad \sigma_s = \frac{fe}{\gamma_s} = \frac{400}{1{,}15} = 347{,}83\ MPa$$

Le moment reduit :

$$\mu = \frac{M_u}{b_0d^2f_{bu}} = \frac{306 \times 10^3}{30 \times (65)^2 \times 15{,}87} \Rightarrow \mu = 0{,}152$$

$\mu < 0.186 \Rightarrow$ pivot A $\Rightarrow \varepsilon_s = 10$ ‰ $\Rightarrow \sigma_s = \frac{fe}{\gamma_s}$

$$\alpha = 1{,}25 \times \left(1 - \sqrt{(1-2\mu)}\right) = 0{,}207$$

$$Z = d \times (1 - 0{,}4\alpha) = 59{,}62\ cm$$

$$A_s = \frac{M_u}{Z\sigma_s} = 14{,}76\ cm^2$$

Condition de non fragilité :

$A_s \geq A_{min} = \frac{0{,}23b_o df_{t28}}{f_e} = 2{,}56\,cm^2$ Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06f_{c28} = 2{,}28$ MPa Condition vérifiée.

2. vérification des contraintes à l'ELS : M_{ser} = 217,5 KN.m et A_s = 14,76 cm^2

Position de l'AN:

$\frac{1}{2}b_0y^2 - 15A_s(d-y) = 0 \quad \Rightarrow 15y^2 + 221{,}4y - 14391 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 955{,}24 \Rightarrow$ **y = 24,46 cm**

Moment d'inertie :

$$I=\frac{b_0y^3}{3}+15A_s(d-y)^2 \Rightarrow \mathbf{I = 510\ 211{,}16\ cm^4}$$

a) La contrainte de compression dans le béton :

$$\sigma_{bc}=\frac{217{,}5x10^6x24{,}46x10}{510211{,}16x10^4} = 10{,}43\ \text{MPa} < 16{,}8\ \text{MPa} \qquad \text{(vérifiée)}$$

b) La contrainte de traction dans les aciers:

$$\sigma_{st}=\frac{n\,M_{ser}(d-y)}{I}=\frac{15\times217{,}5\times10^6(65-24{,}46)\times10}{510211{,}16\times10^4}=259{,}23\ MPa$$

Puisque la fissuration est nuisible, il faut que :

$$\sigma_{st} < \overline{\sigma_s}=\min\left\{\frac{2}{3}fe\,,110\sqrt{\eta f_{t28}}\right\}=\min\{266{,}67\ ,\ 210{,}1\}=210{,}1\ \text{MPa}.$$

On remarque que σ_{st} = 259, 23 MPa > $\overline{\sigma_s}$ = 210,1 MPa.⇒ Il faut recalculer le ferraillage à l'E.L.S.

3. Recalculer A_s à l'ELS :

Calcul de α_s en utilisant la méthode analytique :

On calcule $\lambda = 1 + (30\ M_{ser}/(bd^2\overline{\sigma_s})) = 1{,}245$

puis $\cos\varphi = \lambda^{-3/2} = 0{,}720 \Rightarrow \varphi = 43{,}95°$;

On trouve $\alpha_s = 1 + 2\sqrt{\lambda}.\cos(240° + \varphi/3) = 0{,}409$.

Calcul de α_s en utilisant l'abaque:

On calcule $\lambda=\dfrac{nM_{ser}}{bd^2\overline{\sigma_s}}=\dfrac{15x217{,}5x10^{+3}}{30x65^2x210{,}1}=0{,}123$ et de l'abaque, on tire α_s = 0,41

Et ensuite on calcule $A_S=\dfrac{M_{ser}}{d\ \overline{\sigma_s}(1-\frac{\alpha_s}{3})}=\dfrac{217{,}5x10^{+3}}{65x210{,}1(1-\frac{0.41}{3})}=18{,}45cm^2$

Vérification de la contrainte dans le béton :

$$\sigma_{bc}=\frac{\overline{\sigma_s}\alpha_s}{n\ (1-\alpha_s)}=\frac{210{,}1x0{,}41}{15(1-0.41)}=9{,}73MPa<16{,}8\ \text{MPa}$$

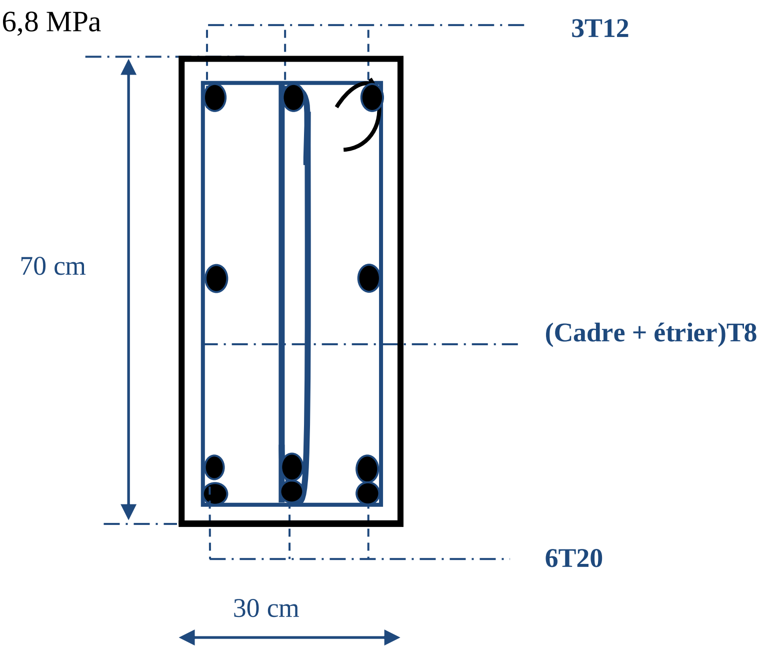
4. Dispositions Constructives :

L'armature inférieure :

A_{adopt} = A_S(6T20) = **18,85 cm²**

L'armature supérieure (de montage) :

A'_{sadopt} (3T12) = **3,39 cm²**



Exercice N°(4) :

1. calcul du ferraillage longitudinal à l'ELU :

$$f_{bu} = \frac{0{,}85 f_{c28}}{\gamma_b} \Rightarrow f_{bu} = 11{,}33\ \text{MPa}$$

Le moment reduit :

$$\mu = \frac{Mu}{bd^2 f_{bu}} = \frac{0{,}364.10^6}{30 \times (54)^2 \times 11{,}33} \Rightarrow \mu = 0{,}367$$

$\mu > 0.186 \Rightarrow$ pivot B $\Rightarrow$ on calcule $\mu_l = 0{,}8\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$

D'après le théorème des triangles semblables, on a : $\alpha_l = \dfrac{3{,}5\,{}^0\!/_{00}}{3{,}5\,{}^0\!/_{00} + \varepsilon_l}$

et $\varepsilon_l = \dfrac{fe}{\gamma_s E_s} = \dfrac{400}{1{,}15x2x10^5} = 1{,}74 \text{ x } 10^{-3} = 1{,}74$ ‰

$\Rightarrow \alpha_l = 0{,}668 \Rightarrow \mu_l = 0{,}392$

On remarque que $\mu = 0{,}367 < \mu_l = 0{,}392 \Rightarrow$ section simplement armée ($A_s' = 0$) $\Rightarrow \varepsilon_s > \varepsilon_l$

$\Rightarrow \sigma_s = \dfrac{fe}{\gamma_s} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}83$ MPa

$$\alpha = 1{,}25 \times \left(1 - \sqrt{(1 - 2\mu)}\right) = 0{,}605$$

$$\beta = (1 - 0{,}4\alpha) = 0{,}758$$

Donc, la quantité d'armature tendue sera égale à :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{0{,}364x10^{+6}}{0{,}758x54x347{,}83} \rightarrow A_s = 25{,}57\ cm^2$$

Condition de non fragilité :

$$A_s \geq A_{min} = \frac{0{,}23 b d f_{t28}}{f_e} = 1{,}68\ cm^2$$ Avec ; $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1{,}8$ MPa Condition vérifiée.

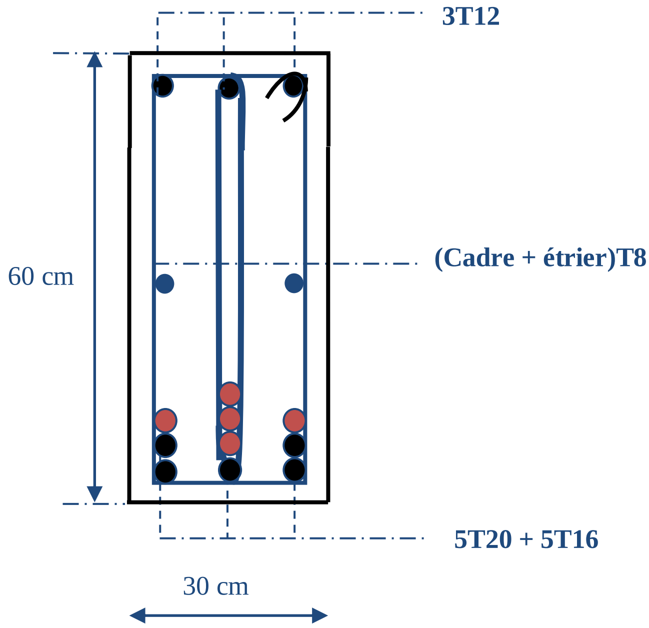
Dispositions constructives :

L'armature inférieure :

$A_{adoptée}$(5T20 + 5T16) = 15,71 + 10,05 = **25,76 cm²**

L'armature supérieure : (montage)

A'$_s$ (3T12) = **3,39 cm²**



2. Vérification des contraintes à l'ELS :

M_{ser} = 0.251 MN.m

Position de l'AN:

$$\frac{1}{2}by^2 - 15A_s(d-y) = 0 \quad \Rightarrow 15y^2 + 386{,}4y - 20865{,}6 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 1183{,}74$$

⇒ y = 26,58 cm

Moment d'inertie :

$$I = \frac{by^3}{3} + 15A_s(d-y)^2$$

⇒ I = 478 304,06 cm^4

a) La contrainte de compression dans le béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}y}{I} = \frac{0{,}251x10^9\,x26{,}58x10}{478304{,}06x10^4} = 13{,}95 \text{ MPa} > \overline{\sigma_b} = 0{,}6f_{c28} = 12 \text{ MPa} \qquad \text{(non vérifiée)}$$

Il faut augmenter les dimensions de coffrage de la section ou introduire des aciers comprimés

b) La contrainte de traction dans les aciers:

Fissuration nuisible $\Rightarrow \overline{\sigma_s} = \min\left\{\frac{2}{3}fe\,,110\sqrt{\eta f_{t28}}\right\}$

η = 1,6 (acier à haute adhérence).

$$\overline{\sigma_s} = \min\{266{,}66\ ;\ 186{,}68\} = 186{,}68\text{MPa.}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n\,M_{ser}(d-y)}{I} = \frac{15\times 0{,}251\times 10^9(54-26{,}58)\times 10}{478304{,}06\times 10^4} = 215{,}84\ MPa \succ \overline{\sigma_s} = 186{,}68\text{MPa} \quad \text{(non}$$

vérifiée)

Il faut recalculer le ferraillage à l'E.L.S.

3. Recalculer le ferraillage à l'ELS :

La position limite de l'axe neutre : $\Rightarrow \overline{\alpha_s} = \frac{\overline{y_s}}{d} = \frac{15\overline{\sigma_{bc}}}{15\overline{\sigma_{bc}} + \overline{\sigma_{st}}} = \frac{15x12}{15x12 + 186{,}68} = 0{,}491$

Le moment résistant béton, M_{rb},:

$$\Rightarrow M_{rb} = b\cdot\overline{\alpha_s}d^2\cdot\frac{\overline{\sigma_{bc}}}{2}\left(1-\frac{\overline{\alpha_s}}{3}\right) = 215{,}536 \text{ KN.m}$$

On remarque que M_{ser} = 251 KN.m > M_{rb} = 215,536 KN.m ⇒ section doublement armée ($A'_s \neq 0$).

Donc, la quantité d'armature tendue sera égale à :

$$\boxed{A_s = \frac{M_{rb}}{\overline{\sigma_{st}}\,d(1-\overline{\alpha_s}/3)} + \frac{M_{ser}-M_{rb}}{(d-d')\overline{\sigma_{st}}}} = \mathbf{29{,}53\ cm^2}$$

Et la quantité d'armature comprimée sera égale à :

$$\boxed{A_s^{'} = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d^{'}) \cdot \sigma_{sc}}} \quad \text{avec ;} \quad \boxed{\sigma_{sc} = \frac{15\overline{\sigma_{bc}} \cdot (\overline{\alpha_s} - \frac{d'}{d})}{\overline{\alpha_s}}} = 139{,}26 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$ **A'$_s$ = 5,31 cm^2**

<u>Dispositions constructives :</u>

L'armature supérieure comprimée :

A'$_{adoptée}$(3T16) = **6,03 cm^2**

L'armature inférieure tendue :

A$_{adoptée}$(6T20 + 6T16) = 18,85 + 12,06 = **30,91 cm^2**