Chapitre 1 : Notions préliminaires

- Rappels de mathématiques :
  - Vecteurs
  - Torseurs
- Définitions et notions fondamentales
  - Détails de machines
  - Pièce cinématique
  - Dimension cinématique
  - Paire cinématique
  - Degré de liberté d’une pièce cinématique
  - Paires cinématiques
- Classification des paires cinématique

Chapitre 1 : Rappels & préliminaire

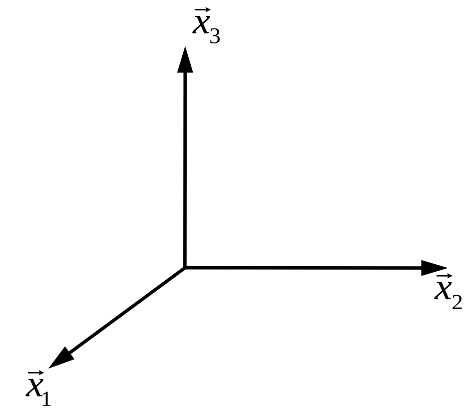
1. Rappels de mathématiques

1.1 Vecteurs

Représentation des vecteurs U et V en fonction de leurs composantes dans la base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

$$\vec{U} = u_1\vec{x}_1 + u_2\vec{x}_2 + u_3\vec{x}_3$$
$$\vec{V} = v_1\vec{x}_1 + v_2\vec{x}_2 + v_3\vec{x}_3$$

$\Rightarrow$ Représentation Cartésienne.

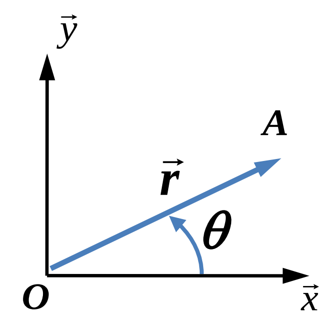


1.2 Différentes représentations des vecteurs dans le plan

Représentation rectangulaire

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r_x = r\cos\theta \\ r_x = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{avec } r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\text{et} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$$



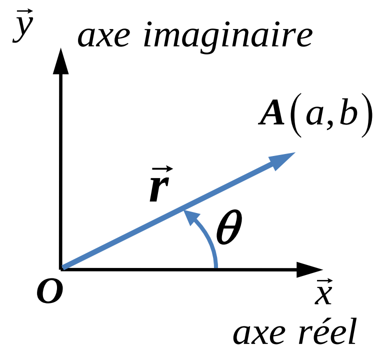
Représentation polaire

$$\vec{r} = r\angle\theta$$

Représentation par les nombres complexe

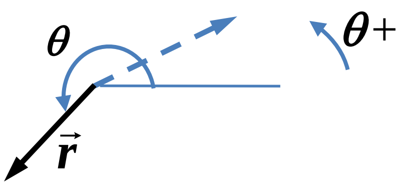
$$\overrightarrow{OA} = a + ib \quad \rightarrow \quad \vec{r} = a + ib$$

$$i = \sqrt{-1}$$



Représentation polaire complexe

$$\vec{r} = re^{i\theta} \quad \rightarrow \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\rightarrow \quad \theta : \text{argument}$$
$$|\vec{r}| = r \ : \text{module}$$

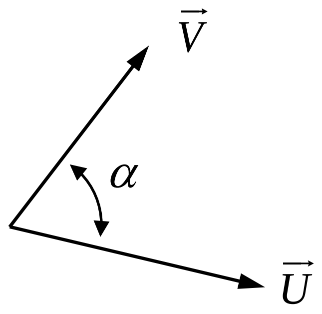


1.2 Opérations sur les vecteurs

a. Produit scalaire :

$$\vec{U}.\vec{V} = |\vec{U}|.|\vec{V}|\cos\alpha$$

$$\vec{U}.\vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

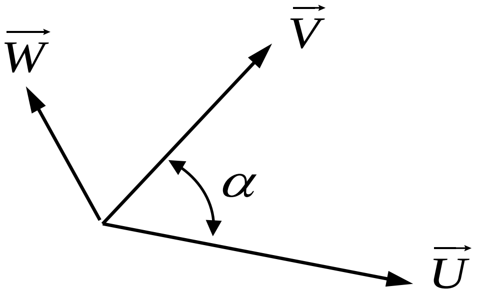


Conséquences :

- Angle entre 2 vecteurs ;
- Projection d'un vecteur sur la direction d'un autre vecteur

b. Produit vectoriel:

$$\left|\overrightarrow{W}\right| = \left|\overrightarrow{U}\right|\left|\overrightarrow{V}\right|\sin\alpha$$



$$\overrightarrow{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{W} \quad \rightarrow$ Perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Conséquences :

- Calcul du moment d'un vecteur ;
- Volume d'un parallélépipède ;

1.3 Notion de Torseurs

a- Désigné par : $\{T\}$

b- Définition : C'est l'ensemble du vecteur $\vec{R}$ appelé résultante et du champ de moment $\vec{M}$

$\overrightarrow{M_p}$ Moment du torseur $\{T\}$ au point *p.*

$$\{T\} = {}_p\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_p} \end{Bmatrix}$$

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_p}$ Les éléments de réductions du torseur $\{T\}$ au point *P*

c- Coordonnées scalaires en P :

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ Base orthonormée

$$\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_P} = L_P\vec{x} + M_P\vec{y} + N_P\vec{z}$$

$\Rightarrow$

$$\{T\} = {}_{P}\begin{Bmatrix} X & L_P \\ Y & M_P \\ Z & N_P \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

d- Changement de centre de réduction

$$\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_Q} = \overrightarrow{M_P} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R}$$

Exemple :

Soit : $\{T\} = {}_{P}\begin{Bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ et $\overrightarrow{OP} = 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}$

Exprimer les éléments de réduction de $\{T\}$ en un point Q tel que : $\overrightarrow{OQ} = -\vec{y} + 2\vec{z}$

e- Automoment et comoment

Automoment de $\{T\}$ = Produit scalaire de ses éléments de réduction.

Au point P : $A_P(T) = \vec{R}.\overrightarrow{M_P}$

Au point Q : $A_Q(T) = \vec{R}.\overrightarrow{M_Q}$

$\Rightarrow$ $A_P(T) = A_Q(T)$

Invariant scalaire

Produit scalaire ou comoment de 2 torseurs :

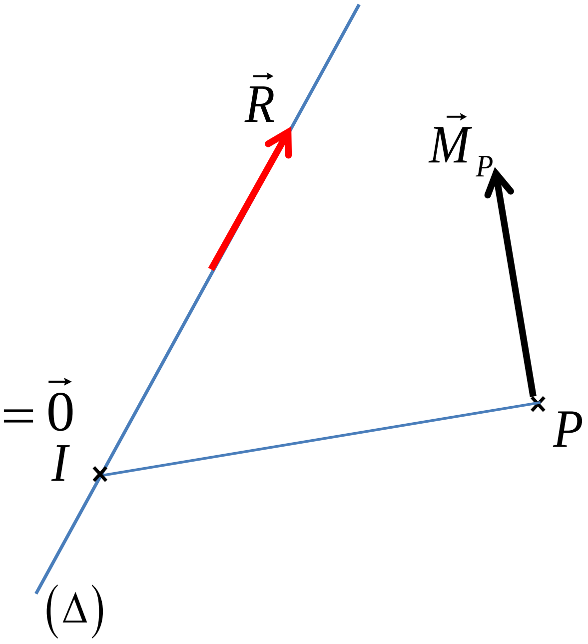
Soit : $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_P} \end{Bmatrix}$ et $\{T'\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R'} \\ \overrightarrow{M'_P} \end{Bmatrix}$

Comoment $\Rightarrow$ $\{T.T'\}_P = \vec{R}.\overrightarrow{M'_P} + \vec{R'}.\overrightarrow{M_P}$

Conséquence $\Rightarrow$ $\{T.T'\}_P = \{T.T'\}_Q$

f- Axe central d'un torseur

C'est une droite Δ tel qu'en tout point I de cette droite le vecteur résultant $\overrightarrow{R}$ et le vecteur moment en $\boldsymbol{I}$, aient même direction que Δ.



Si l'on considère le torseur $\{T\}$ au point P : $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_P \end{Bmatrix}$

D'après la définition de l'axe central, quelque soit $I \in \Delta : \quad \vec{R} \wedge \vec{M}_I = \vec{0}$

L'équation paramétrique (en λ) de l'axe central s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{PI} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_P}{R^2} + \lambda \overrightarrow{R}}$$

g. Torseurs spéciaux

Torseur nul : $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_P = \vec{0} \end{Bmatrix}$

Glisseur : $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Torseur couple : $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_P \end{Bmatrix}$

2. Définitions et notions fondamentales

2.1 Définitions et hypothèses élémentaires

1- détails de machines : dernière partie de la machine que l'on ne peut démonter sans la détruire

Exemple : Ecrou, gougeons ….

2- pièce cinématique : partie de la machine composée d'un ou plusieurs détails liés rigidement entre eux.

Exemple : bielle (Figure 1)

Hypothèse : la pièce cinématique est considérée comme absolument rigide.

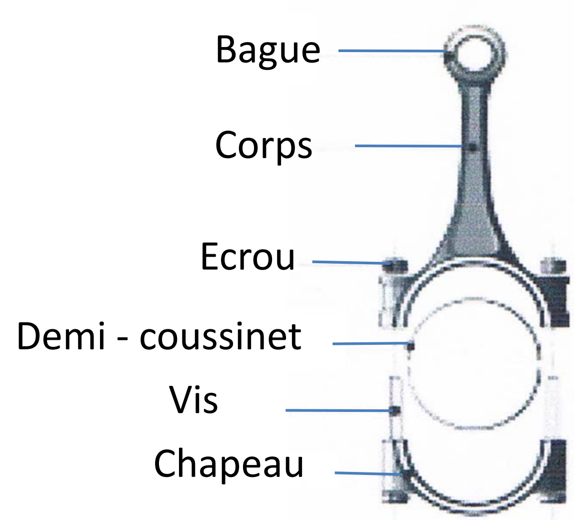


Figure 1

3- dimensions cinématiques : ceux sont les dimensions qui influencent la cinématique du mécanisme

Exemples : - rayon *R* d'une roue motrice d'automobile
- distance entre les coussinets de la bielle

2.2 Degré de liberté d’une pièce cinématique

C’est le nombre de paramètres indépendants permettant de déterminer complètement la position de la pièce cinématique.

***Rappel** :* un corps solide entièrement libre dans l’espace peut être localisé complètement par ses trois points *A*, *B* et *C* non alignés.

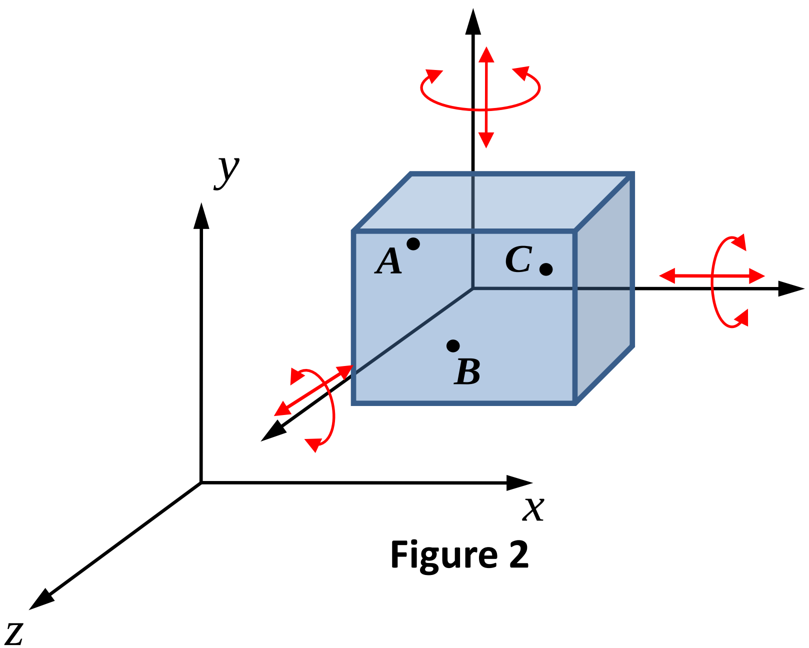


Figure 2

9 paramètres, mais pas tous indépendants.

$$(x_A, y_A, z_A),\quad (x_B, y_B, z_B)\ \text{ et }\ (x_C, y_C, z_C)$$

$$\begin{cases} (x_A - x_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (x_A - x_B)^2 = l_{AB}^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = l_{BC}^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = l_{AC}^2 \end{cases}$$

Si l'on désigne par ***w*** le nombre de degré de liberté d'une pièce cinématique, alors :

$$\boxed{w = 3\times3 - 3 = 6}$$

Une pièce cinématique entièrement libre dans l'espace possède au maximum 6 ddl.

Remarques :

→ degré de liberté = possibilité de mouvement

6 ddl = 3 translations + 3 rotations

→ Une pièce cinématique se déplaçant dans un plan ou dans des plans parallèles, ne possède que 3 ddl.

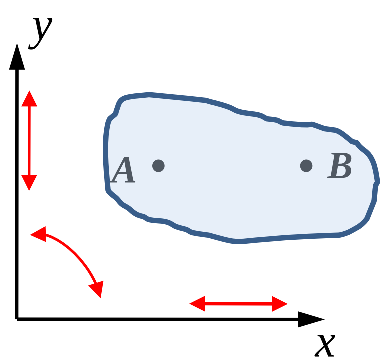


Figure 3

2 translations suivant les axes x et y.
1 rotation dans le plan xy.

2.2.1 Mouvement de translation – Mouvement de rotation :

a- *Mouvement de translation* :

Quand toutes les particules composant le corps solide possèdent exactement le même mouvement , le corps est dit exécutant un mouvement de translation

- *Translation rectiligne* : le mouvement et le long d’une ligne droite

Exemple : le piston (P) du système double manivelle – bielle (Figure 4) est animé d’un mvt de translation rectiligne.

- *Translation curviligne* : le mouvement de toutes les particules du corps est exactement le même mais se fait le long d’une courbe.

Exemple : La bielle ***AB*** (Figure 4) exécute un mouvement de translation curviligne.

Remarques :

1. On peut vérifier que, puisque les manivelles ***OA*** et ***CB*** ont la même longueur, ***AB*** prend toujours des positions parallèles lors du mvt.
2. On verra dans la suite que si, par exemple, le mvt du piston ***P*** ou de la bielle ***AB*** est à analyser le corps entier sera remplacé par un point pour l’étude analytique.

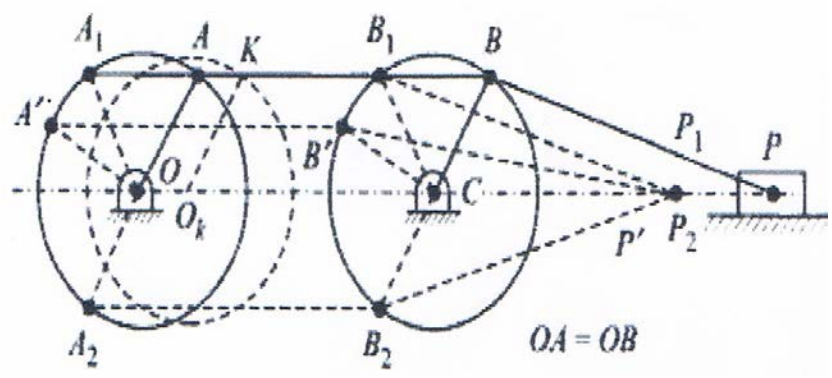


Figure 4 : Système double manivelle - bielle

b- *Mouvement de rotation*:

Lors du mvt, chaque point du corps garde la même distance du point appelé centre de rotation.

Exemple : Les manivelles ***OA*** et ***CB*** subissent un mvt de rotation (Figure 4).

2.2.2 Signification physique du degré de liberté

C'est le nombre minimum de coordonnées ou de paramètres indépendants nécessaires pour décrire une configuration d'un corps en mvt.

Exemple : Système bielle – manivelle de la figure 5.

Si l'angle θ entre la manivelle est l'axe horizontal et connu la position du mécanisme entier peut être décrite.

Un seul paramètre θ est requit pour décrire la configuration ➡ *Nbre ddl = 1*

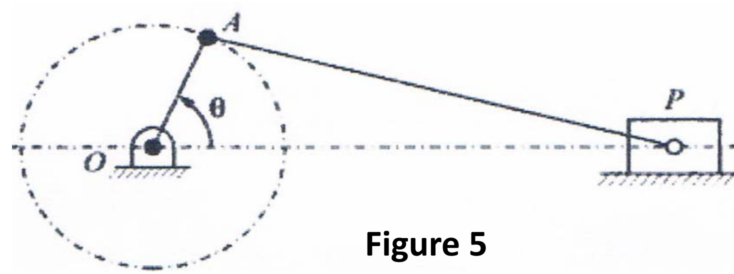


Figure 5

3. Liaisons et paires cinématiques

3.1 Liaisons

Il existe 2 types de liaisons entre les parties d'une machine.

Liaisons rigides entre détails d'une pièce cinématique : aucun ddl relatif entre les deux détails.

Liaison cinématique entre 2 pièces cinématiques *:* annulent quelques ddl relatifs.

Les Liaisons cinématiques sont nécessaires pour imposer aux pièces cinématiques des lois de mvt déterminées.

3.2 Liaisons élémentaires normalisées : (Tableau 1)

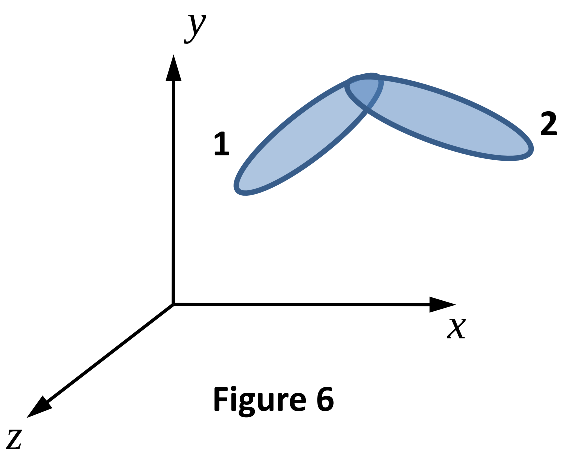


Figure 6

But : connaitre la position du solide 1 par rapport au solide 2

On doit définir 6 paramètres indépendants pour connaître la position du solide 1 par rapport au solide 2.

L'étude se particularise pour tous les cas de liaisons simples.

3.3 Torseur cinématique et torseur statique associés à une liaison

Rappel :

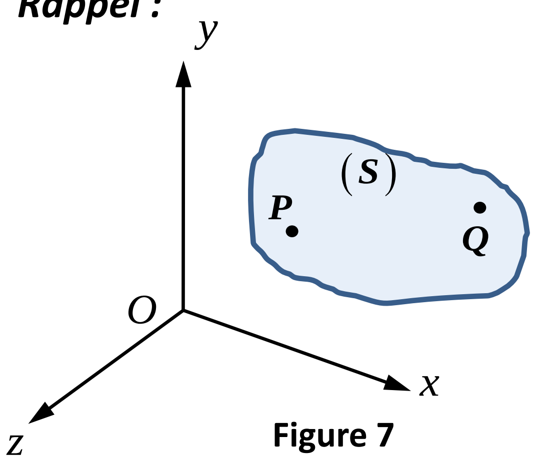


Figure 7

Soit un solide (S), un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et 2 points P et $Q \in S$

Le champ des vecteurs vitesses du solide (S), dans le mvt de S/R est :

$$\boxed{\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}}$$

$\vec{\Omega}_{S/R}$: vecteur rotation instantanée

On définit le torseur cinématique noté $\{T_c\}$ tel qu'au point $\boldsymbol{P}$ de (S) :

$$\{T_c\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_P \end{Bmatrix}$$

Et si l'on a :

$$\vec{\Omega} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z}$$

$$\vec{V}_P = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z}$$

On peut noté :

$$\{T_c\} = {}_P\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le torseur statique noté $\{T_s\}$ est définit au point $\boldsymbol{P}$ de (S) par :

$$\{T_s\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_P \end{Bmatrix}$$

Avec

$\vec{R}$: résultante des forces;

$\vec{M}_P$: Moment résultant.

Sachant que :

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$\vec{M}_P = L_P \vec{x} + M_P \vec{y} + N_P \vec{z}$$

Et donc:

$$\{T_s\} = {}_P\begin{Bmatrix} X & L_P \\ Y & M_P \\ Z & N_P \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Conséquences :

- Si la liaison permet les six mvts possible alors : $N_c = 6$ ddl
- Si la liaison possède six efforts de liaison alors : $N_s = 6$ contraintes
- Pour une liaison parfaite, on vérifie que $N_c + N_s = 6$

Exemple 1 : liaison sphérique à doigt

Les degrés de liberté sont : une rotation d'axe $(A, \vec{x})$ et une rotation d'axe $(A, \vec{y})$

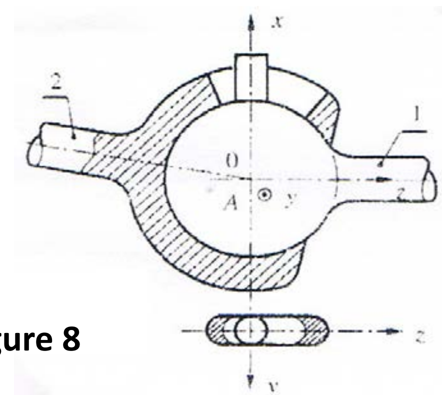
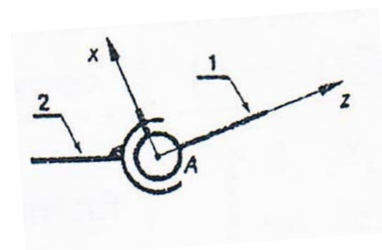


Figure 8



Symbole ou modèle physique

$$\{T_c\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_s\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exemple 2 : liaison pivot

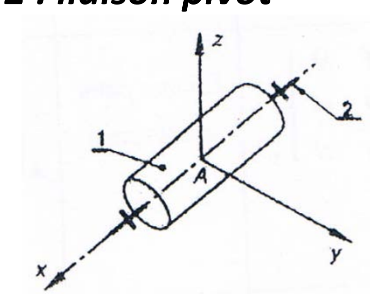


Figure 9

$$\{T_s\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_c\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

3.4 Paires cinématiques

Définition : C’est l’ensemble des lieux de contact qui réalisent les liaisons cinématiques entre deux pièces cinématiques .

Classification des paires cinématiques :

a- Classification par nombre de ddl annulés : **Figure 10**

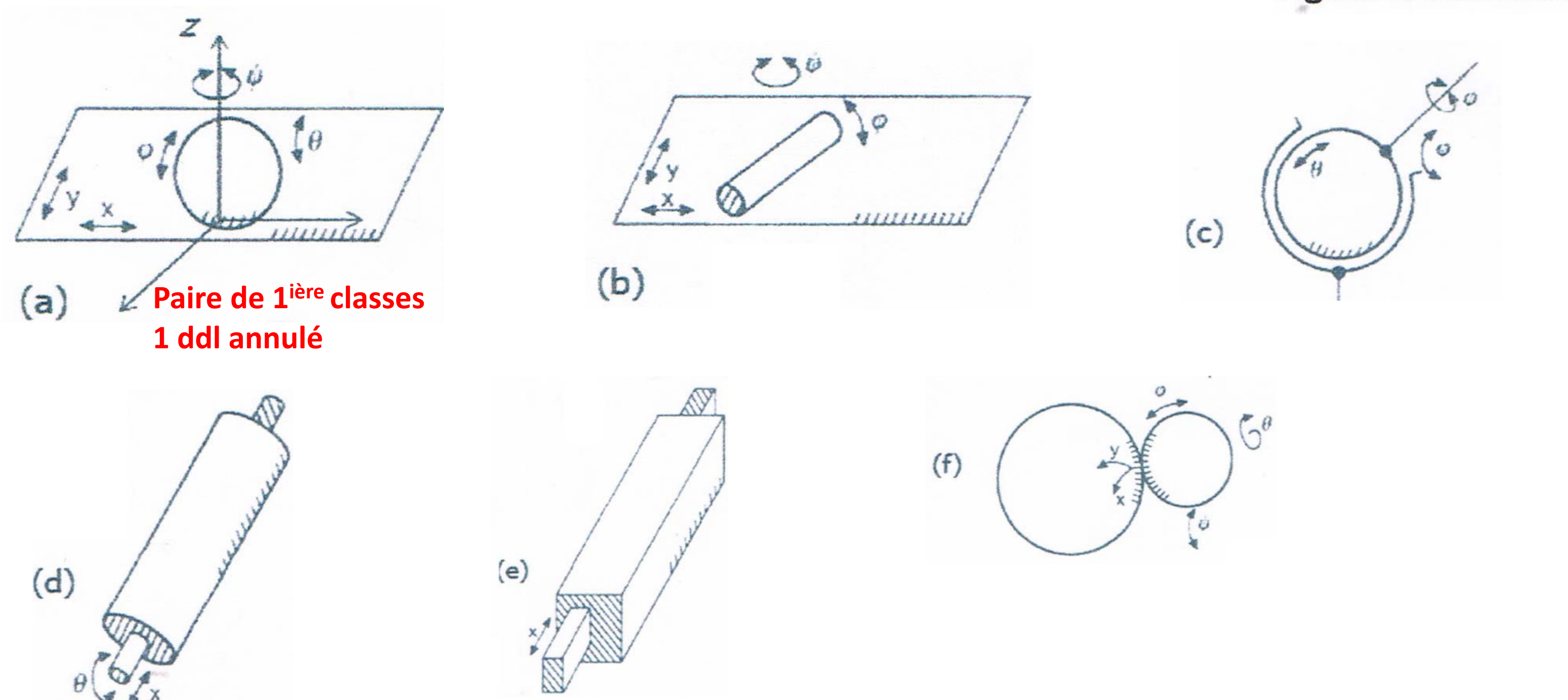


Figure 10

b- Classification pour mécanismes plans

- ***Paire supérieure :*** le contact est réalisé par point ou par courbe (ligne)

- ***Paire inférieure :*** le contact est réalisé par surface (paire de translation et paire de rotation)

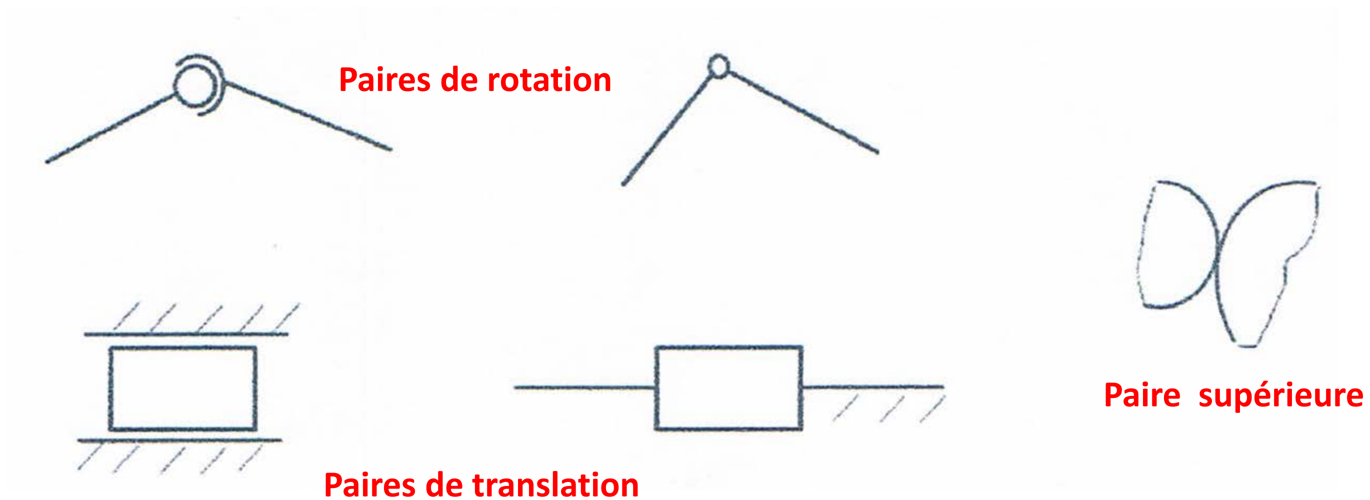


Figure 11 : Paires cinématiques dans le plan