

## **Partie 1 - Bases physiques et théoriques de l'hydraulique souterraine**

### **I. L'écoulement dans les terrains poreux. La loi de Darcy**

#### **Introduction :**

L'**hydraulique souterraine** est la discipline géomécanique qui étudie mathématiquement l'écoulement gravitaire naturel (nappe aquifère...) ou provoqué (drainage, pompage...) de l'eau souterraine libre – ni adsorbée, ni capillaire - dans les milieux virtuels perméables, sous l'effet d'un gradient de charge ou de pression ; elle utilise des modèles théoriques de forme et de comportement hydrodynamiques qui doivent être compatibles avec les modèles réalistes de réseaux naturels que décrit l'hydrogéologie ; cette dernière étudie qualitativement la présence d'eau libre dans le sous-sol, en s'attachant à la nature lithologique (grave, sable, grès, calcaire...) et à l'état (poreux, fissuré, karstique...) des matériaux aquifères, et à sa circulation dans les réseaux souterrains réels, organisés selon la structure géologique des formations aquifères superficielles (nappes alluviales...) ou profondes (nappes captives...). Ainsi, l'hydraulique souterraine et l'hydrogéologie sont indissociables, interdépendantes et complémentaires.

La présence de l'eau dans le sol joue un rôle très important, on s'intéresse à l'eau libre qui peut circuler entre les grains, cette eau saturant un massif de terrain construit une nappe souterraine, le plus souvent à surface libre ou parfois localisée entre deux formations imperméables c'est la nappe captive.

#### **I.1. Généralités :**

##### **I.1.1. Définition du milieu poreux :**

Les milieux poreux sont, par définition, constitués de deux domaines distincts: l'un occupé par un fluide (air, eau, gaz carbonique, etc.) et qui constitue l'ensemble de ce que l'on appelle "les vides", espace des vides ou "espace poreux"; l'autre est fait de matière solide.

Pour qu'une phase fluide puisse percoler dans un milieu poreux donné, au moins une partie de sa porosité doit être constituée de pores interconnectés. Ces pores, dont les formes et les dimensions sont d'une grande diversité, constituent les réseaux poreux qui offrent un grand nombre de possibilités au cheminement d'un fluide. Cet espace est illustré sur la figure 1.

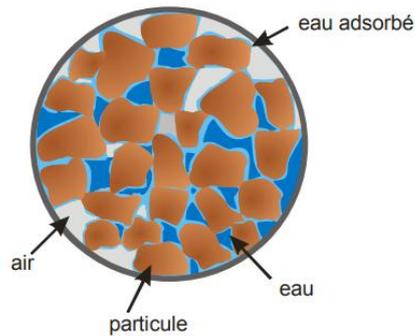


Figure1 : Représentation d'un milieu poreux

### I.1.2. Les types d'eau dans le sol :

L'eau qui se trouve dans les sols est soumise à plusieurs forces. Les molécules d'eau subissent d'abord une attraction réciproque constituant la cohésion de l'eau, et leur permettant de rester groupées entre elles.

- **L'eau en phase vapeur** : D'une manière générale un sol non saturé a l'atmosphère de ses pores saturés en vapeur sauf si une circulation importante d'air est possible.
- **L'eau hygroscopique** : C'est de l'eau adhérant fortement par adsorption à la surface des particules du sol, elle est maintenue à la surface des particules par des forces d'attraction moléculaire. Elle provient de l'humidité de l'atmosphère en contact avec les particules et forme autour d'elles une pellicule adhésive dont l'épaisseur varie suivant la nature et la surface spécifique du minéral d'une part, la tension de vapeur d'autre part.
- **L'eau pelliculaire** : Entoure les particules de sol et leur eau hygroscopique. Elle est soumise à des forces d'attraction moléculaires de la part de la couche d'eau hygroscopique qui diminuent rapidement quand on s'éloigne de la particule. Le jeu des forces moléculaires entre particules voisines peut permettre à cette eau de se déplacer sous forme liquide.
- **L'eau capillaire** : Elle est retenue dans les pores du sol par les forces de capillarité dues à la tension superficielle qui se développe à l'interface eau-air. Elle est soumise à l'action de la pesanteur et elle transmet les pressions.
- **L'eau libre ou gravifique** : C'est celle qui obéit uniquement à la pesanteur, s'écoule dans le sol et peut être extraite par des techniques simples. Elle transmet la pression hydrostatique, et sous l'action de différences de pression, elle peut circuler librement.

## I. 2. Classification des aquifères :

### I.2.1. Définitions :

#### a. Aquifère :

Un aquifère est une unité géologique saturée au moins en partie en eau, et constitué de matériaux suffisamment perméables pouvant transmettre et capter des quantités significatives d'eau d'une nappe souterraine sous des gradients hydrauliques ordinaires ou faibles.

#### b. Nappe phréatique :

Les nappes phréatiques sont des réservoirs d'eaux souterraines stockées à faible profondeur dans des roches poreuses et perméables qui composent les zones aquifères. Il existe des nappes souterraines profondes de plusieurs centaines de mètres, mais les nappes dites phréatiques sont des nappes suffisamment proches de la surface pour être accessibles aux activités humaines.

#### c. Zone non saturée :

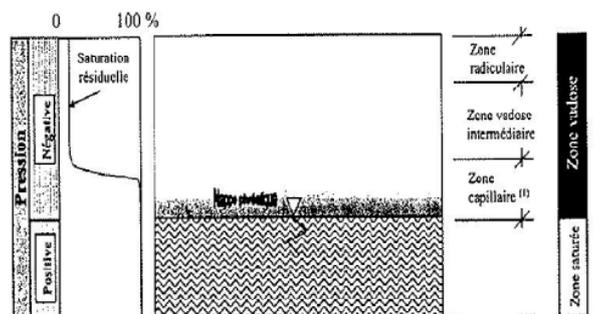
La zone non saturée correspond à la partie située au-dessous de la surface du sol et au-dessus de la nappe phréatique des aquifères. On distingue :

- **Zone vadose**, La zone vadose est la partie du sol qui se trouve au-dessus de la nappe phréatique, ou les pores sont partiellement saturés en eau (zone radulaire, vadose, intermédiaire) et saturée en eau (zone capillaire).
- **Zone capillaire**, La zone capillaire est la partie du sol située au-dessous de la nappe phréatique et au-dessus de la limite de la remontée capillaire.

#### c. Zone saturée :

La zone saturée correspond à la partie du sol située sous la nappe phréatique (surface libre des aquifères) ou les pores sont complètement remplis d'eau. Elle est caractérisée par une pression d'eau positive.

La figure suivante récapitule l'ensemble des zones d'écoulements souterrains.



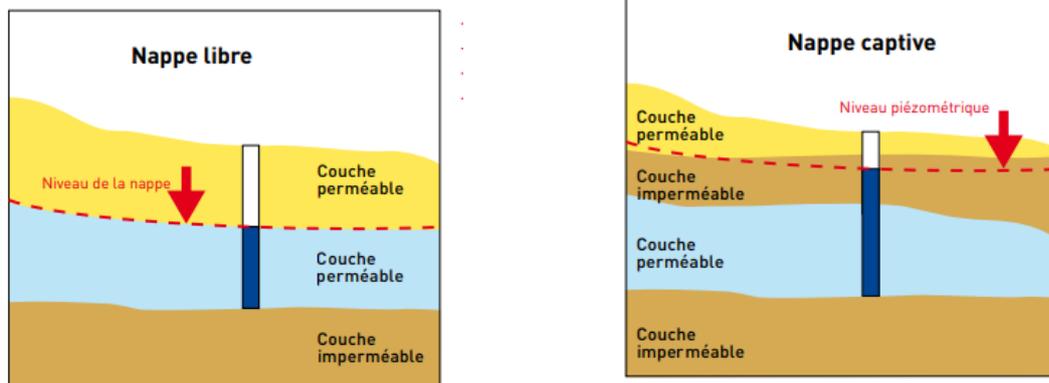
(1) Gravier fin: 2.5 cm  
Sable grossier: 13.5 cm  
Silt: 105.5 cm

(Adapté de Tood, 1980)

### I.2.2. Types d'aquifères :

Indépendamment du milieu géologique de l'aquifère, trois classes d'aquifère se distinguent selon le type de nappe phréatique qu'ils contiennent,

- Un aquifère non-confiné contient une nappe libre, cas d'un écoulement gravitaire
- Un aquifère confiné contient une nappe captive, cas d'un écoulement artésien et ;
- Un aquifère semi-confiné contient une nappe semi-captive.
  - Les nappes d'eau souterraine sont de l'eau contenue dans les pores ou les fissures des roches saturées par les eaux de pluie qui se sont infiltrées .
  - Les nappes libres communiquent avec la surface et sont généralement peu profondes ; l'eau percole jusqu'à la nappe dont le niveau monte ou baisse en fonction des précipitations. Elle se renouvelle rapidement. Les nappes phréatiques appartiennent à cette catégorie.
  - Les nappes captives sont comprises entre deux couches géologiques imperméables qui confinent l'eau sous pression. Celle-ci peut jaillir dans des forages dits artésiens. Les nappes captives sont souvent profondes de quelques centaines de mètres voire plus. Elles se renouvellent plus lentement. Leur alimentation provient pour partie de la zone affleurante de l'aquifère.



### I.3. Ecoulement de l'eau souterraine :

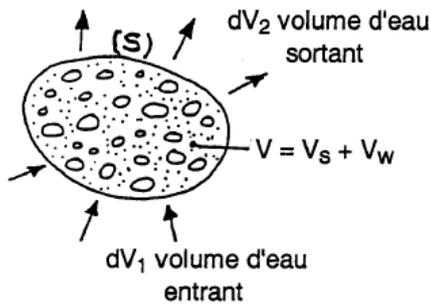
#### I.3.1. Hypothèses -Condition de continuité :

Dans les études d'écoulements en milieu poreux, on utilise fréquemment les hypothèses suivantes :

- 1- sol saturé
- 2- eau et grains incompressibles
- 3- phase liquide continue

Soit un volume quelconque de sol saturé (V), limité par une surface (S) et traversé par un écoulement. Dans un intervalle de temps donné dt un volume d'eau  $dV_1$  pénètre à l'intérieur de (S) et un volume d'eau  $dV_2$  en sort. Si on suppose que les grains n'ont pas bougé, c'est-à-dire si (V) est un domaine fixe de l'espace, et en vertu de l'hypothèse 2, le volume d'eau  $V_w$  contenu dans (S) reste le même.

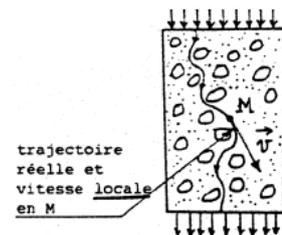
Par suite,  $dV_1 = dV_2$ . Le débit est conservé. **C'est la condition de continuité**



**I.3.2. Vitesse de l'eau dans le sol :**

Soit  $q$  débit d'eau s'écoulant dans un tube du sol au travers une surface d'aire totale  $S$  (grains + vides).

Par définition, la vitesse de décharge de l'eau dans le sol noté  $v$  est égale au rapport :  $v = q/S$

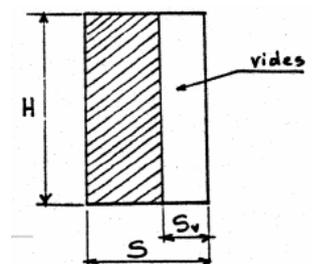


En pratique est utilisée dans les calculs de débits .C'est une vitesse fictive apparente.

En considérant que l'eau ne circule que dans les vides, on peut définir la vitesse moyenne réelle ,notée  $v'$  ,définie par :

$$v' = \frac{q}{S_v} = \frac{q}{nS} = \frac{v}{n} \quad V_v = n \cdot V = \underbrace{n}_{\text{porosité}} \cdot \underbrace{S \cdot H}_{S_v}$$

$$v' \geq v$$



**I.3.3. Charge hydraulique en un point**

La charge hydraulique conditionne l'énergie d'un point de la nappe d'eau. Comme l'eau se déplace du point à haute énergie vers le point à basse énergie. Au laboratoire, on mesure la pression généralement à l'aide de manomètres alors que sur le terrain on utilise des tubes piézométriques. Il est recommandé de mettre en place en un même endroit plusieurs

piézomètres ouverts chacun à des profondeurs différentes. On peut aussi mesurer les charges hydrauliques correspondant à différentes profondeurs.

La charge hydraulique en un point M, est par définition :

$$h_M = z_M + \frac{u_M}{\gamma_w} + \frac{v_M^2}{2g}$$

↓ *énergie potentielle*  
↓ *énergie cinétique*

Elle s'exprime en mètre d'eau. Cette charge correspond à l'énergie totale d'une particule d'eau de masse unité :

$z_M$  : cote du point M par rapport à un plan horizontal de référence .

$u_M$  : pression de l'eau interstitielle en M.

$v_M$  : vitesse de l'eau.

Or les vitesses dans les sols sont toujours faibles rendant négligeable le terme en  $v^2/2g$ . D'où :

$$h_M = z_M + \frac{u_M}{\gamma_w}$$

charge de position  
 charge de pression d'eau  
 ↪ *valeur relative dépendant de la position du plan de référence*

### I.3.4. Gradient hydraulique :

D'après la théorie de Bernoulli :

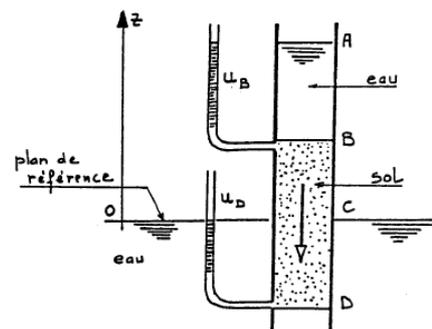
- Si  $h_1 = h_2 = cte$  il n'y a pas d'écoulement, la nappe est en équilibre.
- Par contre, si  $h_1 > h_2$  il y a écoulement de M vers N ((dans le sens de l'écoulement) et la perte de charge  $h_M - h_N$  correspond à l'énergie perdue en frottement. La perte de charge est à la fois le moteur et la conséquence de l'écoulement.

On appelle gradient hydraulique la quantité :

$$i = \frac{h_1 - h_2}{l}$$

#### Exemple de calcul de gradient Gradient hydraulique dans le sol (entre B et D)

Considérons un échantillon cylindrique de sol traversé par un écoulement vertical descendant .



- charge au point B

$$h_B = BC + AB = AC$$

- charge au point D

$$h_D = -CD + CD = 0$$

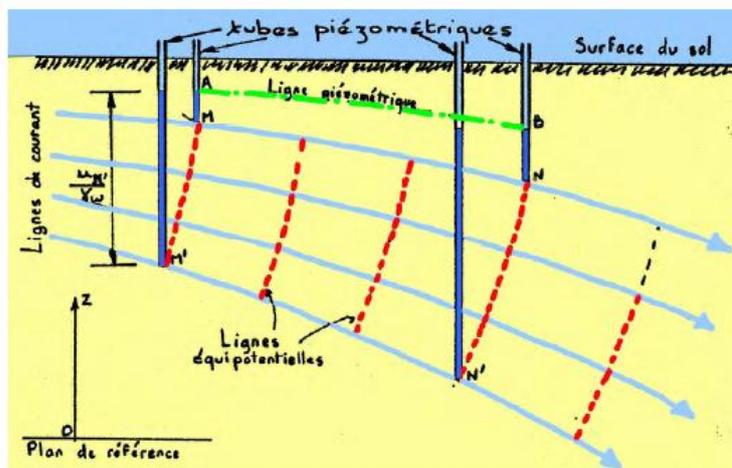
- perte de charge

$$\Delta h = h_B - h_D = AC$$

Gradient hydraulique entre B D :

$$i = \frac{-dh}{dl} = \frac{h_B - h_D}{BD} = \frac{AC}{BD}$$

Piézomètre et ligne piézométrique



### I.3.5. La loi de DARCY :

Les expériences de Darcy, qui sont à la base de l'hydraulique souterraine, étaient relatives à l'écoulement de l'eau dans une conduite verticale remplie de sable en régime permanent. Dans un tel cas, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles.

La loi de DARCY exprime que la vitesse de décharge est proportionnelle au gradient hydraulique :

$$v = k \cdot i$$

La figure suivante représente la variation du gradient hydraulique dans un sol en fonction de la vitesse.

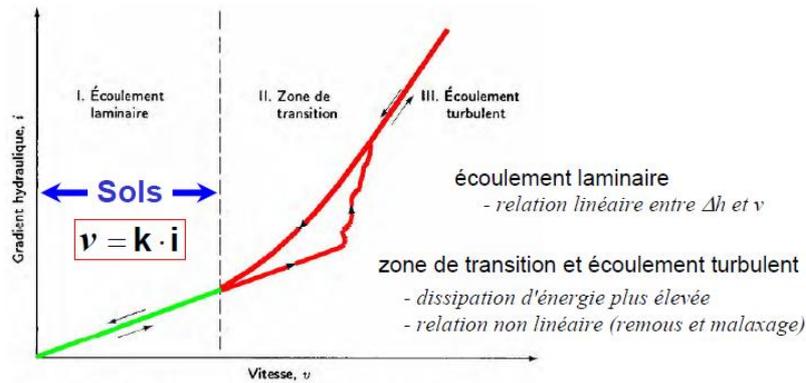
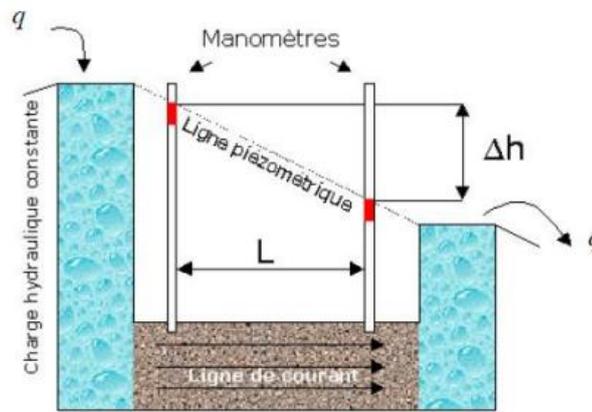


Figure 7.1 Zones d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent. (D'après Taylor, 1948.)

La circulation de l'eau s'effectue en régime laminaire. Le coefficient ainsi introduit est une caractéristique du sol étudié. Il est appelé coefficient de perméabilité. Sa dimension est celle d'une vitesse puisque  $i$  est sans dimension. La perméabilité varie beaucoup avec la nature du terrain.

Autre représentation de la loi de Darcy :

$$q = v \cdot S = k \cdot i \cdot S = k \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot S$$



## II. Généralisation de la loi de DARCY :

En réalité les écoulements dans un sol peuvent rarement être assimilés à des écoulements à une dimension, pour lesquels les différents « filets liquides » sont rectilignes et parallèles comme dans le perméamètre.

La loi de DARCY n'est en fait qu'une relation entre deux modules, module de la vitesse fictive et module du gradient hydraulique, les directions de l'écoulement ne jouent aucun rôle puisque la loi est définie pour un écoulement à une dimension.

Pour l'étude générale de l'écoulement dans un massif on est conduit à généraliser la loi de DARCY toujours dans l'hypothèse d'un régime permanent, et en raisonnant à l'échelle macroscopique.

- **DOMAINE DE VALIDITE DE LA LOI DE DARCY**

On s'est aperçu rapidement que la loi de DARCY n'était plus valable dans le domaine des vitesses élevées; quand on augmente la perte de charge dans un perméamètre jusqu'à des valeurs relativement élevées, on constate une déviation par rapport à la loi de DARCY (le débit croît moins rapidement), cette déviation se manifeste d'autant plus vite que la granulométrie du sol devient plus grossière.

La caractéristique essentielle des écoulements suivant la loi de DARCY, se retrouve dans les cas d'écoulements laminaires. Ainsi, en est-il de l'écoulement laminaire dans les tubes capillaires ce qui a conduit à assimiler à un faisceau de tube de Poiseuille, le réseau très complexe des canaux interstitiels à travers lesquels filtre l'eau.

### **III. Permeabilite K :**

La loi de DARCY pose donc la proportionnalité de la vitesse de décharge et du gradient hydraulique. Le coefficient de proportionnalité  $k$  a la dimension d'une vitesse, c'est le coefficient de perméabilité, il dépend à la fois du milieu poreux et du fluide. On l'exprime en général en m/s ou en cm/s.

#### **III.1. Mesure de la perméabilité en laboratoire**

Le coefficient de perméabilité d'un sol est une caractéristique intrinsèque au sol et qui dépend :

- de la granulométrie du sol et de sa nature ;
- de sa structure.
- Plus un sol est fin, plus les pores sont petits, et plus les frottements et donc les pertes de charges sont importants, donc plus le coefficient de perméabilité sera petit. On dit parfois par simplification que les argiles sont imperméables, en fait elles ont une perméabilité très faible.
- Plus un sol est dans un état de compacité élevé, plus la porosité est faible et l'espace dans lequel l'eau peut circuler réduit, donc moins le sol sera perméable.

Deux méthodes qui sont des applications directes de la loi de DARCY sont utilisées en laboratoire :

- 1- Mesure sous charge constante pour les sols très perméables.
- 2- Mesure sous charge variable pour les sols peu perméables.

Le principe de la mesure consiste à :

- relier le débit  $q$  traversant un échantillon cylindrique de sol saturé (écoulement uniforme)
- la charge  $h$  sous laquelle se produit l'écoulement. Suivant l'ordre de grandeur de la perméabilité du sol étudié on sera amené à travailler sous charge constante ou sous charge variable
- utilisation de la loi de Darcy

### III.1.1. Perméamètre à charge constante :

Un perméamètre est composé d'une enceinte étanche dans laquelle est placé un échantillon de sol de section ( $S$ ) et de longueur  $l$ . les deux extrémités de l'échantillon sont reliées à deux tubes par l'intermédiaire de pierres poreuses.

Dans le perméamètre à charge constante (figure ci-dessous), on maintient à l'aide de trop-pleins la différence de charge ( $h$ ) entre les deux faces de l'échantillon constante et l'on mesure la quantité d'eau ( $q$ ) qui est passée pendant un temps donné ( $t$ ).

Le niveau de l'eau dans le réservoir étant maintenu constant, on a, en prenant le plan de référence au niveau de sortie de l'eau (pour les sols de grande perméabilité  $k > 10^{-5}$  m/s → sables

- utilisation de la loi de Darcy

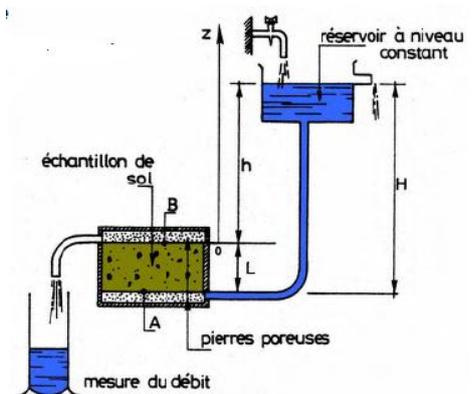
$$v = \frac{q}{S} = ki = k \frac{\Delta h}{\Delta L} = k \frac{h}{L}$$

d'où :

$$k = \frac{q}{S \cdot i} = \frac{q \cdot L}{S \cdot h}$$

avec  $q = V/t$  et  $S$  section de l'échantillon.

L'écoulement dans l'échantillon est uniforme.



### III.1.2. Perméamétrie à charge variable

Dans le cas des faibles perméabilités, l'essai à charge constante serait trop long, les débits étant très faibles. On procède alors à charge variable : l'eau provient d'un tube de faible diamètre (section  $s$ ) relié à l'échantillon. Au fur et à mesure que l'écoulement se produit, le niveau de l'eau dans le tube baisse (charge variable). On mesure le temps  $t$  nécessaire pour que l'eau descende du niveau  $h_1$  au niveau  $h_2$  (figure suivante). Dans cet essai, le mouvement n'est pas permanent, mais le phénomène est lent et on suppose que la loi de Darcy est applicable à chaque intervalle de temps élémentaire avec les notations de la figure (plan de vient, pour un temps intermédiaire).

En écrivant que le volume d'eau qui traverse l'échantillon pendant l'intervalle de temps  $dt$  est égal à la diminution de volume d'eau dans le tube, il vient :

$$dV = q \cdot dt = -s \cdot dh$$

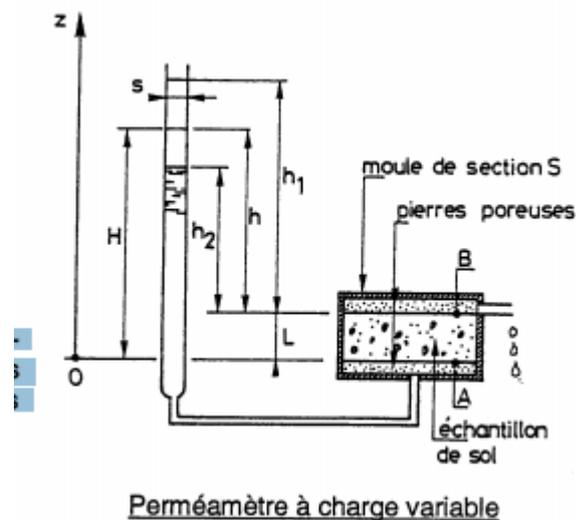
En remplaçant  $q$  :

$$s \cdot k \cdot \frac{h}{L} \cdot dt = -s \cdot dh$$

$$k \cdot dt = -\frac{s}{S} \cdot L \cdot \frac{dh}{h}$$

Après intégration :

$$k = \frac{s}{S} \cdot \frac{L}{t} \cdot \ln \frac{h_1}{h_2}$$



### III.1.3. Perméabilité moyenne équivalente des terrains stratifiés

Dans le cas des terrains stratifiés, chaque couche a sa propre perméabilité qui influe sur la perméabilité d'ensemble du massif. Le terrain perméable d'épaisseur totale  $H$  et composé de  $(n)$  couches successives d'épaisseur  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  et de coefficient de perméabilité  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  respectivement.

Un sol stratifié horizontalement en plusieurs couches homogènes et isotropes constitue un cas particulier de milieu hétérogène d'intérêt. Comme la conductivité hydraulique varie d'un horizon à l'autre, le comportement hydraulique un tel sol sera différent selon la direction de l'écoulement. L'écoulement vertical dans un tel sol est considéré comme un écoulement en série alors que l'écoulement horizontal est considéré comme un écoulement en parallèle.

**a . Écoulement en série (l'écoulement vertical) :**

La conductivité hydraulique équivalente de tels sols peut être facilement déterminée. La figure suivante représente un écoulement en série.

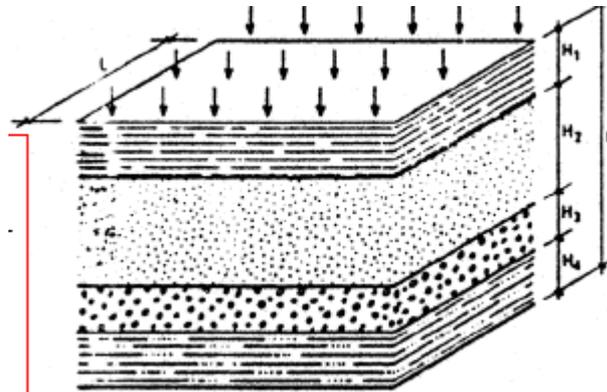


Schéma d'un écoulement en série. (verticale)

- le débit passe successivement dans chacune des couches,
- les débits dans chacune des couches sont égaux .
- la perte de charge dans le système est égale à la somme des pertes de charge dans chacune des couches,
- la conductivité hydraulique équivalente s'énonce :

$$\frac{1}{k_v} = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{k_i}$$

ou encore :

$$k_v = \frac{H}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{k_i}}$$

$K_v$  = Conductivité hydraulique équivalente vertical.

**b.Écoulement en parallèle :**

Quant à l'écoulement parallèle, il est représenté schématiquement par la figure suivante :

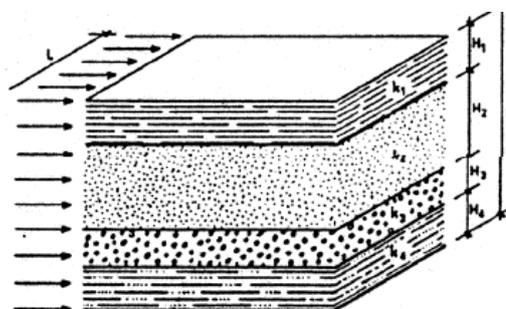


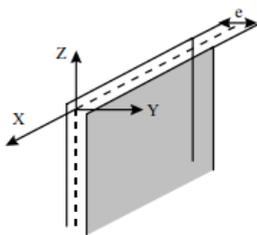
Schéma d'un écoulement en parallèle. ( horizontal)

- le débit total est égale à la somme des débits de chaque couche .
- la perte de charge est la même pour toutes les couches des pertes de charge dans chacune des couches,
- la conductivité hydraulique équivalente s'énonce :

$$k_h = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} k_i \cdot H_i$$

#### IV. L'écoulement dans les terrains fissurés

En hydraulique souterraine, on parle en générale de milieu fissuré par opposition au milieu poreux, le caractère discontinu du premier s'opposant au caractère continu du second.



Schématisme d'une fissure par deux plans parallèles et lisses espacés d'une épaisseur constante e permettant un écoulement plan de Poiseuille.

##### IV.1.Calcul de la vitesse moyenne

L'intégration de l'équation de Navier-Stokes permet d'obtenir l'expression de q dans la direction z d'une fissure simple d'ouverture e :

$$q = -\frac{\rho g}{\mu} \frac{e^2}{12} \frac{dH}{dz}$$

Ceci nous permet d'introduire la conductivité hydraulique de la fissure (Coefficient de perméabilité (m/s): dépend du milieu poreux ET du fluide) qui vaut :

$$k = -\frac{e^2 \rho g}{12 \mu}$$

- Et Perméabilité intrinsèque (m<sup>2</sup>), ne se rapporte qu'au milieu poreux et ne dépend pas du fluide :

$$K = \frac{e^2}{12}$$

**IV.2. Vitesse de Darcy en milieu fissuré :**

- fissures horizontales: la gravité n'intervient pas, seul le gradient de pression intervient;
- fissures verticales: il faut rajouter la gravité.

La vitesse est :

$$\vec{V} = -\frac{e^2}{12 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{\text{grad}} h = -k \cdot \vec{\text{grad}} h$$

$\vec{V}$  : vitesse du fluide [m.s<sup>-1</sup>]

k: conductivité hydraulique directionnelle de la fracture [m.s<sup>-1</sup>].

Une analogie entre cette relation et la loi de Darcy relative au milieu poreux peut être écrite sous la forme:

$$\vec{V} = -\frac{K \cdot \rho \cdot g}{\mu} \cdot \vec{\text{grad}} h = -k \cdot \vec{\text{grad}} h$$

K: perméabilité intrinsèque du milieu poreux [m<sup>2</sup>]

k: coefficient de perméabilité [m.s<sup>-1</sup>]

Ces calculs, classiquement appliqués au milieu poreux, seront donc transposables au cas des écoulements fissuraux.

- **Loi cubique**

On cherche le débit par unité de longueur dans la direction y. *U.e.l.* D'où

$$\vec{Q} = -\frac{e^3}{12 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{\text{grad}} h$$

e: écartement entre les deux plaques parallèles et lisses [m].

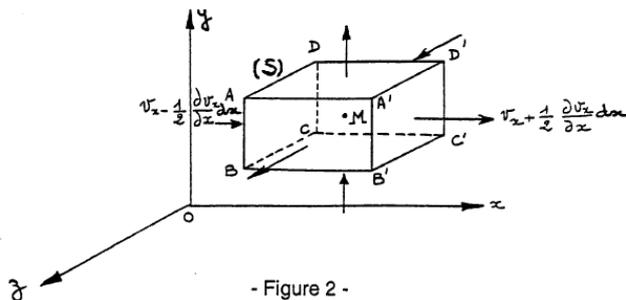
Le débit  $Q_f$  de l'écoulement dans cette fissure sur une largeur L est donc donné par :

$$Q_f = -\frac{\rho g L}{\mu} \frac{e^3}{12} \frac{dH}{dz}$$

## V. Les écoulements permanents suivant la loi de Darcy - Mise en équation et généralités

### V.1. L'équation de la continuité

L'équation de la continuité permet d'évaluer les potentiels. La figure suivante permet de définir le bilan sur un élément de référence infinitésimal. Compte tenu que le milieu est saturé et que le fluide (l'eau) est incompressible, la somme des volumes entrants et sortants de cet élément est nulle.



- le volume d'eau entrant :

$$dV_1 = \left[ \left( v_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz + \left( v_y - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) \cdot dz \cdot dx + \left( v_z - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy \right] \cdot dt$$

- Le volume d'eau sortant :

$$dV_2 = \left[ \left( v_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz + \left( v_y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) \cdot dz \cdot dx + \left( v_z + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy \right] \cdot dt$$

Soit  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  la vitesse de l'eau au centre M de cet élément de volume.

La condition de continuité  $dV_1 = dV_2$  s'écrit donc après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{div } \vec{v} = 0} \quad (1)$$

Remarques:

- C'est aussi la loi de conservation de la masse ( hypothèse 2: la masse volumique de l'eau reste constante).
- La relation (1) peut être obtenue sans faire d'hypothèse sur la forme du volume élémentaire.

- En hydraulique des sols on a le plus souvent affaire à des régimes permanents c'est à dire des écoulements stabilisés pour lesquels la vitesse de l'eau en tout point du massif est indépendante du temps.

### V.2. Milieu Homogene et isotrope

Le coefficient perméabilité  $k$  a la même valeur en tous points et dans toutes les directions. La loi de Darcy généralisée exprime que le vecteur vitesse de décharge et le gradient hydraulique sont proportionnels :

$$\vec{v} = k \cdot \vec{i}$$

En tout point M du milieu perméable, vecteur gradient hydraulique est tangent à la ligne de courant passant par ce point et il est orienté dans le même sens.

Comme par ailleurs :

$$\vec{i} = - \overrightarrow{\text{grad}} h$$

La loi de Darcy peut s'écrire :

$$\vec{v} = - k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h = \overrightarrow{\text{grad}} (- k \cdot h)$$

La fonction :  $\phi(x,y,z) = - k \cdot h$  appelée potentiel des vitesses (c'est-à-dire donnant les composantes de la vitesse par dérivation:)

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Ainsi, notamment le long des 3 axes de coordonnées :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = - k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - k \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = - k \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

### V.3. Milieu Hétérogène -notion de tenseur

On considérera que le gradient de la charge hydraulique et la vitesse de décharge sont des vecteurs, mais qui ne sont pas colinéaires.

On pourra les déduire l'un de l'autre par un opérateur linéaire, le tenseur de Perméabilité ( $k$ ) :

$$\vec{v} = - (\mathbf{k}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h$$

Où :

$$(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_y & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{yy} & k_z \end{pmatrix}$$

Cas particulier : Si  $ox, oy, oz$  sont les directions principales de l'écoulement le tenseur de perméabilité est particulièrement simple :

$$(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

La loi de DARCY s'écrira :

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

Soit, en raison de l'équation de continuité :

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0.$$

Ce n'est pas une équation de LAPLACE, la charge hydraulique n'est pas une fonction harmonique. Nous effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned} X &= x \sqrt{\frac{k}{k_x}} \\ Y &= y \sqrt{\frac{k}{k_y}} \\ Z &= z \sqrt{\frac{k}{k_z}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} = 0$$

L'étude de l'écoulement à travers un milieu anisotrope se ramène donc à l'étude d'une équation de LAPLACE, si l'on transforme au préalable cet écoulement par la transformation affine, on obtient un écoulement isotrope correspondant.

L'écoulement transformé, ainsi obtenu, sera un écoulement fictif se déduisant géométriquement de l'écoulement en milieu anisotrope considéré par la transformation, et s'effectuant en milieu isotrope de perméabilité «  $k$  ».

En des points correspondants, il y a entre les composantes des vitesses de l'écoulement réel et celles de l'écoulement isotrope correspondant ( $U, V, W$ ) les relations :

$$v_x = \sqrt{\frac{K_x}{K}} U$$

$$v_y = \sqrt{\frac{K_y}{K}} V$$

$$v_z = \sqrt{\frac{K_z}{K}} W$$

Ce qui permettra d'établir la relation qui existe entre les débits traversant des surfaces correspondantes.

$$dQ = \sqrt{\frac{K_x K_y K_z}{K^3}} dQ'$$

En d'autres termes, le débit  $dQ'$  qui traverse le milieu isotrope correspond avec un coefficient de perméabilité  $K$  tel que :

$$K^3 = K_x K_y K_z \text{ est le même que celui qui traverse le milieu anisotrope réel.}$$

### **VI. Les écoulements non permanents suivant la loi de Darcy - Mise en équation et généralités**

Les régimes transitoires correspondent à l'évolution d'un système d'un état initial (permanent ou en équilibre) vers un état final (permanent ou en équilibre) provoquée par un changement à l'instant initial des sources.

Dans le cas d'un écoulement en régime transitoire on doit spécifier les conditions initiales et suivre la variation du comportement dans le temps.

L'état de saturation en eau du sol peut être variable. L'équation générale de l'écoulement devient :

$$C(H) \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = + \text{div}[K(H) \cdot \text{grad}(H)] + \sum \text{sources}$$

La saturation ou la teneur en eau devient la variable principale. Sous certaines conditions, cette équation peut être transformée pour prendre la forme suivante (équation parabolique):

$$\alpha_s \cdot \Delta H = \frac{\partial H}{\partial t}$$

On obtient alors *un problème de diffusion* de la teneur en eau, ou *de la charge hydraulique*, dont les solutions sont connues pour certaines conditions à la limite.

Les problèmes de diffusion:

- La consolidation des sols est un problème de diffusion de la pression interstitielle.
- L'infiltration de l'eau dans le sol se ramène à un problème de diffusion de la teneur en eau (ou de la tension).
- La diffusion de la chaleur ou d'espèces chimiques, est un problème bien connu.
- Le pompage des eaux souterraines ou le drainage, correspondent à des problèmes de diffusion de la charge hydraulique dans un sol.

## VII. L'action de l'eau interstitielle sur les milieux poreux

L'action de l'eau interstitielle sur le milieu poreux sont nombreux :

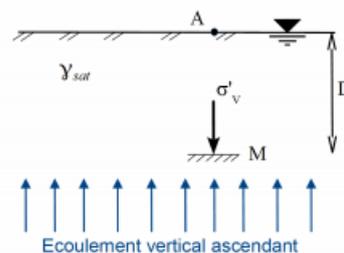
### VII.1. Erosion interne

Un phénomène d'érosion interne intervient lorsque la force d'écoulement est ascendante et de module supérieur au module de la force de pesanteur, c'est à dire si :

$$\gamma_w \cdot i > \gamma'$$

### VII.2. Phénomène de boullance

Dans une nappe en équilibre hydrostatique (sans écoulement), l'action de l'eau sur le squelette solide se réduit à la poussée d'Archimède s'exerçant sur les grains vers le haut. Mais lorsqu'il y a écoulement, apparaît une perte de charge qui traduit une dissipation d'énergie par frottement visqueux du fluide sur les grains du sol. On voit ainsi apparaître sur les grains du sol, une force créée par l'eau dirigée dans le sens de l'écoulement. Considérons le cas d'un écoulement vertical ascendant (homogène) tel que représenté sur la figure suivante. Le point M se trouve à une profondeur D et la point A est à la verticale de M.



### VII.3. Phénomène de renard

Dans le cas général d'un écoulement, vertical ou non, en milieu perméable,

- l'eau peut atteindre localement des vitesses élevées susceptibles d'entraîner les particules fines du sol ).
- De ce fait, le sol étant rendu localement plus perméable, la vitesse de l'eau augmente et le phénomène s'amplifie.
- Des éléments plus gros vont être entraînés tandis que l'érosion progressera de manière régressive (de l'aval vers l'amont) le long d'une ligne de courant .
- Un conduit se forme par où l'eau s'engouffre et désorganise complètement le sol . C'est le phénomène de renard.

