CHAPITRE 03 :

Intégration dans le domaine complexe
Et théorème de Cauchy

Le but de ce chapitre est de donner un sens à $\int_a^b f(z)dz$ ou a et b sont des nombres complexe reliés par une courbe (chemin ouvert ou fermé) et z est une variable complexe, nous allons donner plusieurs définitions et théorèmes de l'intégrale des fonctions holomorphe et analytique. (Chaque fonction analytique est holomorphe).
En plus le théorème fondamental du calcul des primitives dans R exprime le fait que chaque fonction continue f $[a,b] \to R$ possède une primitive F(x) et que :

$$\int_a^b f(x)dx \ = F(b) - F(a)$$

Nous allons étudier si ce résultat reste vrai dans C.
Dans le reste de ce chapitre nous allons annoncer le théorème de **Rouché**

1-Chemins et courbes :

Définition : un chemin ou une courbe dans $C \cong R^2$est une fonction continue d'un intervalle fermé dans C c.-à-d. :

$$\gamma[a,b] \to C$$
$$t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

x(t) et y(t) sont des fonctions continues sur R

On dit que le chemin est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Exemples : Donnons quelques exemples importants de chemins :

1- Soient $z_0 \in C \; et \; r \in R_+^*$:

Le chemin fermé

$$\gamma[0,2\pi] \to C$$
$$t \to \gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

Est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r (dans le sens direct).

2-Soient u , v$\in C$, le chemin ouvert

$$\gamma[0,1] \to C$$
$$t \to \gamma(t) = (1-t)u + tv$$

Est le segment orienté d'origine u et d'extrémité v.

3-les courbes y=f(x) ou x=g(y) peuvent être écrites sous la forme :

$$\gamma(t) = t + if(t)\ , resp : \gamma(t) = g(t) + it$$

2-Intégrale curviligne complexe :

Définition1 : soit $\gamma[a,b] \to C$ une courbe qui est continument différentiable par morceaux et soit f(z) une fonction définie et continue sur γ , on définit alors l'intégrale curviligne comme :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Exemples : 1-Soit : $\gamma(t) = re^{it} \quad \forall t \in [0,2\pi]$

le cercle de centre 0 et de rayon r > 0.

$$I_1 = \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^2 ire^{it}\, dt$$
$$= r^3 \int_0^{2\pi} ie^{3it}\, dt = r^3 i \left[\frac{1}{3i} e^{3it}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

2- mais pour $\quad I_1 = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\, dt$

$$\int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

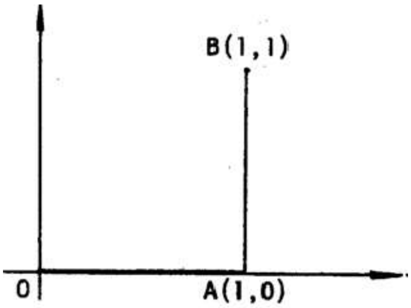
Définition2 : soit f(z)=u(x,y)+iv(x,y) une fonction définie et continue sur le chemin c ,une autre définition peut aussi nous être utile ;

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_c (udx - vdy) + i\int_c (vdx + udy)$$

Exemples importants :

1-évalué $\int_c z^2 dz$ sur le chemin (ouvert) suivant :

De l'origine à (1,0) sur l'axe des x et de (1,0) à (1,1) sur une parallèle A l'axe des y.



*Sur l'axe des x : z=x (0≤x≤1)

Et sur AB : z=1+iy (0≤y≤1)

Donc : $\int_c z^2 dz = \int_0^1 (x)^2\, dx + \int_0^1 (1+iy)^2 i\, dy$

$= \frac{2}{3}(-1+i)$

2-évalué $\int_c zdz$ sur une ligne droite allant de l'origine à (1+2i)

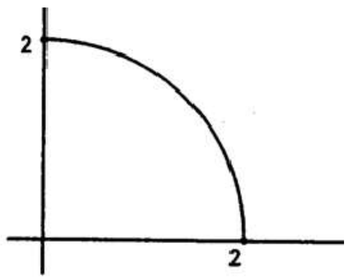
*Sur cette droite on a l'équation : y=2x

$\Rightarrow z = x + 2iy \Rightarrow$ dx=(1+2i)dy

Donc: $\int_c zdz = \int_0^1 (x+2ix)(1+2i)\, dx = \frac{1}{2}[(x+2ix)^2]_0^1$

$= \frac{-3+4i}{2}$

3-Evalué $\int_c dz$ sur un quart de cercle de centre O et de rayon 2



partant de l'axe des x et allons à l'axe des y.

*sur le cercle : z=$2e^{it} \Rightarrow dz = 2ie^{it}dt$

Donc : $\int_c dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2ie^{it}dt = [2e^{it}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1)$=2(i-1)

Remarques et propriétés :

a- $\int_c dz = z_2 - z_1$ sur un chemin allant de $z_1 = f(a)$ à $z_2 = f(b)$

b- sur le même chemin $\int_c zdz = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$.

De **a** et **b** on peut tirer que $\oint_c dz = 0$ et $\oint_c zdz = 0$ sur un chemin

Fermé car alors $z_2 = z_1$.

c- la notation $\oint_c \ f(z)dz$ est souvent utilisée pour désigner l'intégrale Sur un chemin fermé (dans le sens positif c.-à-d.sens anti-horaire).

d- $\int_{c_1+c_2} f(z)dz$=$\int_{c_1} f(z)dz$+$\int_{c_2} f(z)dz$.

e- $\int_c \ f(z)dz$=$-\int_{\bar{c}} \ f(z)dz$ on indique par $\bar{c}$ le chemin parcouru dans le sens inverse de celui que nous avons pris pour c.

f- il existe des propriétés équivalentes dans le cas des variables réelles Nous les acceptons sans preuve.

g- si T, U et V sont des Points consécutifs sur une courbe, la Propriété **e** peut s'écrire sous la forme : $\int_{TUV} f(z)dz$=$-\int_{VUT} f(z)dz$.

h- *Soit* U dans C *un ensemble ouvert et* f: $U \to C$ *une fonction continue. Les affirmations suivantes sont ´équivalentes:*

1-f(z) *est holomorphe dans* U, *c.-`a-d.,* C *-différentiable dans* U.

2-f(z) *est analytique dans* U *c.-`a-d, f(z) peut ˆêtre développée En une série convergente dans un disque* avec un rayon de convergence positif.

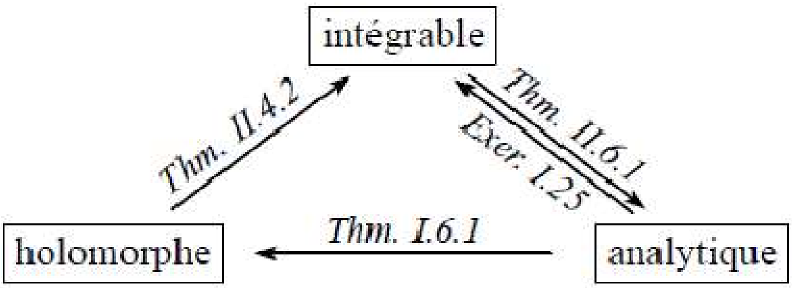


FIG. II.6: Équivalence de trois propriétés fondamentales

i- Un ouvert connexe *D*est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.

Dans le cas contraire est dit multiplement connexe.

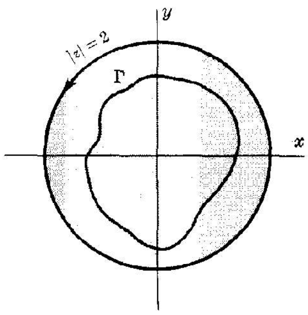


Fig. 4-2

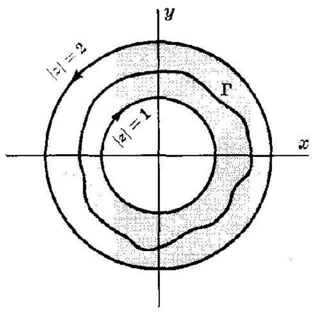


Fig. 4-3

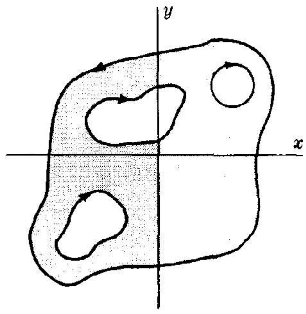


Fig. 4-4

(4-2) simplement connexe, (4-3) et (4-4) multiplement connexes. Intuitivement, un ouvert simplement connexe est "sans trou" cependant qu'un ouvert multiplement connexe en possède.

3-Existence de primitive :

Théorème1 : soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe D si a et b sont deux points quelconques de D et si $F'(z) = f(z)$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ce théorème est utile pour intégrer les fonctions dont les primitives sont connues.

Exemple:

$$\int_{3i}^{1+i} 4z\, dz = [2z^2]_{3i}^{1+i} = 2(1+i)^2 - 2(3i)^2 = 18 + 4i$$

Théorème2 : soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe D si a et b sont deux points quelconques de D et si $F'(z) = f(z)$ alors :

$\int_a^b f(x)dx$ est indépendant du chemin suivi.

Exemple :

Suivant la ligne allant de (0,3) à (1,1) on a l'équation :

$$y=-2x+3 \Rightarrow dy=-2dx$$

$$\int_{3i}^{1+i} 4zdz = \int_0^1 4\big(x + i(-2x+3)\big)(dx - 2idx)$$

$$=4(1-2i)\int_0^1 \big(x + i(-2x+3)\big)dx$$

$$=4(1-2i)\left[\frac{1}{2}x^2 - ix^2 + 3ix\right]_0^1 = 4(1-2i)\left(\frac{1}{2} + 2i\right) = 18+4i$$

4-Théorème de Cauchy Goursat :

On présente souvent ce théorème sous deux formes.

Théorème3-1 :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe D contenant γ $(ou\ \gamma$ un chemin fermé) alors :

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

La deuxième forme de ce théorème

Théorème3-2 :

Si f(z) est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur la courbe elle-même alors on aura :

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

Exemple : évalué l'intégrale suivante sur le cercle $c: |z-1| = 1$:

$$\oint_{c:|z-1|=1} \frac{1}{z^2+1} dz$$

* $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i (hors\ du\ cercle)$

$\Rightarrow la\ fonction\ est\ holomorphe$ à l'intérieur d'une courbe fermée C et sur la courbe elle $-$ même

$$\Rightarrow \oint_{c:|z-1|=1} \frac{1}{z^2+1} dz = 0$$

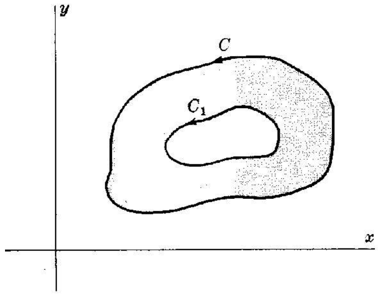
D'après le théorème **Cauchy Goursat.**

Théorème4 : Soit *f(z)* une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C etC_1, [où C_1, est à l'intérieur de C comme dans la figure ci-dessous] et sur

Ces courbes. Alors :

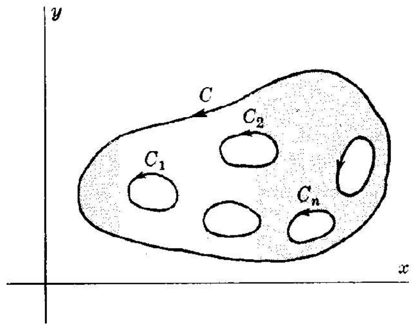
$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$

Où C etC_1, sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Théorème5 : Soit *f(z)* une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par les courbes fermées simples C, C_1, C_2, C_3,. . . , C_n [où C_1, C_2, C_3,. . . , $C_n$sont intérieures à C comme dans la figure ci-dessus] et sur ces courbes. Alors :

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots \oint_{C_n} f(z)dz$$



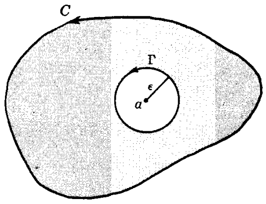
Exemple : Evaluer $\oint_{C:} \frac{1}{z-a} dz$ où C désigne une courbe fermée simple et z=a est :

1-à l'extérieur de C.

2-à l'intérieur de C.

*Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe à L'intérieur de C et sur C. Alors d'après le théorème03 de **Cauchy Goursat.** $\oint_{C:} \frac{1}{z-a} dz = 0$

*Supposons *z* = a intérieur à C et soit un cercle Γ de rayon ε**,** centré En *z* = a, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé Car *z* = a est un point intérieur].



D'après les résultats théorème 04

$$\oint_c \frac{1}{z-a} dz = \oint_{\Gamma'} \frac{1}{z-a} dz$$

D'autre part sur Γ' : $|z-a| = \varepsilon$ ou $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$: $0 < \theta < 2\pi$

Et $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$

Alors : $\oint_{\Gamma'} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$

Qui est le résultat cherché.

6-Formule intégrale de Cauchy :

Théorème 06 :

Si f(z) est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur la courbe elle-même, si **a** est un point à l'intérieur de C alors on aura :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Ou l'intégrale sur C est prise dans le sens positif.

De même la n-ième dérivée de f (z) en z = a est donnée par :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Exemple : évaluer $\oint_c \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} dz \;\; si\ C\ est:$

a) le cercle $|z| = \frac{1}{2}$

b) le cercle $|z| = \frac{3}{2}$

c) le rectangle de sommet -2-i, -2+i, 3+i, 3-i.
Toutes les courbes sont parcourues dans le sens positif.

Première méthode :

a-On peut décomposer en fractions on a

$$\frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{2}{3}}{z+1} + \frac{\frac{1}{6}}{z-2} \; et$$

$$\oint_c \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2}\oint_c \frac{1}{z} dz - \frac{2}{3}\oint_c \frac{1}{z+1} dz + \frac{1}{6}\oint_c \frac{1}{z-2} dz$$

$\oint_c \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ en posant a=0 et f(z) =1 dans le théorème 6

$\oint_c \frac{1}{z+1} dz = \oint_c \frac{1}{z-2} dz = 0$ d'après le théorème de **Cauchy Goursat**

D'où $\oint_c \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} dz = \pi i$

b- $\oint_c \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ en posant a=0 et f(z) =1 dans le théorème 6

$$\oint_c \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i$$

en posant $\mathrm{a} = -1$ et $\mathrm{f(z)} = 1$ dans le théorème 6

$\oint_c \frac{1}{z-2} dz = 0$ d'après le théorème de **Cauchy Goursat.**

D'où $\oint_c \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} dz = -\frac{\pi i}{3}$

c-$\oint_c \frac{1}{z} dz = \oint_c \frac{1}{z+1} dz \oint_c \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i$
d'après le théorème6 et :

$\oint_c \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} dz = - 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = 0$

Deusième méthode pour a:

a- La fonction f(z)= $\frac{z-1}{(z+1)(z-2)}$ est holomorphe a l'intérieur et sur le cercle$|z| = \frac{1}{2}$ du théorème 6$\oint_c \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)} dz = 2\pi i f(0) = \pi i$

8-Théorème de Rouché :

Théorème 7 :

Si f(z) et g(z) sont analytiques dans et sur une courbe fermée C, et si $|g(z)| < |f(z)|$sur C, alors f(z) +g(z) et f(z) ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

EXEMPLE

Soit $h(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$

Montré que h à trois de ses zéros dans le disque D(0,1) et tous ses zéros dans le disque D(0,3).

*on applique le théorème de Rouché avec la fonction f(z)= $z^5 + z - 2$et $g(z) = 5z^3$ et le disque fermé $|z| = 1\ alors$:

$$|f(z)| = |z^5 + z - 2| \leq 4 < 5 = |g(z)|$$

D'après le théorème f +g =h et g ont le même nombre de zéros dans le disque D(0,1) c'est à dire 03.

De même on applique le théorème de Rouché avec la fonction F(z)= $5z^3 + z - 2\ et\ G(z) = z^5$ et le disque fermé $|z| = 3\ alors$:

$$|F(z)| = |\ 5z^3 + z - 2| \leq 5.27 + 3 + 2 = 140 < 3^5 = |G(z)|$$

D'après le théorème F+G =h et G ont le même nombre de zéros dans le disque D(0,3) c'est à dire 05.

Enseignante ELmansouri aouatef

Faculté des Science et Sciences Appliquées -Oum El Bouaghi