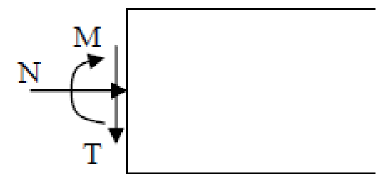
Chapitre 08 : Calcul des sections en béton armé soumises à la flexion composée

8.1. Définition :

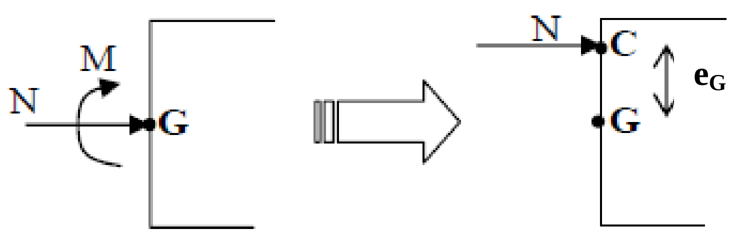
Une poutre est sollicitée en flexion composée si la réduction au CDG d'une section, des forces situées à gauche de cette section se décompose en :



- Couple de moment M d'axe perpendiculaire à la fibre moyenne.
- Effort normal N perpendiculaire à la section.
- Effort tranchant T dans le plan de la section.

Le système formé par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (C) appelé point d'application ou centre de pression.

Donc on remplace (M, N) → N au centre de pression tel que la distance GC = e_G.

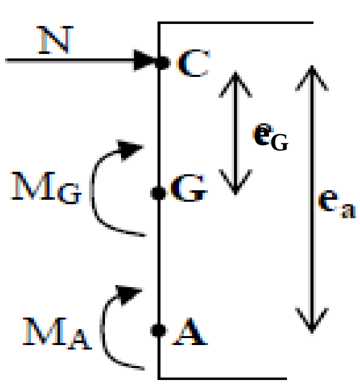


G : centre de gravité de la section.

C : point d'application (N)

e_G : excentricité $GC = e = \dfrac{M}{N}$

En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car la valeur des moments est dépendante de ce point. Ce point sera normalement, soit au CDG du béton (sans armatures) (G) ; soit au centre de gravité des armatures tendues (A).

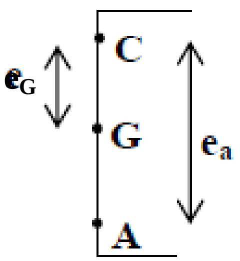


$$e_G = \frac{M_G}{N}$$

$$e_A = \frac{M_A}{N}$$

En flexion composée, la première chose à faire est de chercher la position du centre de pression (C).

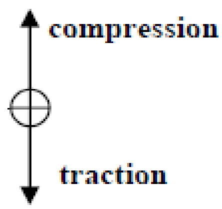
Si (N) est un effort de compression : (C) sera au dessus de (G).

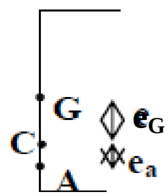


$\Rightarrow \qquad e_a \geq e_G$

Le point (C) peut se situer en dehors de la section donc "e_G" peut être supérieure à h/2 : $e_G > \dfrac{h}{2}$

Si (N) est un effort de traction : (C) sera au dessous de (G).





$CA = e_a$

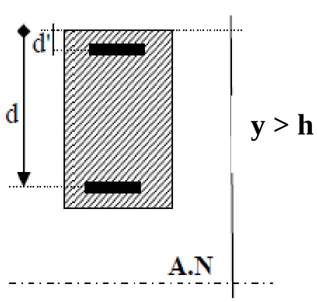
$GC = e_G$

C : peut être en dehors de la section.

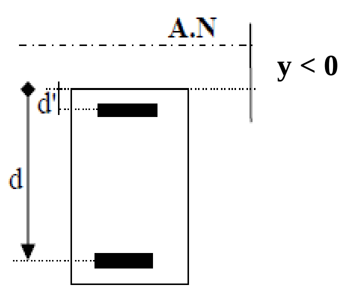
Selon l'intensité de l'effort normal et de son point d'application par rapport au « CDG » du béton seul la section sera :

- Entièrement comprimée.
- Entièrement tendue.
- Partiellement (tendue ou comprimée).

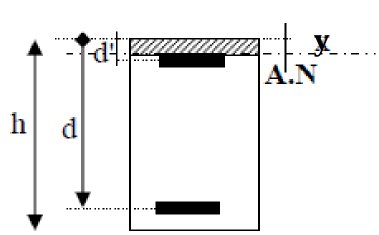
1- La section peut être entièrement comprimée sous un effort de compression :



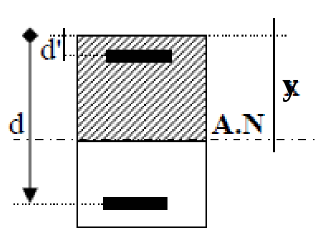
2- La section peut être entièrement tendue sous un effort de traction :



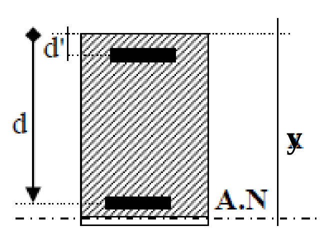
3- La section peut être partiellement comprimée sous un effort de traction ou compression:



y ≤ d'



d' < y < d



y ≥ d

8.2. Section entièrement tendue :

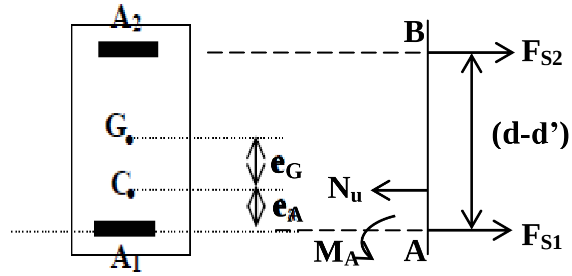
Une section sera dite entièrement tendue, si l'effort appliqué est un effort de traction et s'il est appliqué entre les armatures, donc le béton sera entièrement tendu, il n'intervient pas dans la résistance de la section.

L'E.L.U est atteint lorsque la déformation des aciers de la nappe la plus tendue vaut 10%o.

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{10} = f_e / \gamma_s$$

8.2.1. Détermination des armatures à l'Etat limite ultime de résistance :

L'équilibre des équations donne :



$$N_u = F_{S1} + F_{S2} = A_1 \times \sigma_{S1} + A_2 \times \sigma_{S2}$$

$$M_A = N_u \times e_A$$

$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow N_u \times e_A = F_{S2} \times (d - d')$$

$$A_{S2} = \frac{N_u}{\sigma_{S2} \times (d - d')} \times e_A$$

$$\sum M /_B = 0 \Rightarrow N_u \times [(d - d') - e_A] = F_{S1} \times (d - d')$$

$$A_{S1} = \frac{N_u}{\sigma_{S1} \times (d - d')} \times [(d - d') - e_A] = \frac{N_u}{\sigma_{S1}} \left[1 - \frac{e_A}{(d - d')}\right]$$

Donc : $\boxed{A_{S1} = \frac{N_u}{\sigma_{S1}} \left[1 - \frac{e_A}{(d - d')}\right] \quad \text{et} \quad A_{S2} = \frac{N_u}{\sigma_{S2} \times (d - d')} \times e_A}$

Le règlement impose pour les aciers tendus une section minimale :

A_{min} = B * f_{t28} / f_e avec : B = bh

Donc on aura :

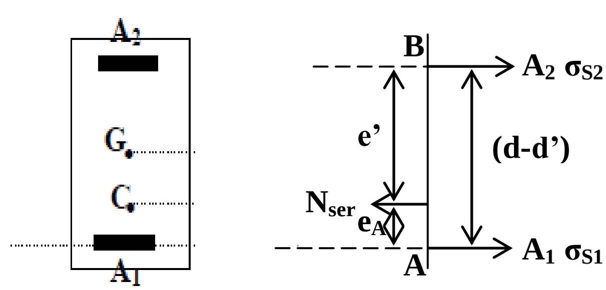
$$\begin{cases} A_1 = \text{Max} \left\{ \frac{N_u \times \gamma_s}{f_e} \left[1 - \frac{e_A}{(d - d')}\right] \; ; \; A_{min} \right\} \\ A_2 = \text{Max} \left\{ \frac{N_u \times \gamma_s}{f_e \times (d - d')} \times e_A \; ; \; A_{min} \right\} \end{cases}$$

8.2.2. Vérification des contraintes à l'Etat limite de service :

Le béton tendu n'intervient pas, il suffit de vérifier que les contraintes dans les aciers. Sachant que : A_1 et A_2 sont des sections de ferraillage choisies. Donc il faut que :

$\sigma_{s1} \leq \overline{\sigma_s} \quad \sigma_{s2} \leq \overline{\sigma_s}$

Dans le cas de fissuration considérée.



$$\sum M /_B = A_{S1} \sigma_{S1} \times (d - d') = N_{ser} \times e'$$

$$\Rightarrow \sigma_{S1} = \frac{N_{ser} \times e'}{(d - d') \times A_{S1}}$$

Avec : $e' = (d - d') - e_A$

$$\sum M /_A = A_{S2}\sigma_{S2} \times (d - d') = N_{ser} \times e_A$$

$$\Rightarrow \sigma_{S2} = \frac{N_{ser} \times e_A}{(d - d') \times A_{S2}}$$

Donc :

$$\begin{cases} \sigma_{S1} = \dfrac{N_{ser} \times e'}{(d - d') \times A_1} \leq \overline{\sigma_S} \\ \sigma_{S2} = \dfrac{N_{ser} \times e_A}{(d - d') \times A_2} \leq \overline{\sigma_S} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{S1} = \dfrac{N_{ser}}{A_1} \times \left[1 - \dfrac{e_A}{(d - d')}\right] \leq \overline{\sigma_S} \\ \sigma_{S2} = \dfrac{N_{ser}}{A_2} \times \left[\dfrac{e_A}{(d - d')}\right] \leq \overline{\sigma_S} \end{cases}$$

<u>En résumé :</u>

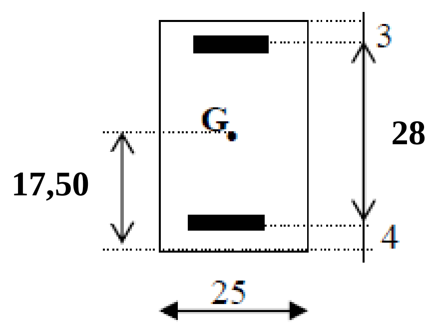
$$\begin{cases} \mathbf{A_1 \geq Max} \left\{ \dfrac{N_u \times \gamma_s}{f_e}\left[1 - \dfrac{e_A}{(d - d')}\right], \dfrac{N_{ser}}{\overline{\sigma_S}} \times \left[1 - \dfrac{e_A}{(d - d')}\right], \mathbf{A_{min}} \right\} \\ \mathbf{A_2 \geq Max} \left\{ \dfrac{N_u \times \gamma_s \times e_A}{f_e \times (d - d')}, \dfrac{N_{ser}}{\overline{\sigma_S}} \times \dfrac{e_A}{(d - d')}, \mathbf{A_{min}} \right\} \end{cases}$$

<u>Exercice d'application :</u>

Soit une section rectangulaire soumise à l'E.L.U à un moment de flexion Mu = 30 KN.m et un effort de traction Nu = 375 KN.

Si f_{c28} = 20 MPa et Fe E500.

- Calculez les sections d'armatures ?



8.3. Section partiellement (comprimée ou tendue):

Une section sera partiellement comprimée si M et N vérifient les deux conditions suivantes :

- **Le centre de pression (C) se trouvant en dehors des armatures → N, étant un effort de traction.**
- **$N_u (d-d') - M_{u/As} \leq (0{,}337-0{,}81\, d'/h)\, bh^2\sigma_{bc}$ → N, étant un effort de compression.**

8.3.1. Détermination des armatures à l'Etat limite ultime de résistance :

Les moments étant calculés au niveau de l'armature inférieure, l'équation qui exprime leur équilibre est identique à celle de la flexion simple, on vérifie ensuite l'équilibre des efforts normaux ce qui détermine les sections A_1 et A_2.

Mode opératoire :

On calcule le moment réduit.

$$\mu_u = \frac{M_u /_{A_s}}{b \times d^2 \times \sigma_b} \qquad \textbf{Avec} \quad M_{U/A_s} = N_u . e_A .$$

Deux cas peuvent se présenter :

a)- Si $\mu_u < \mu_l \rightarrow A_2 = 0$ et

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_S}\left[\frac{M_u /_{A_s}}{z} \pm N_u\right]$$

(+) → Si l'effort est un effort de traction.

(-) → Si l'effort est un effort de compression.

Si : $A_1 = 0$ ⇒ La section ne nécessite pas de ferraillage.

Dans le cas où la relation de $A_1 < 0$, cela veut dire que $y > d$, cette section sera considérée comme nulle ($A_1 = 0$), dans ce cas, N est alors équilibré par le béton seul, cela signifie que $F_S = F'_S = 0$ et que N est directement opposé à F_b, comme il est néanmoins indispensable de prévoir dans la section des armatures minimales, on prendra pour $A_1 + A_2$, la valeur minimale en compression simple.

b)- Si $\mu_u > \mu_l \rightarrow A_2 \# 0$.

On est ramené à l'étude d'une section avec armatures comprimées, calculées en flexion simple. M_R, z_l, σ_S, conservent les même valeurs qu'en flexion simple, on en déduit :

$$A_2 = \frac{1}{\sigma_s'}\left[\frac{M_u /_{A_s} - M_R}{(d-d')}\right] \qquad \textbf{Avec} \quad M_R = \mu_l \times b \times d^2 \times \sigma_b$$

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_S}\left[\frac{M_u /_{A_s} - M_R}{(d-d')} + \frac{M_R}{\beta_l \times d} \pm N_u\right]$$

(+) → si l'effort est un effort de traction.

(-) → si l'effort est un effort de compression.

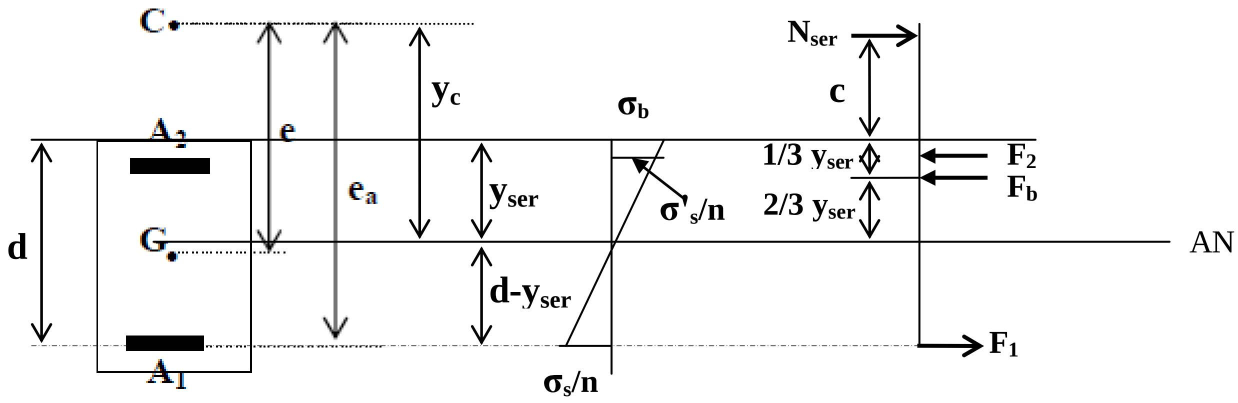
Si : $A_1 < 0$ en considère $A_1 = 0$

Il faudra prévoir des armatures longitudinales inférieures comme barre de montage pour maintenir les armatures transversales.

8.3.2. <u>Vérification des contraintes à Etat limite de service :</u>

Une section sera partiellement comprimée, si l'effort de compression est en dehors du noyau central. $\Rightarrow$ $e \geq h/6$

<u>Position de l'axe neutre :</u>



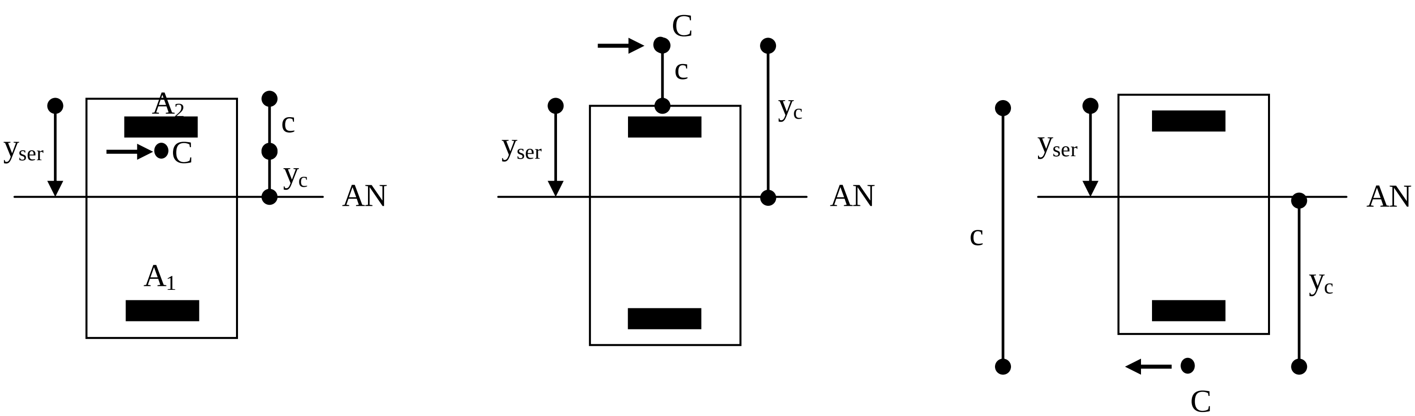
On pose : **c = d- e_A et** $e_A = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} + (d - \frac{h}{2})$

La position de centre de pression « C » dépend du signe de N_{ser}.

Si $N_{ser} > 0 \rightarrow \begin{cases} c > 0 \rightarrow d > e_A \text{ (C se trouve à l'intérieur de la section)} \\ c < 0 \rightarrow d < e_A \text{ (C se trouve à l'extérieur de la section)} \end{cases}$

Si $N_{ser} < 0 \rightarrow d > e_A$.

La profondeur de l'A.N. : **$y_{ser} = y_c + c$**



c > 0
N compression

c < 0
N compression

c > 0 et y_c < 0
N traction

L'étude de l'équilibre de la section s'exprime par :

$$\sum N = 0 \Rightarrow N_{ser} = F_2 + F_b - F_1 \quad \textbf{.......... (1)}$$

$$\sum M/_{AN}=0 \Rightarrow N_{ser}\times y_c = F_2\times(y_{ser}-d')+\frac{2}{3}F_b\times y_{ser}+F_1\times(d-y_{ser}) \quad \text{....... (2)}$$

Avec : $F_b=\frac{1}{2}\times b\times\sigma_b\times y_{ser}$, $F_1=\sigma_s\times A_1$, $F_2=\sigma_s^{'}\times A_2$

On remplaçant N_{ser} de (1) dans (2), on obtient l'équation du second degré :

$$b\times\sigma_b\left[\frac{y_c\times y_{ser}}{2}-\frac{y_{ser}^2}{3}\right]+\sigma_s^{'}\times A_2\left[y_c-y_{ser}+d'\right]-\sigma_s\times A_1\left[y_c-y_{ser}+d\right]=0$$

On pose : $y_{ser}=y_c+c$

$$b\times\sigma_b\left[\frac{y_c^2}{6}-c\times\frac{y_c}{6}-\frac{c^2}{3}\right]+\sigma_s^{'}\times A_2\left[d'-c\right]-\sigma_s\times A_1\left[d-c\right]=0 \quad \text{........ (3)}$$

D'autre part, on a les équations de compatibilité contrainte – déformation.

$$\sigma_s^{'}=n\times\sigma_b\times\frac{y_{ser}-d'}{y_{ser}}=n\times\sigma_b\times\frac{(y_c+c-d')}{(y_c+c)}$$

$$\sigma_s=n\times\sigma_b\times\frac{d-y_{ser}}{y_{ser}}=n\times\sigma_b\times\frac{(d-y_c-c)}{(y_c+c)}$$

L'équation (3) se réduit donc à une équation de 3ème degré en y_c.

$$y_c^3+y_c\left[-3c^2+\frac{6n\times A_2}{b}(d'-c)+\frac{6n\times A_1}{b}(d-c)\right]-\left[2c^3+\frac{6n\times A_2}{b}(d'-c)^2+\frac{6n\times A_1}{b}(d-c)^2\right]=0$$

y_c est la solution de l'équation du 3ème degré : **$y_c^3 + p\, y_c + q = 0$,** avec :

$$p=\left[-3c^2+\frac{6n\times A_2}{b}(d'-c)+\frac{6n\times A_1}{b}(d-c)\right] \qquad q=-\left[2c^3+\frac{6n\times A_2}{b}(d'-c)^2+\frac{6n\times A_1}{b}(d-c)^2\right]$$

Le calcul est relativement complexe et s'effectue comme suit :

On calcule : $\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}$

<u>1er cas : Δ < 0</u>

On calcule φ et a à partir de : $\varphi=\text{Arc}\cos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)$ puis φ et $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{-p}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}$

Il faut choisir la solution qui convient parmi les 3 solutions suivantes :

$$\begin{cases} y_{c1} = a \times \cos\left(\dfrac{\varphi}{3}\right) \\ y_{c2} = a \times \cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + 120°\right) \\ y_{c3} = a \times \cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + 240°\right) \end{cases}$$

2$^{\text{ème}}$ cas : $\Delta > 0$

Il existe une solution réelle **:** $y_r = \left[\dfrac{1}{2} \times \left(-q + \sqrt{\Delta}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ **et** $y_c = y_r - \dfrac{p}{3y_r}$

Connaissant y_c, on obtient la position de l'axe neutre **:** $\mathbf{y_{ser} = y_c + c}$.

L'équilibre des efforts appliqués à la section s'exprime par :

$$N_{ser} = \frac{1}{2} \times b \times \sigma_b \times y_{ser} + A_2 \sigma_s^{'} - A_1 \sigma_s \, .$$

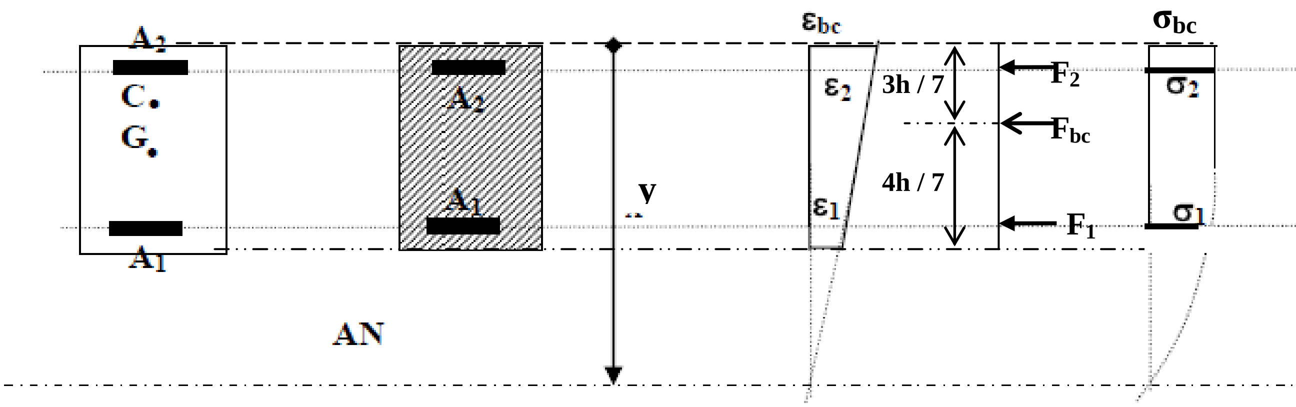
Ce qui nous permet d'obtenir la contrainte de compression maximale du béton, avec les équations de compatibilités. Donc on aura :

$$\begin{cases} \sigma_b = \dfrac{N_{ser} \times y_{ser}}{\dfrac{b}{2} \times y_{ser}^2 + n \times A_2 (y_{ser} - d') - n \times A_1 (d - y_{ser})} \leq \overline{\sigma_b} \\ \sigma_s^{'} = n \times \sigma_b \times \dfrac{y_{ser} - d'}{y_{ser}} \\ \sigma_s = n \times \sigma_b \times \dfrac{d - y_{ser}}{y_{ser}} \leq \overline{\sigma_s} \end{cases}$$

8.4. Section entièrement comprimée :

On considère une section rectangulaire comportant des armatures inférieures A_1 et des armatures supérieures A_2 soumise à N_u (effort de compression) et M_u (moment fléchissant calculé au niveau des armatures inférieures A_1). La section sera entièrement comprimée si M et N vérifient la condition suivante :

$N_u (d-d') - M_u > (0,337-0,81\ d'/h)\ bh^2\sigma_{bc}$



Pour la section entièrement comprimée, on doit utiliser le diagramme parabole rectangle qui fournit les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} N_b = F_b = bh\sigma_b (1 - \chi) \\ M_b = bh^2\sigma_{bc}\,[d/h - 0,5 + \chi\,(6/7 - d/h)] \quad \text{(par rapport à } A_S) \end{cases}$$

Avec : $x = \dfrac{3,05}{\left(7\times\dfrac{y}{h}-3\right)^2}$

La valeur de χ est compris entre ($\chi = 0$ pour $y = +\infty$ et $\chi = 0,19$ pour $y = h$).

8.4.1. Détermination des armatures à l'état limite ultime de résistance :

L'armature inférieure qui a un raccourcissement plus faible que celui de l'armature supérieure est moins bien utilisée. Donc on cherche, à priori, à équilibrer les efforts sans disposer d'armatures inférieures A_1. Dans ce cas, l'équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} N_u = N_b + A'_2\sigma'_S \\ M_{uA} = M_b + (d-d')\,A'_2\,\sigma'_S \end{cases}$$

La vérification est faite avec les inégalités suivantes : $N_u \times (d - d') - M_A \le (0,5h - d') \times b \times h \times \sigma_b$

Si : $N_u \times (d - d') - M_A \le (0,5h - d') \times b \times h \times \sigma_b$

Nous avons donc :

$$x = \frac{0,5 - \frac{d'}{h} - \frac{(d-d')N_u - M_A}{bh^2\sigma_b}}{\frac{6}{7} - \frac{d'}{h}}$$

$$\begin{cases} A'_1 = 0 \\ A'_2 = \dfrac{1}{\sigma_s'}\left[N_u - (1-x)b\times h\times\sigma_b\right] et \quad \sigma'_s = f(\varepsilon'_s) \quad \text{avec} \quad \varepsilon'_s = 0{,}002\left[1+\dfrac{3-(7d'/h)}{1{,}75}\sqrt{x}\right] \end{cases}$$

Si : $N_u \times (d-d') - M_A \geq (0{,}5h - d')\times b\times h\times\sigma_b$

Nous aurons donc :

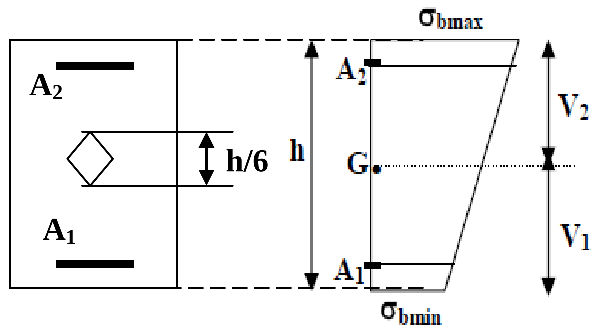
$$\begin{cases} A'_2 = \dfrac{1}{(d-d')\sigma'_s}\left[M_u - (d-\dfrac{h}{2})b\times h\times\sigma_b\right] et \\ A'_1 = \dfrac{1}{\sigma'_s}\left[N_u - b\times h\times\sigma_b\right] - A'_2 \text{ avec } \sigma'_s = \sigma'_{s2‰} \end{cases}$$

8.4.2. Vérification des contraintes à l'état limite de service :

Pour qu'une section soit entièrement comprimée, il faut que N_{ser}, soit un effort de compression situé à l'intérieur du noyau central de la section.

Si $e_G \geq h/6$ → section partiellement comprimée.

Si $e_G < h/6$ → section entièrement comprimée.



V_1, V_2 : distances du CDG de la section rendue homogène à la fibre la moins comprimée et la plus comprimée respectivement. Elles sont données par :

$$V_1 = \frac{b\times\dfrac{h^2}{2} + n\times A'_1(h-d) + n\times A'_2(h-d')}{(b\times h + n\times(A'_1 + A'_2))} \qquad V_2 = h - V_1$$

Le moment quadratique I de la section homogène est obtenu par la relation :

$$\mathbf{I = \frac{bh^3}{12} + bh\left(V_2 - \frac{h}{2}\right)^2 + nA'_{S1}(d - V_2)^2 + nA'_{S2}(V_2 - d')^2}$$

Dans ces conditions tout le béton de la section intervient et les contraintes extrêmes sont données par les formules classiques de la RDM :

$$\begin{cases} \sigma_{b\max} = \dfrac{N_{ser}}{B_h} + \dfrac{M_{ser}}{I}\times V_2 < \overline{\sigma_b} \\ \sigma_{b\min} = \dfrac{N_{ser}}{B_h} - \dfrac{M_{ser}}{I}\times V_1 > \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma'_{s2} = 15\left[\dfrac{N_{ser}}{B_h} + \dfrac{M_{ser}}{I}(V_2 - d')\right]} \\ \boldsymbol{\sigma'_{s1} = 15\left[\dfrac{N_{ser}}{B_h} - \dfrac{M_{ser}}{I}(d - V_2)\right]} \end{cases}$$

8.5. Remarque concernant la flexion composée avec compression :

Lorsqu'une section en b.a. est sollicitée en flexion composée avec effort normal de compression, elle doit être justifiée vis-à-vis de l'état limite de stabilité de forme, ELUSF (risque de flambement). Toutefois lorsque $l_f / h \leq \max(15\ ;\ 20(e_1 + e_a) / h)$, elle peut être vérifiée uniquement en flexion composée en remplaçant l'excentricité réelle par une excentricité totale de calcul : $e_{tot} = e_1 + ea + e_2$

- **e_1 :** excentricité (dite du premier ordre), de la résultante des contraintes normales :

$$e_1 = \frac{Mu}{Nu}$$

- **e_a** : excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométrique initiales (après exécution).

$$e_a = \max\left\{2cm\ ;\ \frac{L}{250}\right\}$$

- **e_2 :** excentricité due aux effets de second ordre, liés à la déformation de la structure

$$e_2 = \frac{3L_f^2}{10\,000h}(2 + \alpha\phi)$$

ϕ : Le rapport de la déformation finale due au fluage à la déformation instantanée sous la charge considéré ; ce rapport est généralement pris égal à 2.

$$\alpha = \frac{M_G}{M_G + M_Q}$$

Donc, les sollicitations de calcul deviennent ainsi :

N_u inchangé et $M_u = N_u \,.\, e_{tot}$

8.6. Diagrammes d'interactions :

On trace une courbe d'interaction à partir des équations d'équilibre de la section (section rectangulaire *bh* armée de *A* et *A'*). Les abaques d'interaction permettent :

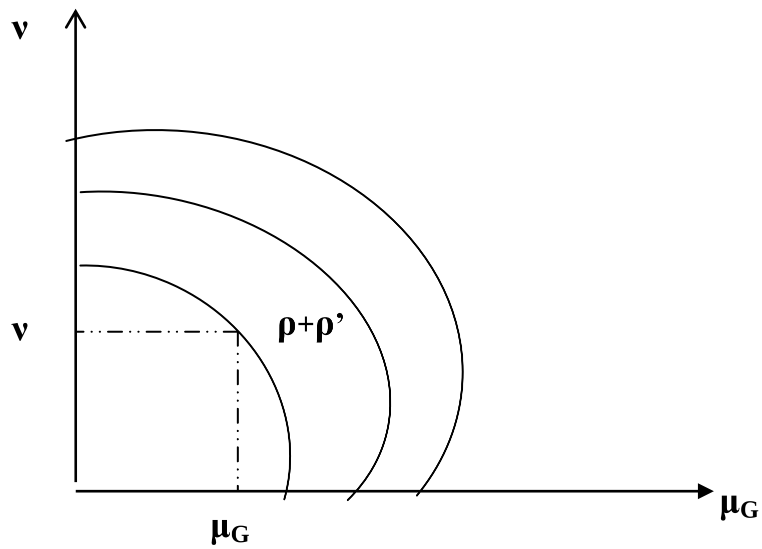
- **Le calcul de la section des armatures.**
- **La vérification de la section.**

On note :

- ***M_{Gu}* : moment fléchissant calculé au niveau du CDG du béton seul.**
- ***Nu* : l'effort normal de compression, le cas de traction n'est pas envisagé.**

On pose : Le moment réduit $\mu_G = \dfrac{M_{Gu}}{b \times h^2 \times \sigma_b}$ **et l'effort normal réduit :** $\nu = \dfrac{N_u}{b \times h \times \sigma_b}$

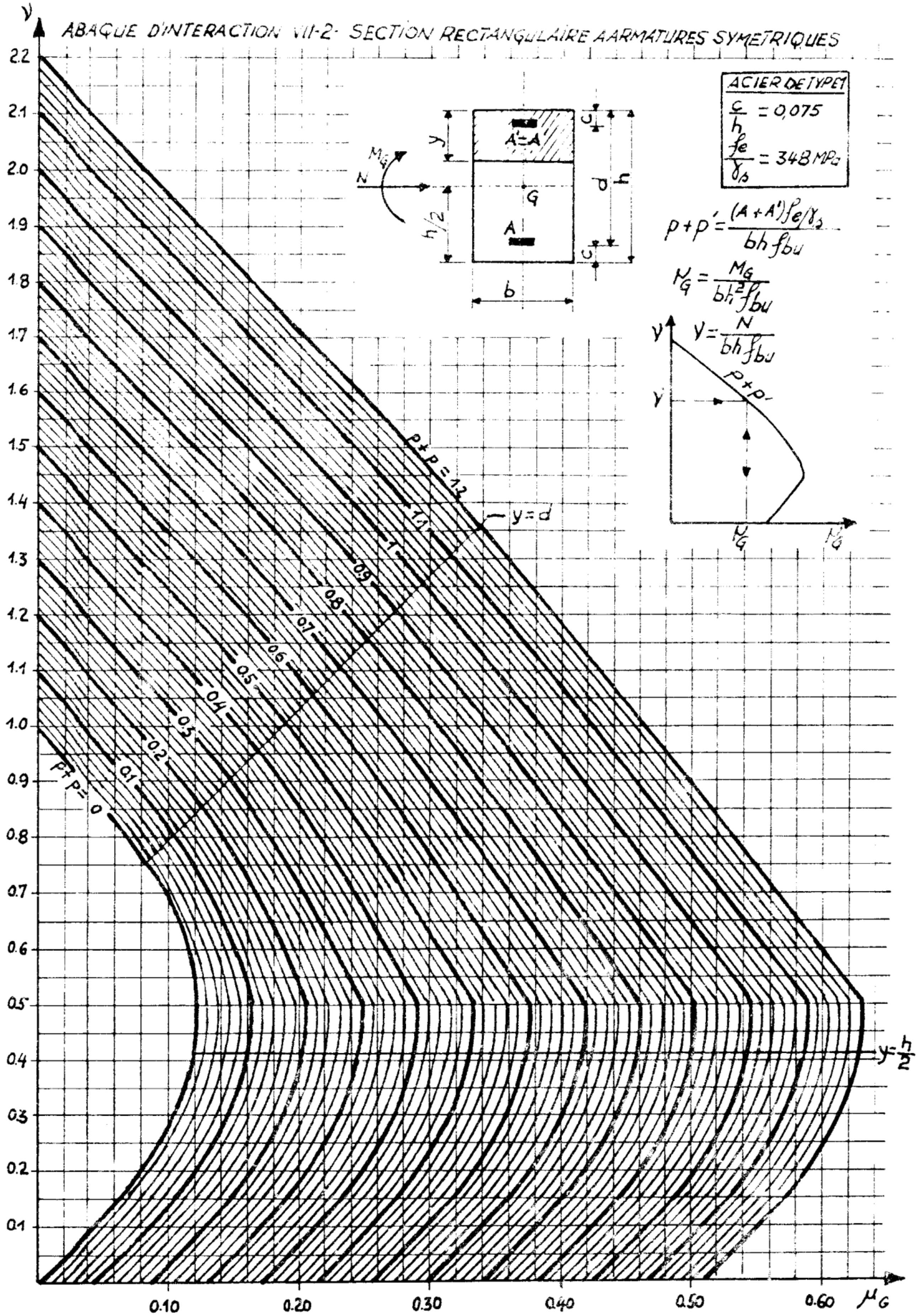
$$\rho + \rho' = \frac{(A_s + A_S') \times \sigma_s}{b \times h \times \sigma_b}$$



« Diagramme d'interaction »

Les courbes tracés sur les abaques représentent la relation entre ν et μ_G pour une valeur $\rho+\rho'$.

Un diagramme d'interaction est composé de l'ensemble des courbes d'interaction pour une section de béton donnée en faisant varier les sections d'acier. La figure sur polycopié présente un exemple du diagramme d'interaction.


ABAQUE D'INTERACTION VII-2- SECTION RECTANGULAIRE A ARMATURES SYMETRIQUES
ACIER DE TYPE 1
$\frac{c}{h} = 0,075$
$\frac{f_e}{\gamma_s} = 348$ MPa
$p + p' = \frac{(A + A') f_e/\gamma_s}{bhf_{bu}}$
$\mu_G = \frac{M_G}{bh^2 f_{bu}}$
$\nu = \frac{N}{bhf_{bu}}$
A'=A
A
G
N
M_G
y
h/2
d
h
c
b
p+p'
p+p'=1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
p+p'=0
y=d
$y=\frac{h}{2}$
ν
μ_G
2.2
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60