

Chapitre 07 : Justification des sections en béton armé vis-à-vis de L'effort tranchant

7.1. Généralités :

L'étude du moment de flexion nous permet de déterminer les dimensions de coffrage et les armatures longitudinales dans une section en béton armé donnée et l'étude de l'effort tranchant permet de vérifier l'épaisseur de l'âme et de déterminer les armatures transversales (aciers de couture) comme les cadres, étriers, épingles.

L'effort tranchant fait glisser les plans les uns par rapport aux autres, les plans perpendiculaires et les plans parallèles.



Dans une pièce soumise à l'effort tranchant, il faut effectuer les justifications suivantes :

- Vérification de la contrainte tangente ultime de cisaillement du béton.
- Détermination des armatures transversales de l'âme.
- Vérification des zones d'appuis des poutres : - Appui simple de rive.
- Appui intermédiaire.

7.2. Principe de justification de l'effort tranchant :

7.2.1. Théorème de réciprocité de Cauchy :

Soit une poutre posée sur deux appuis, soumise à un effort vertical P. la figure ci-dessous représente l'allure du diagramme de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M.

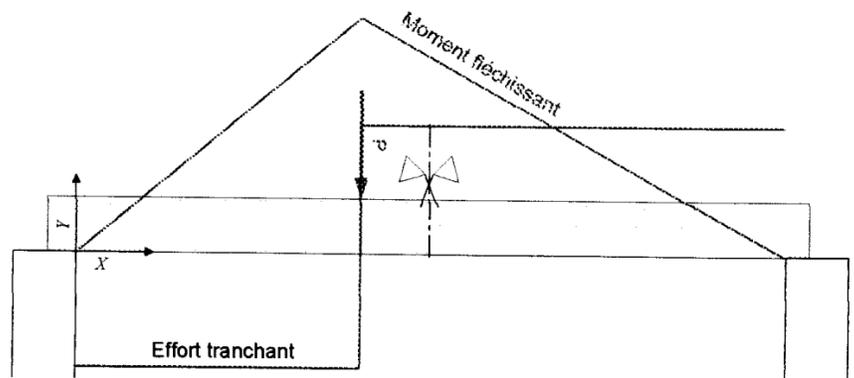


Figure 7.1 : Diagramme de M et V d'une poutre sollicitée à la flexion simple

Intéressons-nous maintenant à un petit cube de la poutre (figure 7.2), en l'isolant et en effectuant le bilan des actions, ce cube comme la poutre en général est en équilibre : la somme des efforts et la somme des moments doivent donc être nulles.

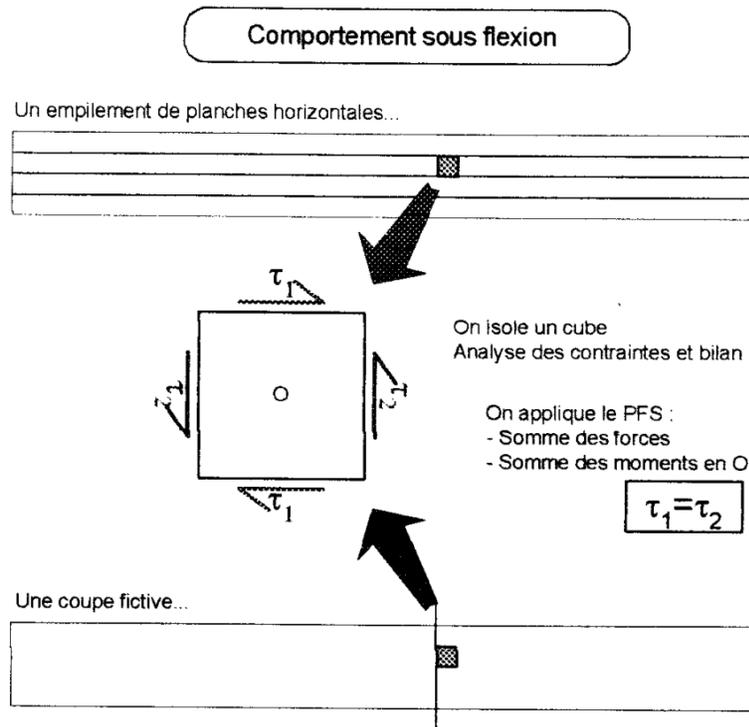


Figure 7.2 : Théorème de Cauchy

La figure (7.2) met en évidence le théorème de Cauchy : à savoir, il ya égalité des contraintes tangentielles sur les 4 côtés du cube avec le sens de ces contraintes spécifié sur cette même figure.

7.2.2. Mise en évidence de la nécessité d'aciers de couture :

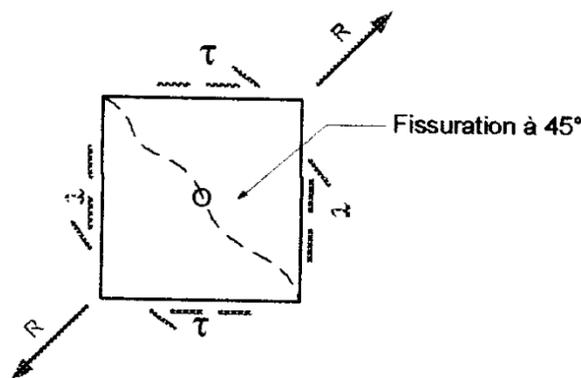


Figure 7.3 : Démonstration de la nécessité d'aciers de couture

Compte tenu du théorème de Cauchy, la résultante des contraintes tangentielles montre que dans le béton une fissuration va se dessiner à 45°.

Il faut coudre cette fissure avec des aciers perpendiculaires à celle-ci. Dans la réalité, il n'est pas très pratique de disposer les aciers à 45°. Aussi, dans la majorité des cas, les aciers sont positionnés verticalement.

7.2.3. Principe de fonctionnement d'une poutre sous sollicitation d'effort tranchant :

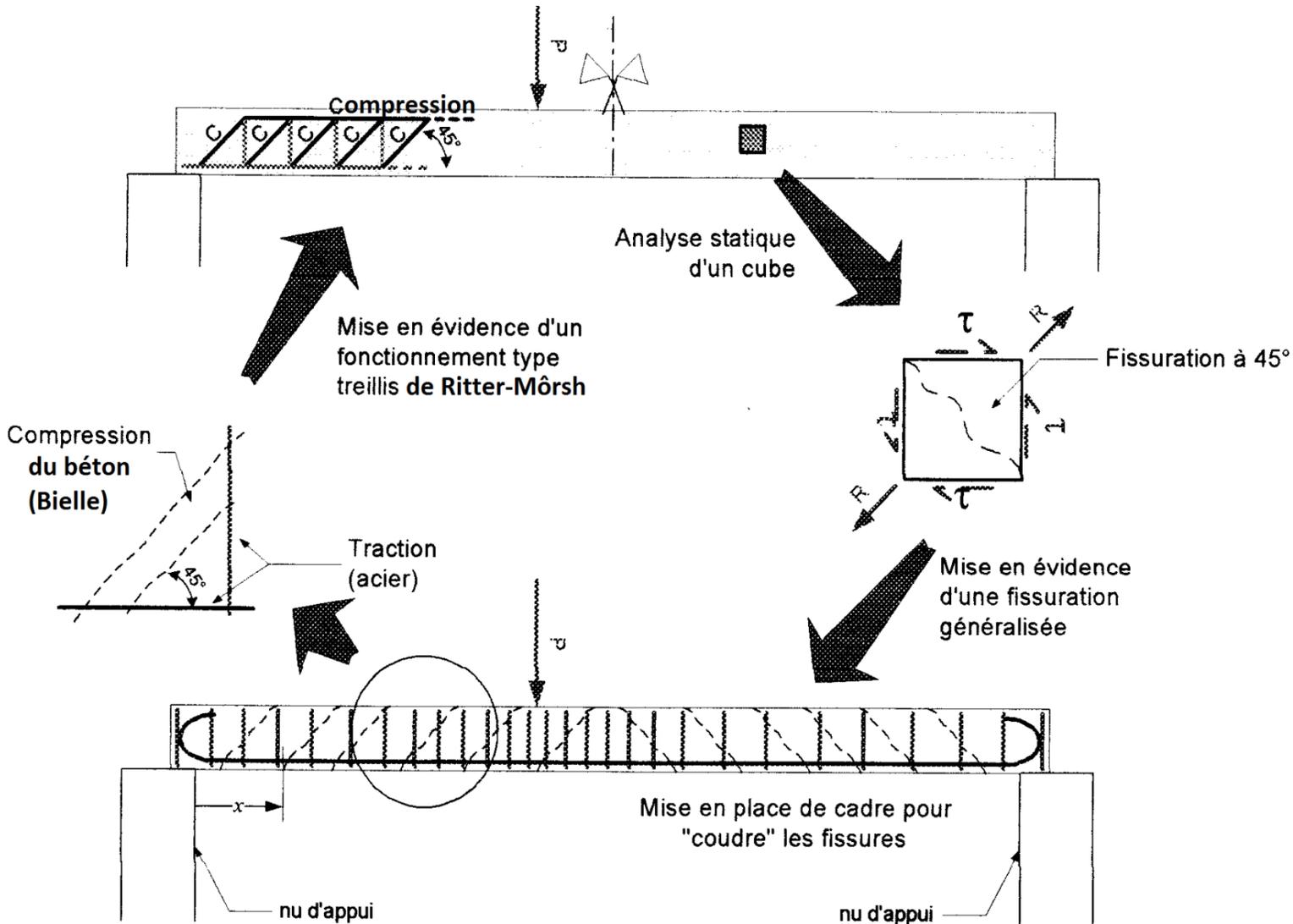


Figure 7.4 : Principe de fonctionnement d'une poutre soumise à l'effort tranchant

Les modes de rupture possibles par effort tranchant vont conduire à envisager les états limites principaux suivants : **1. Traction limite des armatures d'âmes ou armatures transversales.**

2. Compression limite des bielles de béton comprimées limitées par deux fissures à 45°.

3. Traction limite des aciers longitudinaux existants.

Ces états limites seront envisagés seulement à l'ELU compte tenu de l'aspect nettement prépondérant de l'ELU sur l'ELS.

7.3. Hypothèses générales de calcul :

7.3.1. Contrainte conventionnelle de cisaillement :

On définit réglementairement la **contrainte conventionnelle de cisaillement** : $\tau_u = \frac{V_u}{bd}$

Avec V_u est la valeur maximale à l'ELU de l'effort tranchant.

7.3.2. Conditions imposées à l'ELU :

a) Etat limite ultime du béton de l'âme :

Pour des cadres, étriers et épingles verticaux (armatures transversales verticales), la contrainte conventionnelle de cisaillement τ_u doit vérifier :

- Pour une fissuration non préjudiciable : $\tau_u \leq \overline{\tau_u} = \text{Min} \left[\frac{0,2}{\gamma_b} f_{cj}, 5 \text{MPa} \right]$

- Pour une fissuration préjudiciable ou très préjudiciable : $\tau_u \leq \overline{\tau_u} = \text{Min} \left[\frac{0,15}{\gamma_b} f_{cj}, 4 \text{MPa} \right]$

b) Espacement maximal et section minimale d'armatures d'âme (Condition de non fragilité) :

Soit S_t l'espacement des cours successifs d'armatures transversales, Φ_t le diamètre de ces mêmes armatures transversales et enfin A_t la section d'un cours d'armatures transversales, on doit vérifier :

- $S_t \leq \text{min} (0,9.d ; 40 \text{ cm})$.

- $\Phi_t \leq \text{min} \left(\frac{h}{35} ; \Phi_1 ; \frac{b}{10} \right)$ avec $\Phi_t \leq 12 \text{ mm}$

- $\frac{A_t \cdot f_e}{b \cdot S_t} \geq \text{max} \left(\frac{\tau_u}{2} ; 0,4 \text{ MPa} \right)$ (CNF)

c) Etat limite ultime des armatures d'âmes :

Cas des armatures transversales verticales.

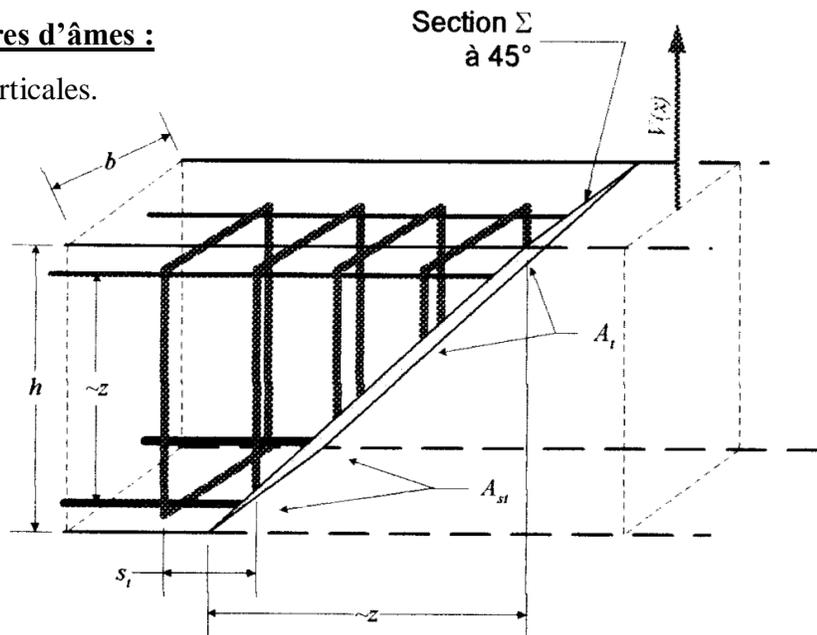


Figure 7.5 : Diagramme de la contrainte de cisaillement et résultante sur la section Σ (cadres verticaux)

Isolons le côté gauche de la poutre. Au droit de la section Σ à l'abscisse x , section à 45° représentative d'une fissure, est présent l'effort tranchant $V(x)$.

En supposant que le béton qui travaille en traction perpendiculairement à cette fissure est négligé, seuls les aciers transversaux peuvent reprendre l'effort tranchant $V(x)$.

La section totale d'armatures transversales coupant la section Σ est $\frac{z}{S_t} A_t$

Quel que soit x , A_t doit donc vérifier l'inégalité suivante : $\frac{z}{S_t} A_t \sigma_{st} \geq V(x)$

Le dimensionnement impose la recherche de la section « dangereuse » correspondant à l'effort tranchant maximal. En outre, les calculs s'effectuent à l'ELU, il vient donc $V_{\max} = V_{ELU}$ et $\sigma_{st} = f_{su}$

Enfin en introduisant la contrainte conventionnelle de cisaillement, l'équation précédente devient :

$$\frac{z}{S_t} A_t f_{su} \geq V_{ELU} = \tau_{ELU} b d = \tau_{ELU} b \frac{z}{0,9} \text{ soit encore } \frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\tau_{ELU}}{0,9} \frac{b}{f_{su}}$$

Mais l'expérience montre que le béton est capable de reprendre une part de cet effort de traction diminuant d'autant la contrainte devant être reprise par les armatures transversales.

↳ Il vient alors l'équation modifiée :
$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{(\tau_{ELU} - 0,3 f_{tj} \cdot k) b}{0,9 f_{su}}$$

Où :

- $k = 0$ si la fissuration est très préjudiciable ou s'il y a reprise de bétonnage
- $k = 1$ en flexion simple

Pratiquement, on se fixe une section d'armatures transversales A_t et on fait varier l'espacement S_t .

d) Justification des zones d'appuis :

Au niveau des appuis, l'analyse du fonctionnement de type treillis conduit au bilan statique suivant :

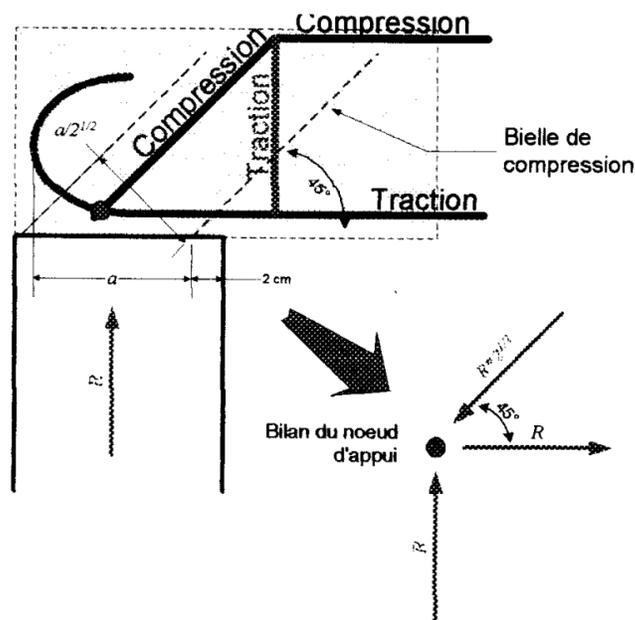


Figure 7.6 : Bilan du noeud d'appui d'une poutre en béton armé

Bilan des efforts au niveau du nœud :

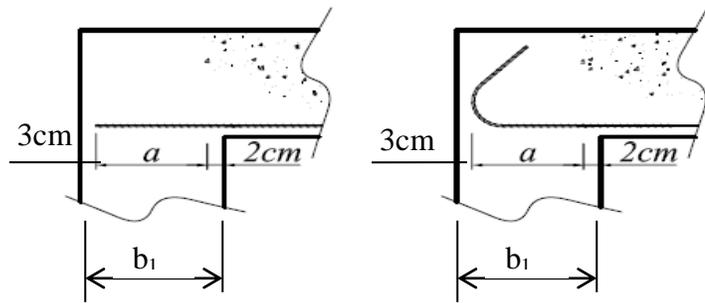
- R : réaction d'appui connue (correspond à l'effort tranchant au niveau de l'appui)
- l'effort de traction dans les armatures longitudinales
- l'effort de compression dans la bielle d'about

Équilibre du nœud par l'application de la méthode d'isolement des nœuds :

- L'effort dans la bielle en compression est de $R \sqrt{2}$.
- L'effort dans les aciers longitudinaux est de R .

➤ **Appui de rive :**

On doit prolonger les armatures inférieures au-delà du bord de l'appui et y ancrer une section d'armatures longitudinales suffisantes pour équilibrer l'effort tranchant sur l'appui.



Ancrage droit

Ancrage courbe

Vérification des armatures longitudinales :

Les armatures longitudinales doivent vérifier :

$$A_l \geq \frac{1,15 \times V_{uMax}}{f_e}$$

Vérification de la compression du béton :

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$V_{uMax} \leq 0,267 \times a \times b \times f_{c28}$$

$$a = b_1 - (2 + 3)$$

➤ **Appui intermédiaire :**

Vérification des armatures longitudinales :

Les armatures longitudinales doivent vérifier :

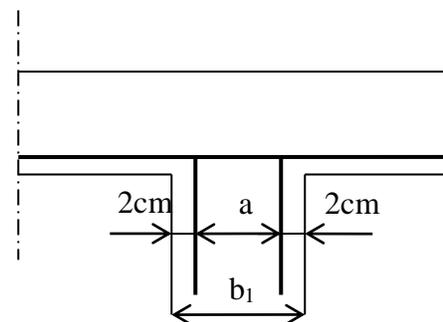
$$A_l \geq \frac{1,15}{f_e} \times \left(V_u + \frac{M_u}{0,9d} \right)$$

M_u : moment négatif au niveau de l'appui

Vérification de la compression du béton :

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$V_{uMax} \leq 0,267 \times a \times b \times f_{c28} \quad \text{et} \quad a = b_1 - (2 + 2)$$



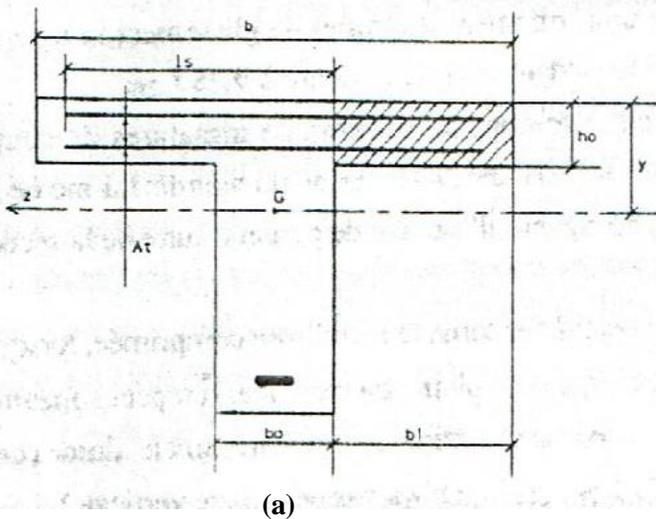
e) Liaison hourdis- âme :

Considérons une poutre en T , dont la table de compression de largeur b est supposée symétrique. Il se produit dans cette table des contraintes de cisaillement parallèlement et perpendiculairement aux faces verticales de l'âme. Il y a donc un risque de séparation entre la table de compression et l'âme de la poutre. Les armatures de coutures (droites) doivent reprendre l'effort de cisaillement et leur section doit vérifier :

$$\frac{A_t \times f_e}{S_t \times \gamma_s} \geq G_U$$

Où G_U est l'effort de glissement unitaire égal à $\tau_u \cdot h_0$ pour la jonction hourdis – âme (figure 7.7-a) et à $\tau_u \cdot h_1$ pour le talon d'une poutre (figure 7.7-b).

1. tables de compression



2. poutres à talon

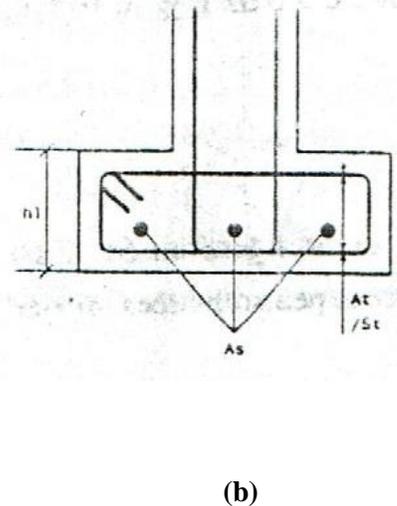


Figure 7.7 : Vérification des jonctions hourdis – âme et talon – âme pour la section en T

N.B. : Les armatures propres des hourdis peuvent être considérées comme armature de couture, indépendamment du rôle qu'elles jouent dans la résistance à la flexion du hourdis lui-même.

7.4. Répartition des armatures transversales :

Méthode forfaitaire de Caquot :

Cette méthode est applicable qu'aux poutres de section constante et soumises à des charges uniformément réparties.

1°- On détermine l'espacement S_{t0} sur l'appui, et le premier cadre est placé à $S_{t0} / 2$ du nu de l'appui.

2°- Répartition des cadres : Pour des raisons de mise en œuvre, les espacements S_t sont choisis dans la suite de Caquot (non obligatoire, conseillé) : **7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40. (cm)**

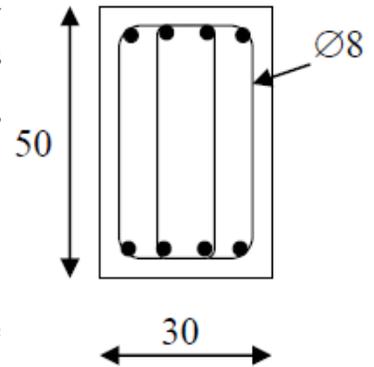
On choisit les espacements successivement qu'on respectera autant de fois en nombre entier compris dans la demi portée de la poutre ou la portée d'une console.

Exemple : $S_t = 9,68 \text{ cm} \rightarrow$ de la série on prend $S_t = 9 \text{ cm}$, et $L = 6 \text{ m}$ donc $n = 6 / 2 = 3$. La répartition des armatures sera la suivante : **3×9, 3×10, 3×11,....** jusqu'à la demi-portée.

Application :

Soit une poutre rectangulaire d'une portée **$L = 6 \text{ m}$** soumise à un effort tranchant **$V_u = 200 \text{ KN}$** . Si les aciers longitudinaux sont en Fe E400 et les cadres transversaux sont droits et de nuance **FeE240**. Sachant que **$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$** ; la fissuration est préjudiciable et il n'y a pas de reprise de bétonnage. On demande de :

- Calculer les armatures transversales de la poutre.
- Vérifier les abouts de la poutre lorsqu'elle est solidaire d'un poteau de section $(30 \times 30) \text{ cm}^2$.



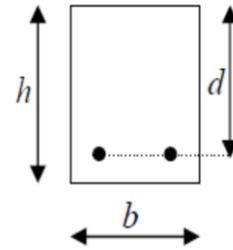
La contrainte tangente (contrainte de cisaillement) dans la section ou se produit l'effort tranchant sera donnée par l'équation suivante : $\tau_u = \frac{V_u \times S}{b \times I}$ Avec :

V_u : l'effort tranchant,

S : Moment statique de la section.

b : la largeur de la section.

I : le moment d'inertie de la section.



Le règlement C.B.A admet par simplification le principe de la tangente conventionnelle ultime:

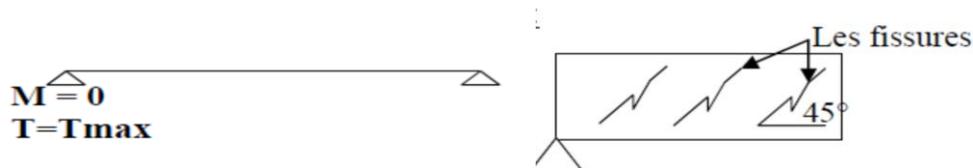
$\tau_u = \frac{V_u}{bd}$ Où V_u est l'effort tranchant toujours déterminés à l'ELU dans la section, b la largeur de l'ame

et d la hauteur utile qui positionne les aciers tendus.

8-2 Comportement des poutres sous l'action de l'effort tranchant :

8-2-1- Etat de contrainte provoqué par l'effort tranchant :

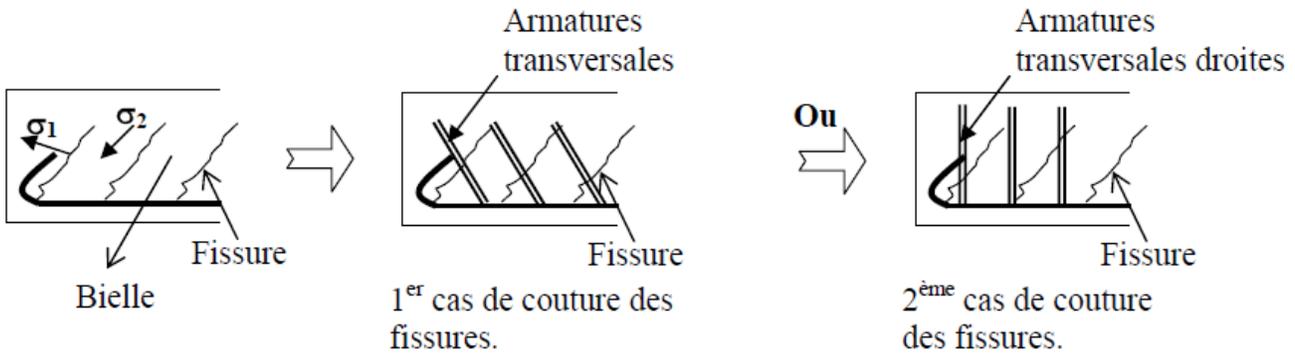
Les contraintes normales dans le béton aux appuis (isostatique) sont nulles. Donc nous avons un cisaillement pur. Les efforts tranchant seront assez élevées et risque de crier des fissures sur les plans inclinés à 45° .



8-2-2- Nécessité d'armatures transversales :

Le béton par sa faible résistance à la traction ne peut équilibrer les contraintes de traction engendrées par l'effort tranchant. Il est donc nécessaire de renforcer cette insuffisance par des armatures qui vont couder ces fissures. Ces armatures seront placées d'une manière inclinées d'un angle α pour résister à ces efforts de traction, la disposition la plus efficace correspond à ($\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ lorsque cela est possible) on peut utilisées trois types d'armatures (d'ame).

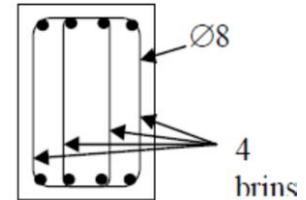
- Armatures inclinées ($45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). 1^{ème} cas
- Armatures droites ($\alpha = 90^\circ$). 2^{ème} cas
- Armatures mixtes (barres inclinées à 45° et cadres de 90°).



On notera le ferrailage comme suit : A_t : La quantité d'acier d'armature.

$A_t = n \cdot \varnothing$ avec : n : le nombre de brin. \varnothing = le diamètre du brin en général \varnothing

6 ou $\varnothing 8$. Exemple : Nous avons : $A_t = 4 \varnothing 8 = 2,01 \text{ cm}^2$



8-2-3- Contrainte tangente limite :

La contrainte tangentielle τ_u doit être limitée aux valeurs indiquées ci-après (Art : A.5.1).

τ_u doit satisfaire les conditions suivantes $\tau_u < \overline{\tau_u}$

A°/ Cas d'armatures droites :

$$\tau_u = \frac{V_u}{bd} \text{ Pour une fissuration peu préjudiciable.}$$



$$\overline{\tau_u} = \text{Min} \left[\frac{0,15}{\gamma_b} f_{cj}, 4 \text{MPa} \right] \text{ Pour une fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.}$$

A°/ Cas d'armatures inclinées :

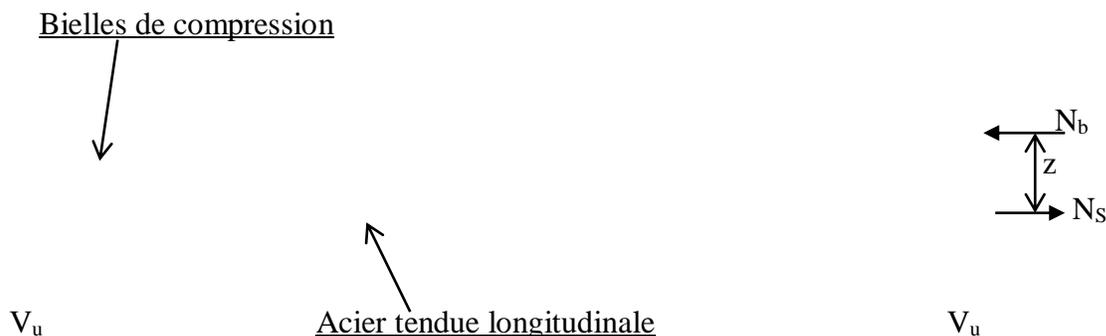
$$\overline{\tau_u} = \text{Min} \left[\frac{0,27}{\gamma_b} f_{cj}, 7 \text{MPa} \right] \text{ Pour une fissuration peu préjudiciable.}$$

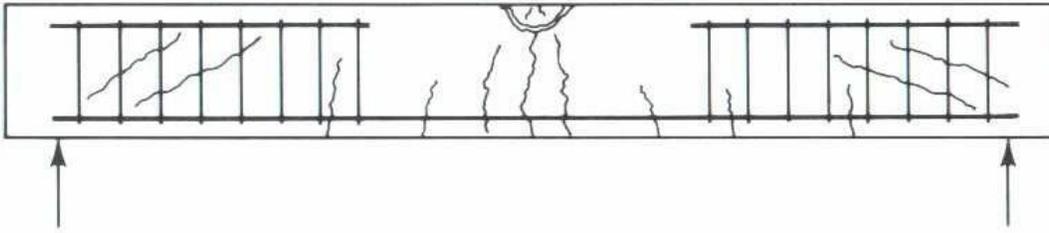


Si $\overline{\tau_u} < \tau_u \Rightarrow$ on doit augmenter les dimensions de la section.

8-3 Calcul des armatures transversales A_t :

On admet qu'après fissuration la poutre se comporte comme un treillis.

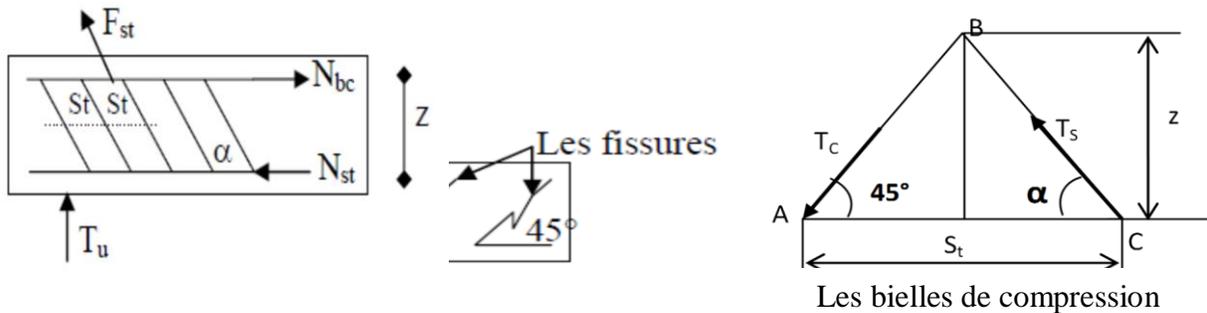




« Poutre en flexion assimilée à un treillis multiple »

Considérons maintenant les efforts internes dans une partie du treillis et d'après la théorie des poutres en treillis :

- L'effort de traction dans la diagonale **BC** à pour valeur $T_s = \frac{V_u}{\sin \alpha}$
- L'effort de compression dans la diagonale **AB** à pour valeur $T_c = V_u \sqrt{2}$
- S_t désigne l'écartement entre deux plans successifs.



La force de traction par unité de longueur vaut $\frac{F_s}{S_t} = \frac{T_s}{S_t}$

Avec $S_t = z (1 + \cot g \alpha)$. En remplaçant la force de traction et S_t par leurs valeurs on obtient :

$$\frac{F_s}{S_t} = \frac{T_s}{S_t} = \frac{V_u}{\sin \alpha} \times \frac{1}{z (\cot g 45 + \cot g \alpha)},$$

Si A_t est la somme des sections droite des armatures inclinées situés dans un même plan et que σ_{st} est la contrainte correspondante devient :

$$\frac{A_t \times \sigma_{st}}{S_t} = \frac{V_u}{\sin \alpha} \times \frac{1}{z (\cot g 45 + \cot g \alpha)} = \frac{V_u}{z (\sin 45 + \cos \alpha)}$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{V_u \times S_t}{z \times \sigma_{st} \times (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

Des essais ont montré qu'avant fissuration, le béton a déjà équilibré une partie de l'effort tranchant par la membrure comprimée du treillis, l'armature devrait équilibrer donc l'effort tranchant effectif ayant pour valeur $V_u - V_0$, pour prendre ce fait en considération les règles BAEL on introduit in coefficient empirique K et la formule devient (Art.5.1.232).

$$\frac{A_t}{S_t \times b} = \frac{\gamma_s \times (\tau_u - 0,3 \times K \times f_{ij})}{0,9 \times f_e \times (\sin \alpha + \cos \alpha)} \rightarrow (A)$$

$$\text{Avec : } \tau_u = \frac{V_u}{bd} \quad \sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad z = 0,9d \quad V_0 = 0,3 \times f_{ij} \times K \times b \times d$$

Le coefficient K à pour valeur :

K=0 : si la fissuration est très préjudiciable ou s'il y'a reprise de bétonnage

K=1 : dans le cas général.

Dans le cas général et si on utilise des cadres droits $\rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 1$. L'équation (A) devient :

$$S_t \leq \frac{0,9 \times f_e \times A_t}{\gamma_s \times b \times (\tau_u - 0,3 \times K \times f_{ij})}$$

8-4 Espacement minimal et section minimale d'armatures transversales A_t :

1- S_t de plans successifs d'armatures transversaux doit vérifier la condition suivante:

$$S_t \leq \min(0,9.d ; 40 \text{ cm}).$$

2- La section minimale d'armatures transversaux doit être prévue de manière que la quantité

$$\frac{A_t \times f_e}{S_t \times b} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

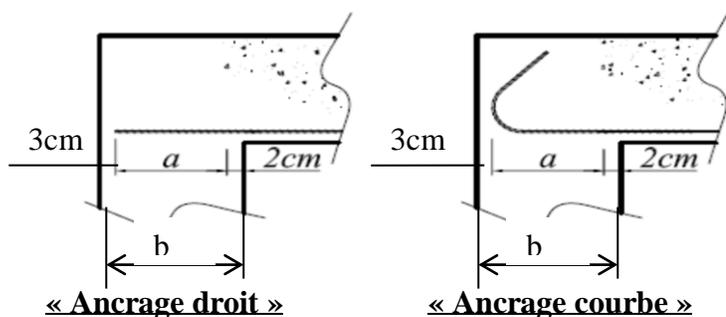
3- Le diamètre ϕ des armatures d'âme doit être au plus égal à la plus petite des trois quantités suivantes :

$$\phi \leq \left\{ \frac{h}{35}, \phi_l, \frac{b}{10} \right\} \quad \phi_t \leq 12 \text{ mm}$$

8-5 Justification des sections d'appuis:

8-5-1- Appui de rive :

On doit prolonger les armatures inférieures au delà du bord de l'appui et y ancrer une section d'armatures longitudinales suffisantes pour équilibrer l'effort tranchant sur l'appui.



A°/ Vérification des armatures longitudinales : Les armatures longitudinales doivent vérifier :

$$A_l \geq \frac{1,15 \times V_{uMax}}{f_e}$$

B°/ Vérification de la compression du béton : La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$V_{uMax} \leq 0,267 \times a \times b \times f_{c28} \quad \text{et} \quad a = b - (2 + 3)$$

8-5-2- Appui intermédiaire :

A°/ Vérification des armatures longitudinales :

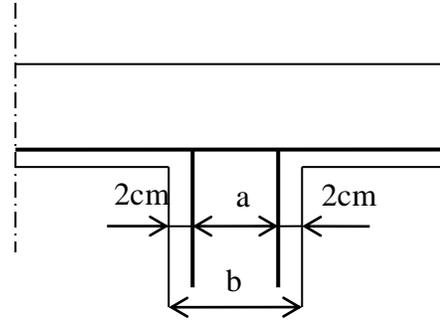
Les armatures longitudinales doivent vérifier :

$$A_l \geq \frac{1,15}{f_e} \times \left(V_u + \frac{M_u}{0,9d} \right)$$

B°/ Vérification de la compression du béton :

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$V_{uMax} \leq 0,267 \times a \times b \times f_{c28} \quad \text{et} \quad a = b - (2 + 2)$$



8-6 Répartition des armatures transversales :

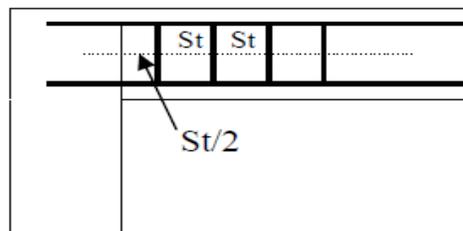
Méthode forfaitaire de Caquot : Cette méthode est applicable qu'aux poutres de section constante et soumises à des charges uniformément réparties.

1°- On détermine l'espacement S_{t0} sur l'appui, et le premier cadre est placé à $S_{t0} / 2$ du nu de l'appui.

2°- Répartition des cadres : Pour des raisons de mise en œuvre, les espacements S_t sont choisis dans la suite de Caquot (non obligatoire, conseillé) : **7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40. (cm)**

On choisit les espacements successivement qu'on respectera autant de fois en nombre entier compris dans la demi portée de la poutre ou la portée d'une console.

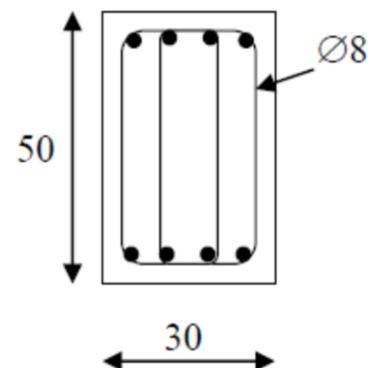
Exemple : $S_t = 9,68 \text{ cm} \rightarrow$ de la série on prend $S_t = 9 \text{ cm}$, et $L = 6 \text{ m}$ donc $n = 6 / 2 = 3$. La répartition des armatures sera la suivante : **3×9, 3×10, 3×11,....** jusqu'à la demi portée.



-Application :

Soit une poutre rectangulaire d'une portée $L = 6 \text{ m}$ soumise à un effort tranchant $T_u = 200 \text{ KN}$. Si les cadres transversaux sont droits et de nuance **FeE240**. Sachant que $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; la fissuration est préjudiciable et il n'y a pas de reprise de bétonnage. On demande de :

- Calculer les armatures transversales de la poutre.
- Vérifier les abouts de la poutre lorsqu'elle est solidaire d'un poteau de section (30*30) cm.



Liaison hourdis- âme :

Considérons une poutre en T , dont la table de compression de largeur b est supposée symétrique. Il se produit dans cette table des contraintes de cisaillement parallèlement et perpendiculairement aux faces verticales de l'âme. Il y a donc un risque de séparation entre la table de compression et l'âme de la poutre. Les armatures de coutures (droites) doivent reprendre l'effort de cisaillement

$$\tau_u = \frac{A_t \times f_e}{S_t \times h_0 \times \gamma_s}, \text{ où } h_0 \text{ est l'épaisseur du hourdis.}$$

