

Chapitre 6 : Flexion Simple

6.1 Définitions et hypothèses :

- La flexion est la déformation d'un objet qui se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre.
- En théorie des poutres, on considère des fibres, c'est-à-dire des petits cylindres de matières générés par une portion dS et une courbe parallèle à la courbe moyenne (la « direction de la poutre ») ; la courbe moyenne passe par les centres de gravité des sections droites (sections perpendiculaires à la courbe moyenne). La fibre générée par la courbe moyenne est appelée « fibre neutre ». Elle garde sa longueur lors de la flexion.

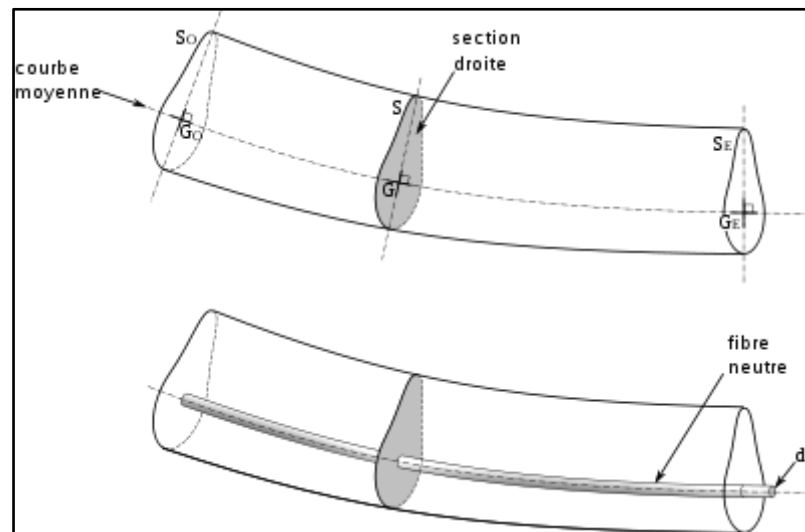


Figure 6.1: Fibre neutre de section dS d'une poutre quelconque.

- Une poutre est sollicitée en flexion simple quand toutes les forces appliquées à la poutre que ce soient les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

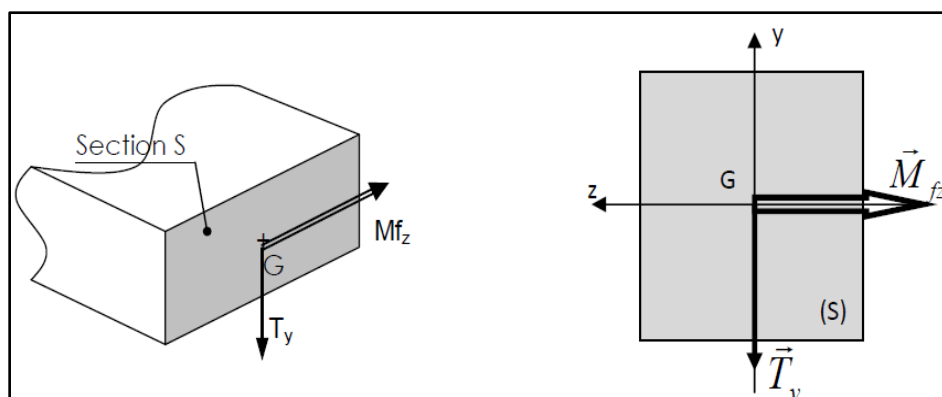


Figure 6.2: Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple.

- Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne. La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) .
- Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G , à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière.

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G, \text{ (} T_y \text{ avec } Mf_z, T_z \text{ avec } Mf_y \text{).}$$

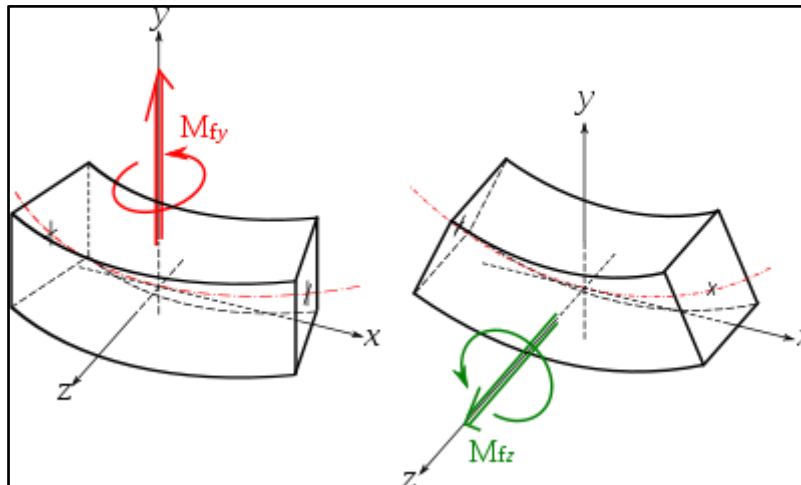


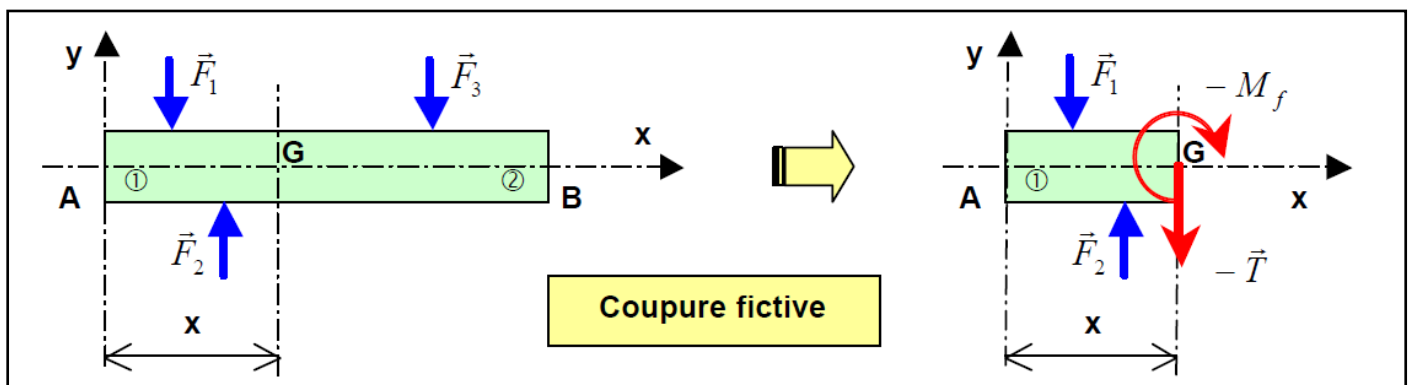
Figure 6.3: Définition des composantes du torseur de cohésion

On remarque que la valeur de l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à la position x du point considéré :

$$T = -\frac{dM_{fz}}{dx}.$$

6.2 Efforts intérieurs (Effort tranchant, Moment fléchissant)

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant Mf (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).



Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue **une coupure fictive** à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon 1, on obtient l'effort tranchant T et le moment fléchissant Mf (on obtient en fait respectivement -T et -Mf).

- **T** : somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées à gauche de la section fictive = $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$
- **Mf** : moment résultant en G de toutes les actions extérieures situées à gauche de la section fictive = $M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)$

Remarque :

- le cas **Mf ≠ 0** avec T = 0 correspond à de la flexion pure.
- le cas **Mf ≠ 0** avec T ≠ 0 correspond à de la flexion simple.

6.3 Essai de flexion :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale (figure 6.4). Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en **compression** tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en **traction**. Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : **la fibre neutre**.

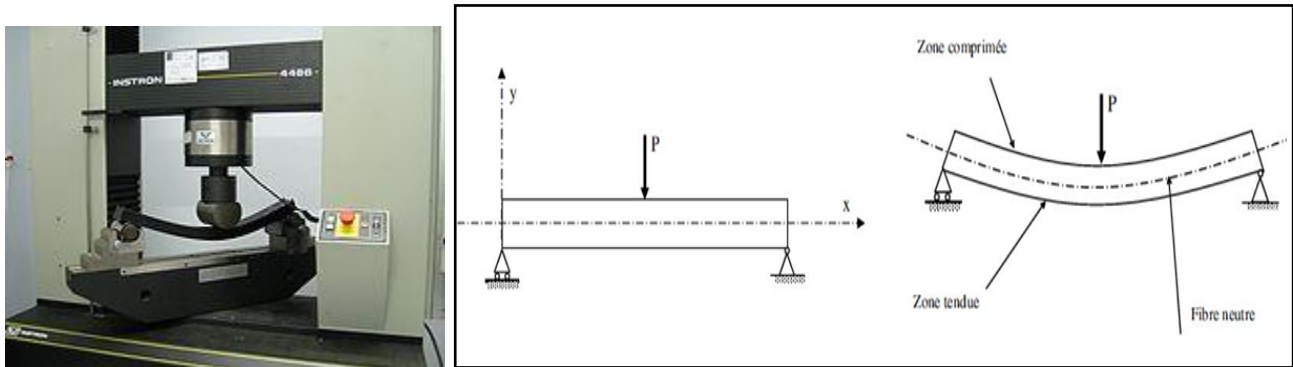


Figure 6.4: Modélisation d'un essai de flexion simple.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

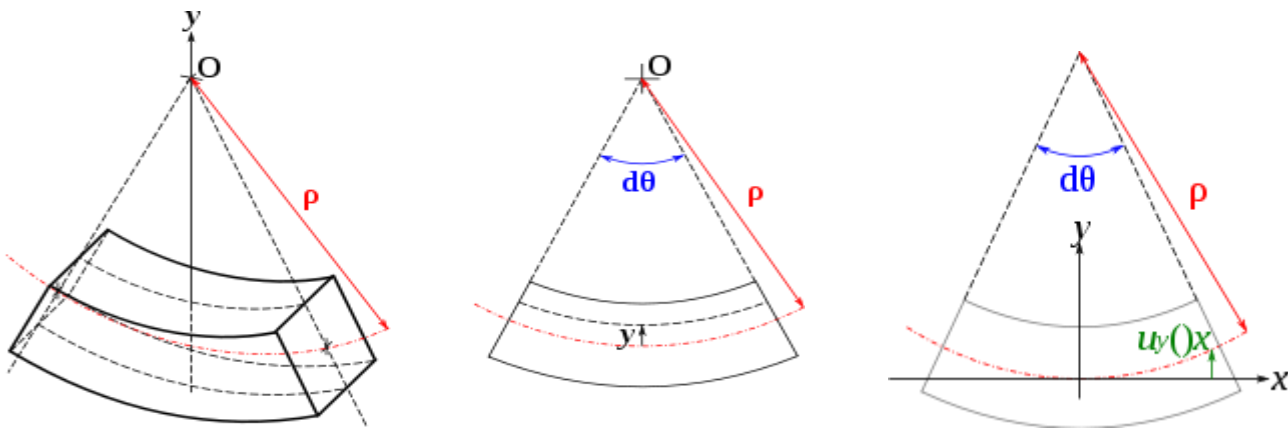


Figure 6.5: Élément d'une poutre fléchie

Par ailleurs, en considérant une poutre droite, si l'on appelle $u_y(x)$ la flèche, c'est-à-dire le déplacement vertical du point de la courbe moyenne situé à l'abscisse x en raison de la flexion, on a, d'après la définition générale du rayon de courbure :

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \simeq \frac{d^2 u_y}{dx^2}$$

Le graphique $u_y(x)$ donne la forme de la courbe moyenne, encore appelée « déformée de la poutre ».

6.3 Diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissant

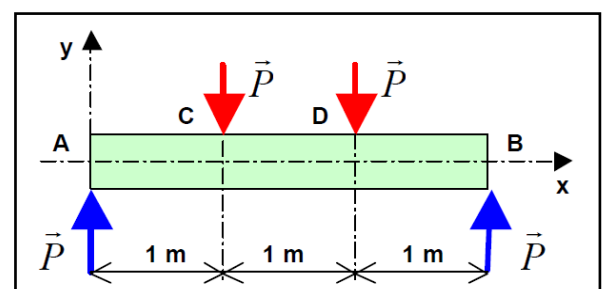
Les valeurs de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de T et M_f (graphes mathématiques de type (x, y)) permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

6.3.1 Exemples

A. Charges concentrées

Un dispositif de mise en charge exerce une poussée de 20 000 N qui se répartit en C et D, alors que le bâti de la machine supporte la poutre en A et B.

La symétrie du chargement et des appuis entraîne $A = B = C = D = P = 10\,000$ N, le poids de la poutre étant négligé.



➤ **Etude du tronçon AC** : section fictive d'abscisse : $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

Une seule force à gauche de la section fictive : P au point A

Effort tranchant : $T_{AC} = 10\,000 \text{ N}$ pour tout $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

Moment fléchissant : $M_{fAC} = -P \times x = -10\,000 x \text{ Nm}$

➤ **Etude du tronçon CD** : section fictive d'abscisse : $1 \leq x \leq 2 \text{ m}$

Deux forces à gauche de la section fictive : \bar{P} au point A, et $-\bar{P}$ au point C

Effort tranchant : $T_{CD} = P - P = 0 \text{ N}$ pour tout $1 \leq x \leq 2 \text{ m}$

Moment fléchissant : $M_{fCD} = -P \times x + P \times (x-1) = -P = -10\,000 \text{ Nm}$

Remarque : sur ce tronçon $M_f \neq 0$ et $T = 0$, on est dans un cas de flexion pure.

➤ **Etude du tronçon DB** : section fictive d'abscisse : $2 \leq x \leq 3 \text{ m}$

Trois forces à gauche de la section fictive : \bar{P} en A, et $-\bar{P}$ aux points C et D

Effort tranchant : $T_{DB} = P - P - P = -10\,000 \text{ N}$ pour tout $2 \leq x \leq 3 \text{ m}$

Moment fléchissant : $M_{fDB} = -P \times x + P \times (x-1) + P \times (x-2) = -P = 10\,000 (x-3) \text{ Nm}$

- **Diagrammes** : rassemblons les trois résultats précédents sur un même graphe :

Diagramme des efforts tranchants :

$$T_{AC} = 10\,000 \text{ N pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$T_{CD} = 0 \text{ N pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

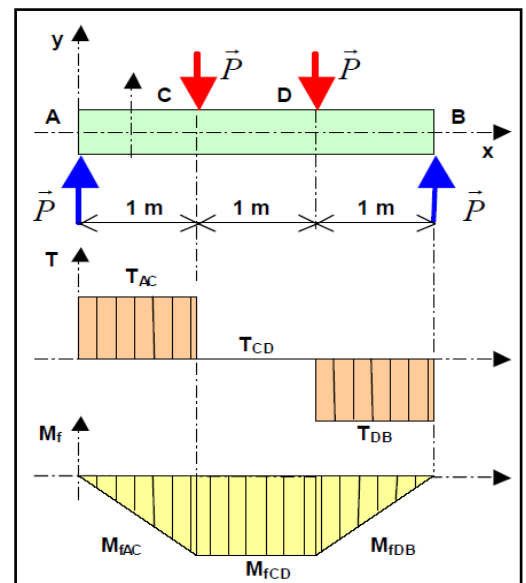
$$T_{DB} = -10\,000 \text{ N pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Diagramme des moments fléchissants :

$$M_{fAC} = -10\,000 x \text{ Nm pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

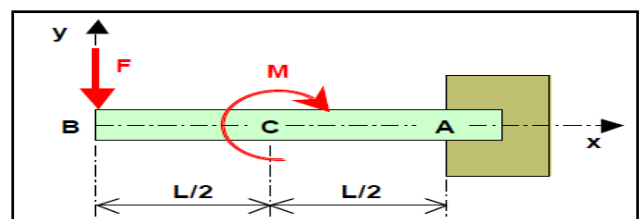
$$M_{fCD} = -10\,000 \text{ Nm pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$M_{fDB} = 10\,000 (x-3) \text{ Nm pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$



B. Poutre encastree

On considère une poutre encastree de longueur $L = 2 \text{ m}$ soumise à un effort concentré $F = 1\,000 \text{ N}$ (vers le bas) au point B et à un couple pur $M = 1\,000 \text{ Nm}$ (sens antitrigonométrique) autour du point C.

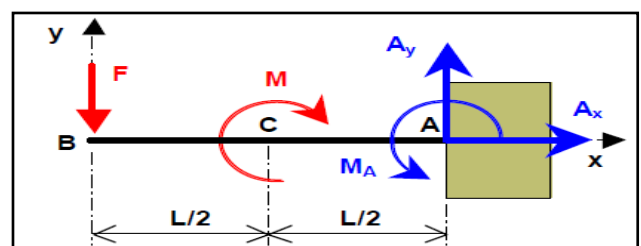


- Actions exercées par l'encastrement sur la poutre :

Le Principe Fondamental de la Statique donne :

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{A}) - M + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - 1000 = 0 \\ 1000 \times 2 - M + M_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 1000 \text{ N} \\ M_A = -1000 \text{ Nm} \end{cases}$$



- **Etude du tronçon BC** : $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

Effort tranchant : $T_{BC} = -F = -1000 \text{ N}$

Moment fléchissant : $M_{fBC} = F \times x = 1000 \times x \text{ Nm}$

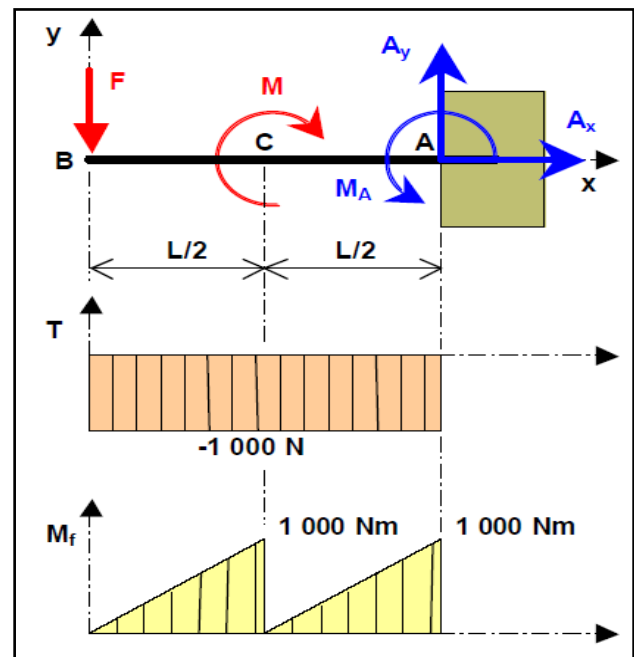
- **Etude du tronçon CA** : $1 \leq x \leq 2 \text{ m}$

Effort tranchant : $T_{CA} = -F = -1000 \text{ N}$

Moment fléchissant :

$M_{fCA} = F \times x - M = 1000(x-1) \text{ Nm}$

- **Diagrammes** : ci-contre.



C. Charges réparties

Les charges réparties ont pour origine les actions de pesanteur et des actions de contact diverses (vent, neige, pression d'un fluide...). Elles peuvent être uniformes ou variables.

C.1 Charge répartie uniforme

Traisons ce cas à partir d'un exemple. Considérons une poutre (longueur $L = 4 \text{ m}$) réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40 daN par mètre ($\vec{q} = -400 \vec{y}$ ou $q = 400 \text{ N.m}^{-1}$).

- **Actions aux appuis en A et B** :

Le Principe Fondamental de la Statique donne : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{q} = \vec{0}$

En projection sur y : $A_y + B_y - qL = 0$ avec $A_y = B_y$ du fait de la symétrie.

D'où : $A_y = B_y = \frac{qL}{2} = \frac{400 \times 4}{2} = 800 \text{ N}$

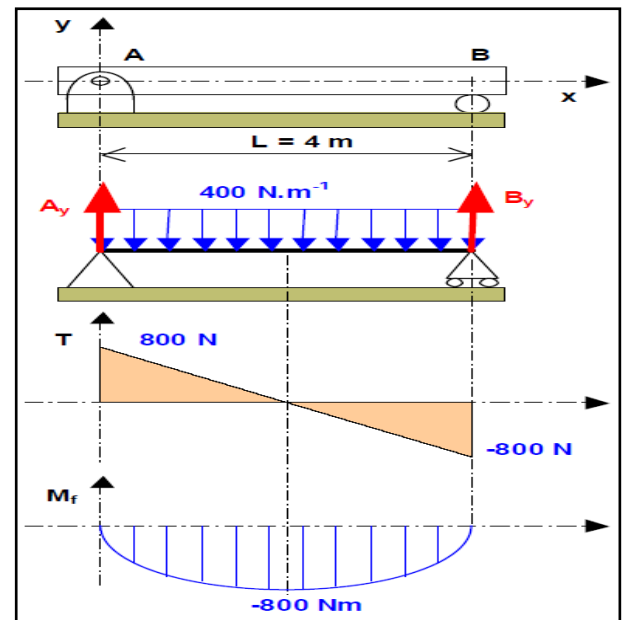
Effort tranchant :

$$T_{AB} = A_y - qx = 400(2 - x)$$

Moment fléchissant :

$$M_{fAB} = -A_y \times x + qx \times \frac{x}{2} = 200x(x - 4)$$

- **Diagrammes** : ci-contre.



Remarque : calcul de l'extrémum :

$$\frac{dM_{fAB}}{dx} = \frac{d[200x(x-4)]}{dx} = 400(x-2)$$

S'annule pour $400(x-2) = 0$ soit $x = 2$, et la valeur maxi du moment fléchissant est alors (pour $x = 2$) :

$$M_{fAB \text{ Maxi}} = 200 \times 2(2 - 4) = -800 \text{ Nm}$$

C.2 Charge répartie linéairement variable

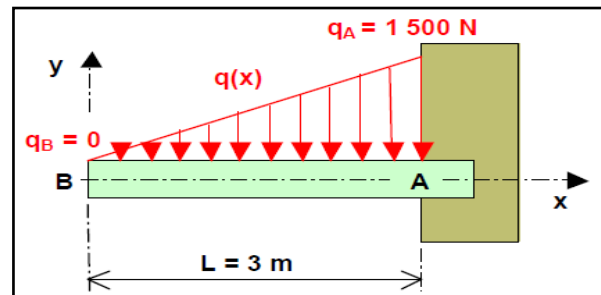
Nous allons également traiter ce cas à partir d'un exemple.

Prenons le cas d'une poutre (longueur $L = 3\text{ m}$) encastree en A, supportant la charge linéairement croissante $q(x)$ de la figure ci-contre.

▪ **Charge répartie :**

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_A}{L}$$

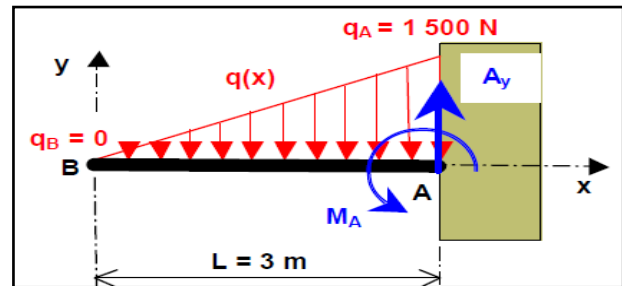
D'où
$$q(x) = \frac{q_A}{L} x = \frac{1\,500}{3} x = 500 x \text{ Nm}$$



Action à l'encastrement :

Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{R}) + M_A(\vec{A}) = 0 \end{cases}$$



Où \vec{R} est la résultante de la charge répartie $q(x)$ sur toute la longueur L :

$$R = \frac{1500 \times 3}{2} = 2\,250 \text{ N} \quad (= \text{aire du triangle})$$

Cette résultante s'applique au « centre de gravité du triangle », c'est-à-dire à la distance $L/3$ du point A.

On a donc :

$$\begin{cases} A_y - R = 0 \\ R \times \frac{L}{3} + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_y = R = 2\,250 \text{ N} \\ M_A = -R \times \frac{L}{3} = -2\,250 \times \frac{3}{3} = -2\,250 \text{ Nm} \end{cases}$$

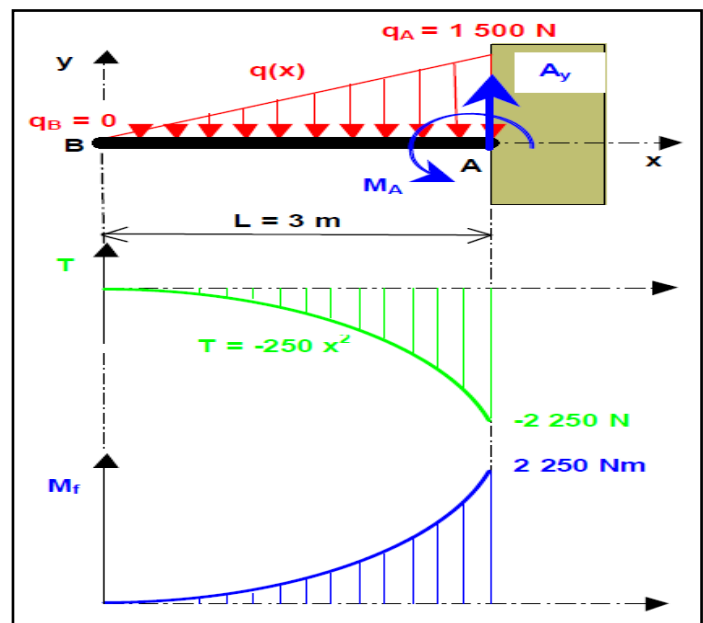
Effort tranchant :

$$T_{BA} = -\frac{500 x \times x}{2} = -250 x^2 \text{ N} \quad (\text{Triangle})$$

Moment fléchissant :

$$M_{BA} = -\frac{500 x \times x}{2} \times \frac{x}{3} = -\frac{250}{3} x^3 \text{ Nm}$$

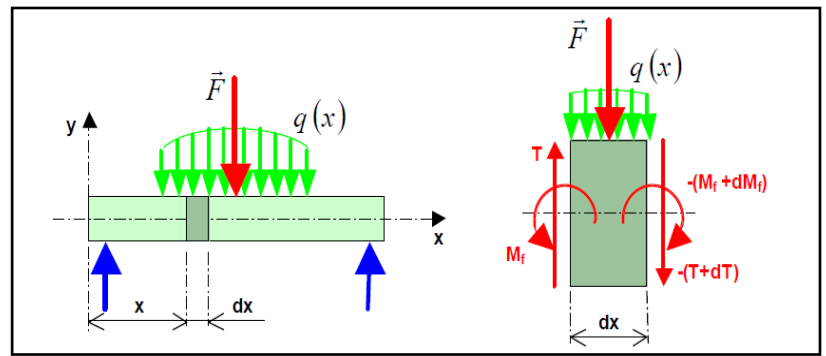
▪ **Diagrammes :** ci-contre



6.4 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

L'étude de l'équilibre du tronçon de largeur dx appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, donne :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \quad \text{et} \quad \frac{dM_f}{dx} = -T$$



6.5. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par flèche à l'abscisse x, le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de déformée (Fig. 6.13).

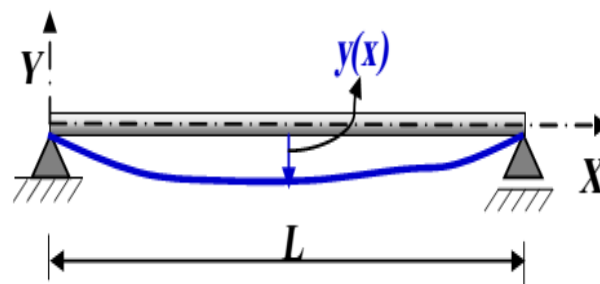


Fig.6.13 - Poutre déformée.

- **Conditions aux limites :**

les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_I = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

- **Flèches :** la déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) : $f_I = y_I$ et $f_D = y_D$

6.5.1 Méthode par intégration

- **Principe**

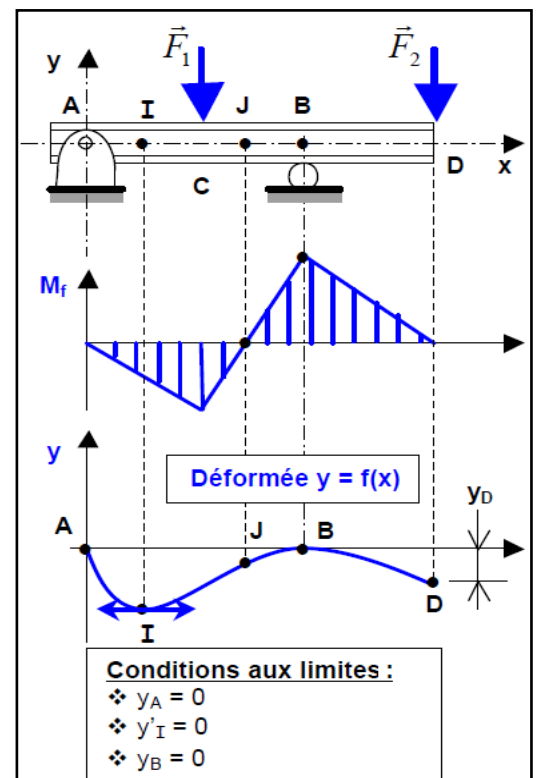
Connaissant l'équation des moments fléchissants M_f en fonction de x (positions le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M_f = -E I y'' \quad (6.6)$$

Avec

- M_f : le moment fléchissant (équation en x)
- E : le module d'élasticité longitudinale (MPa)
- y'' : la dérivée seconde de la déformée y
- $I = Iz$: le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm⁴)

Fig.6.14 - Poutre déformée et conditions aux limites.



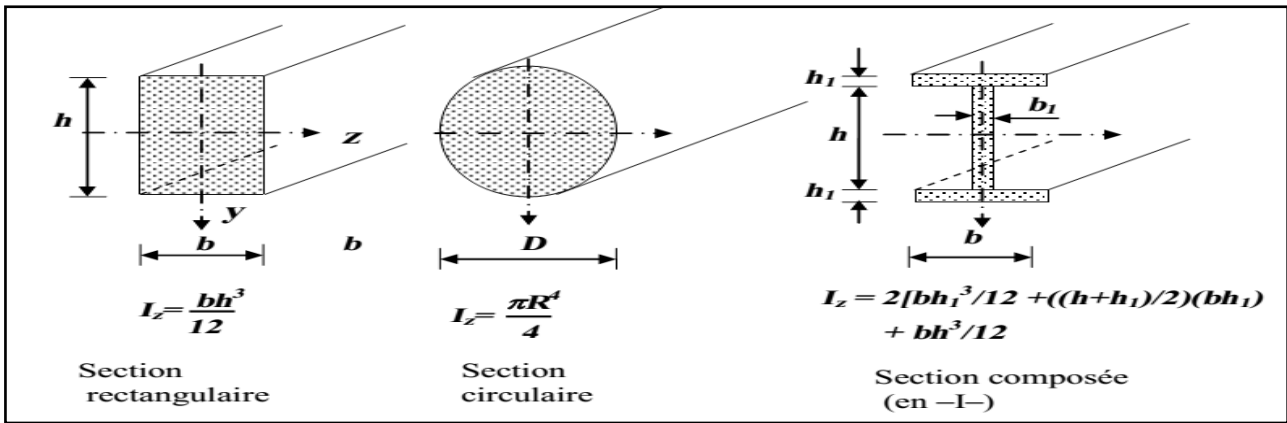


Fig.6.15 - Exemples d'expressions du moment d'inertie central pour des sections usuelles.

Remarque : les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

EXEMPLES USUELS DE CONDITIONS AUX LIMITES		
ENCASTREMENT	ARTICULATION	APPUI SIMPLE
<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y'_A = 0$ ❖ $y_A = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$

➤ **Exemple**

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 4\text{ m}$, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.

L'étude statique permet de déterminer les actions des appuis

sur la poutre : $A = B = \frac{P}{2} = 500\text{ daN}$

Moments fléchissants :

❖ pour $0 \leq x \leq 2\text{ m}$

$$M_{fAC} = -\frac{P}{2}x = -500x$$

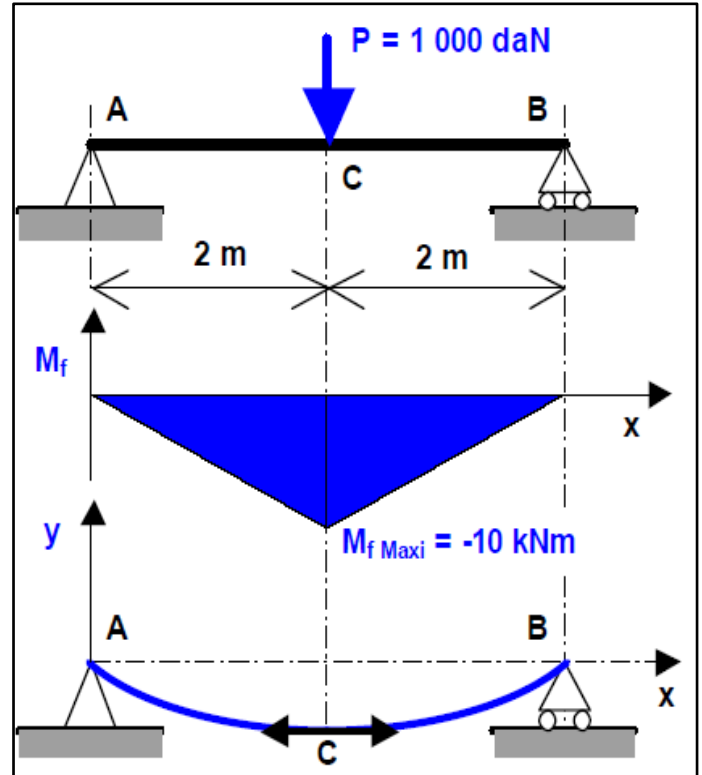
❖ pour $2 \leq x \leq 4\text{ m}$

$$M_{fBC} = -\frac{P}{2}x + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 500(x - 4)$$

Equation de la déformée : $M_{fAC} = -EI y_{AC}''$

On a donc : $-EI y_{AC}'' = -\frac{P}{2}x$

La première intégration donne : $EI y_{AC}' = \frac{Px^2}{4} + C_1$ (1)



$$E I y_{AC} = \frac{P x^3}{12} + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

La seconde intégration donne :

Conditions aux limites :

- on a $y = 0$ au point A ($x = 0$) : l'équation (2) donne : $C_2 = 0$

$$C_1 = -\frac{P \times (L/2)^2}{4} = -\frac{P L^2}{16}$$

- et $y'_C = 0$ au point C ($x = L/2$) : l'équation (1) donne :

$$y_{AC}' = \frac{P}{4 E I} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad \text{et} \quad y_{AC} = \frac{P}{4 E I} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4} x \right)$$

Finalement :

Flèche : la flèche maximale est obtenue pour $x = L/2$:

$$f_{Maxi} = y_C = -\frac{P L^3}{48 E I}$$

2.6. Calcul des contraintes

2.6.1. Cas de la flexion pure

On dit qu'une poutre est sollicitée en flexion pure si toutes les composantes des efforts intérieurs sont nulles à l'exception du moment fléchissant (M_{fz} ou $M_{fy} \neq 0$) (Fig. 6.17).

Autrement dit le moment fléchissant est constant, $T = dM/dx$ d'où $T = 0$

➤ Exemples de poutres en flexion pure

Les figures (6.17-a) et (6.17-b) schématisent une poutre et un tronçon de poutre, respectivement, soumis à la flexion pure.

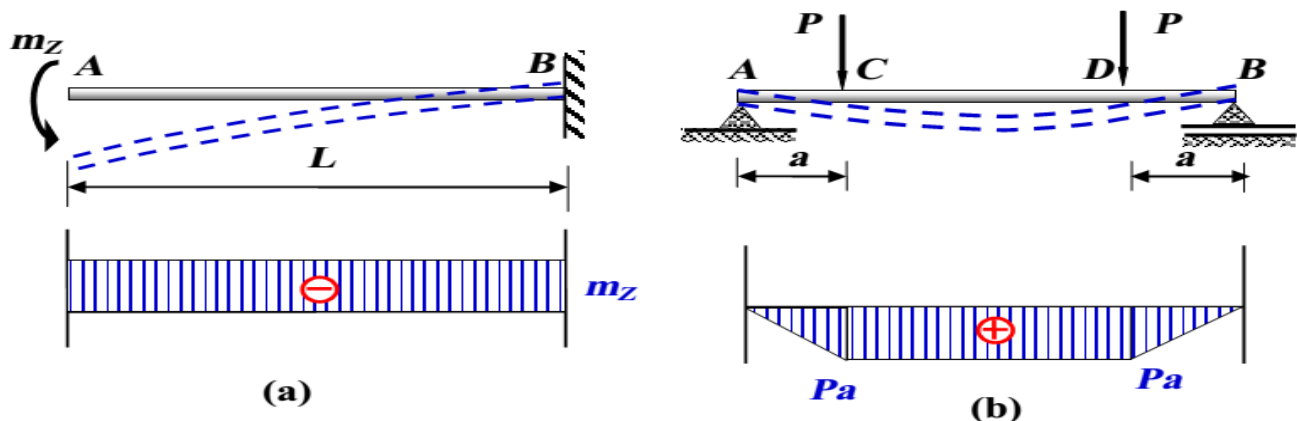


Fig. 6.17 – Illustration de la flexion pure: (a) poutre en flexion pure, (b) tronçon de poutre en flexion pure.

➤ Dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte normale (condition de résistance)
- un critère sur la flèche maximale (condition de rigidité)

Le critère sur la flèche maximale, traduit le fait que la flèche maximale $v(P)$ en un point P doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation:

$$\text{Max}(v(P)) \leq [v] \quad (6.8)$$

➤ Dimensionnement à la condition de résistance

Le dimensionnement d'une poutre fléchie à la condition de résistance passe par les étapes suivantes:

- 1- Tracé du diagramme de Mf (M_z ou M_y) le long de la poutre,

- 2- Détermination de la section dangereuse à partir du digramme de M_f ,
- 3- Calcul de la contrainte maximale σ_{max} , c'est-à-dire la contrainte au niveau du point dangereux le long de la section transversale de la poutre,
- 4- Satisfaction de la condition de résistance qui s'écrit selon la méthode des contraintes admissibles comme suit:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (6.9)$$

σ_{max} est obtenue en analysant la variation de σ_x dans une section dangereuse de la poutre.

Dans ce cas M_Z et I_Z sont constants et σ_x dépend linéairement de la coordonnée y (Fig. 6.18).

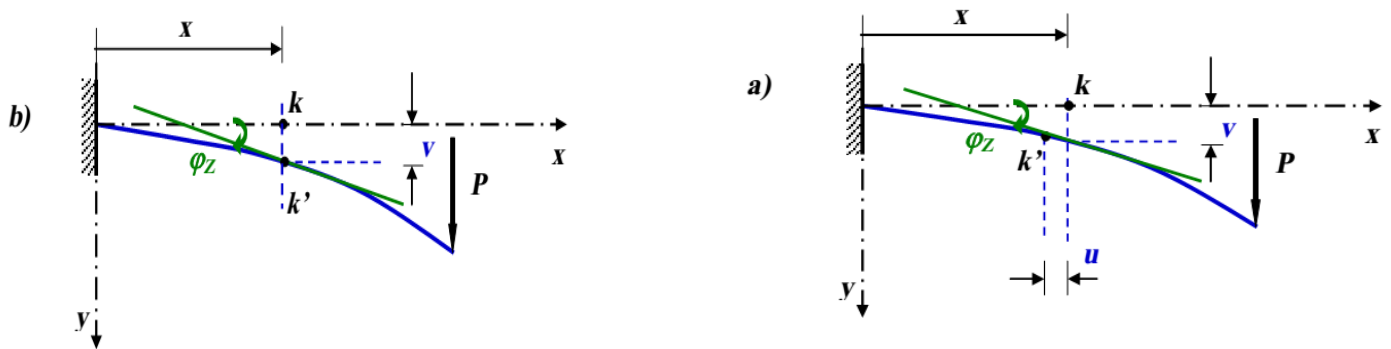


Fig.6.18- Déformations dans une poutre fléchie.

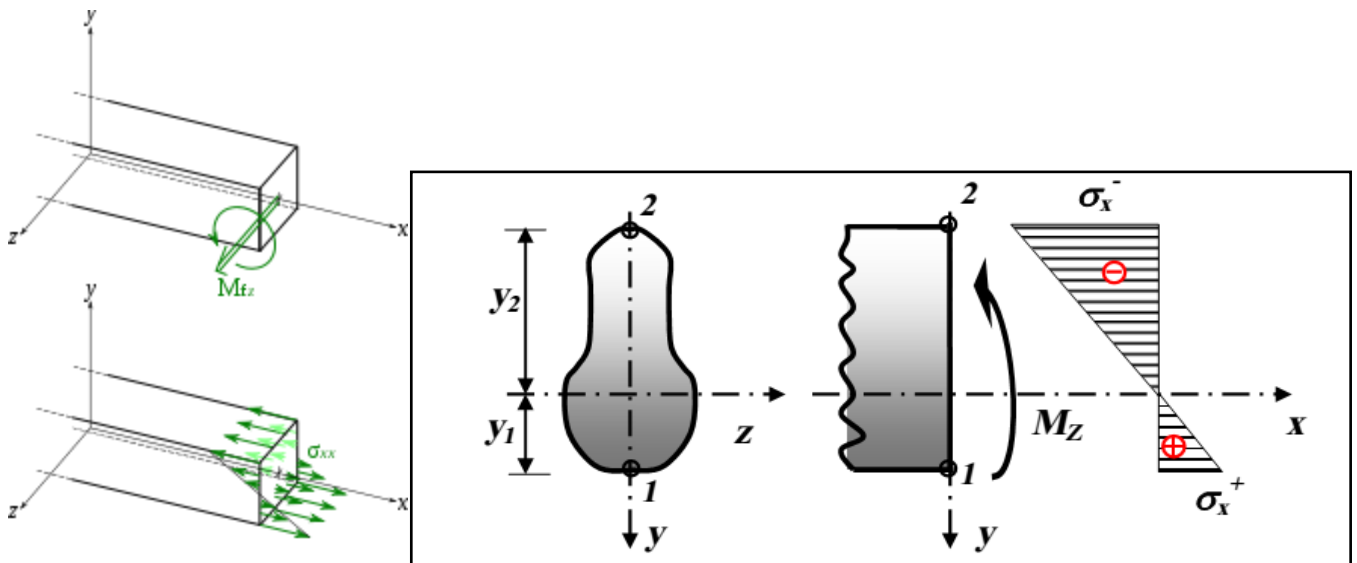


Fig.6.19- Distribution des contraintes dans une section d'une poutre en flexion pure.

- $\sigma_x = 0$ pour les points correspondants à l'axe z (l'axe neutre)
- Les valeurs maximales de σ_x correspondent aux points les plus éloignés de l'axe neutre (les points 1 et 2)

De l'équation $\sigma_x (y) = (M_Z / I_Z) \cdot y$, on obtient:

$$\sigma_{xmax}^{(1)} = M_Z^{max} / W_Z^{(1)}, \quad W_Z^{(1)} = I_Z / y_1 = W_Z^{(t)}$$

$$\sigma_{x\max}^{(2)} = M_Z^{\max} / W_Z^{(2)}, \quad W_Z^{(2)} = I_Z / y_2 = W_Z^{(c)} \quad (6.10)$$

Où $W_Z^{(t)}$ et $W_Z^{(c)}$ sont les modules de flexion ou de résistance, calculés pour le point le plus tendu (point 1) et le point le plus comprimé (point 2), respectivement.

D'où, les conditions de résistance:

$$\begin{aligned} \sigma_{x\max}^{(+)} &= M_Z^{\max} / W_Z^{(t)} \leq [\sigma]^+ \\ \sigma_{x\max}^{(-)} &= M_Z^{\max} / W_Z^{(c)} \leq [\sigma]^- \end{aligned} \quad (6.11)$$

Pour la majorité des poutres utilisées en construction:

$$W_Z^{(t)} = W_Z^{(c)} \quad \text{et} \quad \sigma_{x\max}^{(+)} = \sigma_{x\max}^{(-)}$$

Alors les conditions de résistance ci-dessus peuvent être exprimées sous la forme:

$$\boxed{\sigma_{x\max} = M_Z^{\max} / W_Z \leq [\sigma]} \quad (6.12)$$

2.6.2. Cas de la flexion simple

Pour le cas de la flexion simple, en plus du moment fléchissant M_f qui est variable dans ce cas il existe la composante de l'effort tranchant T , c'est-à-dire en plus de la contrainte normale σ on a une contrainte tangentielle τ .

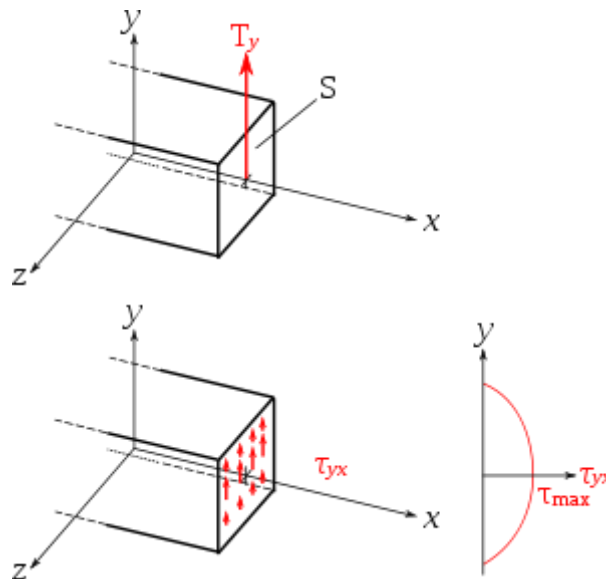


Fig.6.19- Effort tranchant dans le cas de la flexion simple.

La contrainte normale s'exprime par l'équation précédente (cas de la flexion pure).

La contrainte tangentielle τ_{xy} est donnée par l'équation de Jouravsky :

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{Iz}(y)}{I_z \cdot b(y)}} \quad (6.13)$$

Avec :

$$S_{Iz}(y) = \int_{S_1} y dS$$

: est le moment statique de la surface située au dessus de la coordonnée y et par rapport à l'axe z .

La quantité $b(y)$ est la largeur de la fibre étudiée correspondant à la coordonnée y .

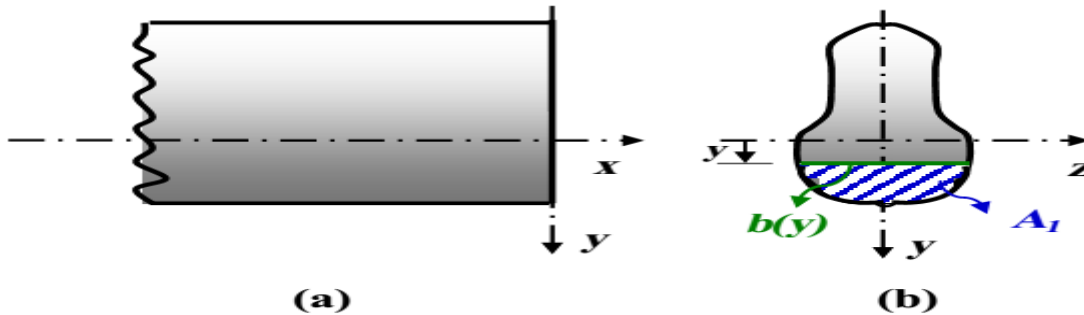


Fig.6.20- Tronçon de poutre non chargé (a) longitudinal, (b) transversal.

Remarques

- Dans le cas de la figure ci-dessus ($S_{Iz}(y)$ positif), le signe de τ_{xy} dépend uniquement du signe de T_y .
- τ_{xy} varie le long de la hauteur de la section en fonction de $S_{Iz}(y)$ et $b(y)$. Pour les points les plus éloignés de l'axe neutre $\tau_{xy} = 0$.

Pour les sections ordinaires, il est commode de déterminer τ_{xy}^{max} à l'aide de l'expression:

$$\tau_{xy}^{max} = K \frac{T_y}{S} \tag{6.14}$$

Où S est l'aire de la section et K un coefficient dépendant de la forme de la section (Tableau 6.1).

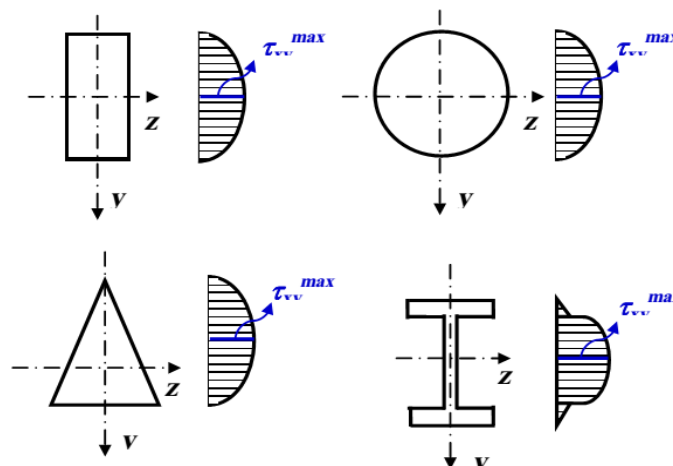


Fig.6.21- Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.

Tableau 6.1- Exemples de valeurs du coefficient de forme K.

Forme de la section	Rectangulaire	Ronde	Triangulaire
Coefficient K	$3/2$	$4/3$	$3/2$

➤ **Dimensionnement**

Pour dimensionner la poutre on utilise un critère en contrainte ou en flèche maximale comme dans le cas de la flexion pure.

➤ **Dimensionnement à la condition de résistance**

Le calcul à la résistance se fait comme dans le cas de la flexion simple (détermination des sections dangereuses et des points dangereux, satisfaction des conditions de résistances).

Pour la sélection des sections dangereuses, on distingue, généralement, trois cas:

- Si M_z et T_y ont des valeurs maximales dans la même section le long de la poutre, cette section est considérée dangereuse et on y effectue le calcul à la résistance.

- Si M_Z et T_Y ont des valeurs maximales dans des sections différentes le long de la poutre, on y effectue le calcul à la résistance dans chacune de celles-ci.
- Parfois, les sections sont dangereuses sans que les efforts T_Y aient des valeurs maximales. Donc, on doit y effectuer un calcul à la résistance.

Pour la satisfaction des conditions de résistances, on doit considérer les cas suivants:

1- Composer une condition de résistance pour le point où σ_x est maximale, dans une section où M_Z est maximal. En ce point τ_{xy} est généralement nul. La condition de résistance pour ce point s'écrit:

$$\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$$

2- Composer une condition de résistance pour le point où τ_{xy} est maximale. Si la section est symétrique par rapport à l'axe z , τ_{xy}^{max} correspond habituellement à l'axe neutre où $\sigma_x = 0$ (Fig. 6.22). La condition de résistance pour ce point (dans une section où T_Y est maximale) s'écrit:

$$\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$$

3- Si τ_{xy} est maximale dans le point qui ne correspond pas à l'axe neutre et où $\sigma_x \neq 0$ (Fig. 2.17), une satisfaction de la condition de résistance pour ce point doit se faire dans le cadre des théories de résistance (ç-à-d selon un critère de résistance). On utilise habituellement, en flexion plane, le critère de la contrainte tangentielle maximal (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes:

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (6.15-a)$$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (6.15-b)$$

Et la condition de résistance est:

$$\sigma_{Eq} \leq [\sigma] \quad (6.16)$$

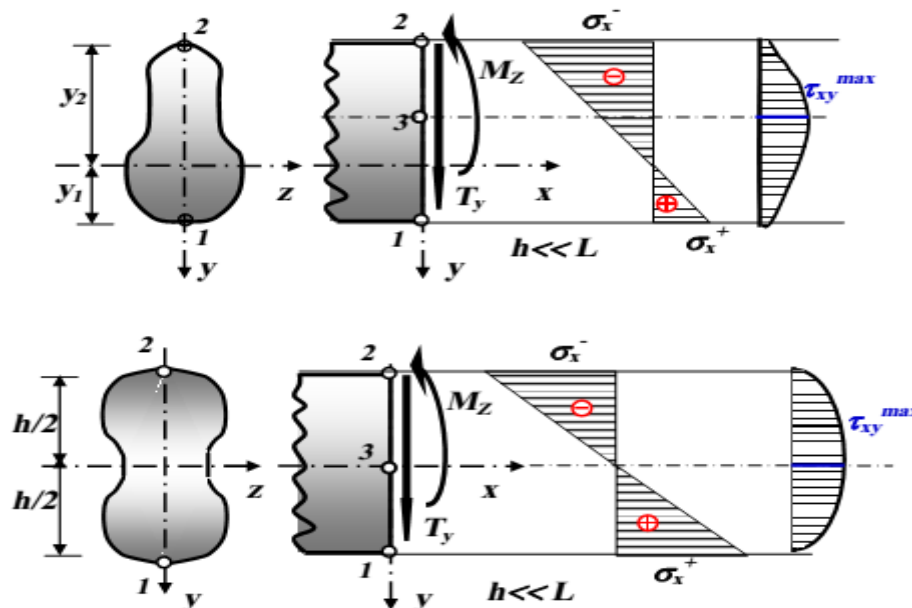
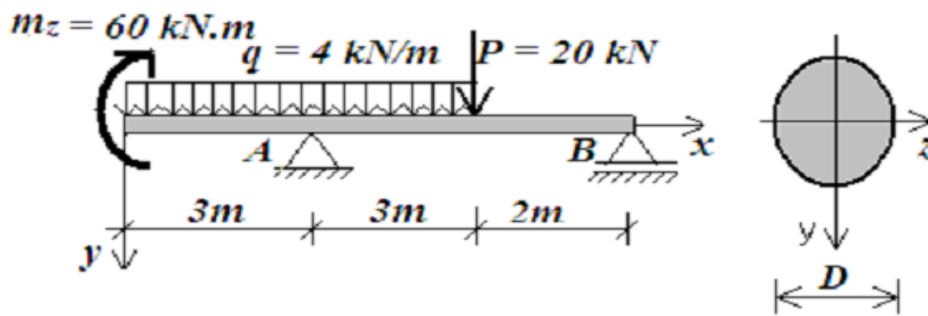


Fig.6.22 – Distribution des contraintes dans une section de poutre en flexion simple.

Exemple 6.6

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci dessous.

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre D de la section si $[\sigma]=1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau]=1100 \text{ kg/cm}^2$

**Solution 6.6**

1- Réactions aux appuis

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \\ \sum M /_A = 0 &\Rightarrow R_B = 24 \text{ kN} \\ \sum M /_B = 0 &\Rightarrow R_{Ay} = 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Vérification

$$R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \Leftrightarrow 20 + 24 = 44$$

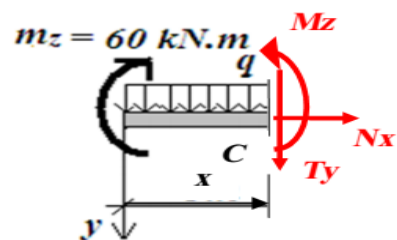
2- Diagrammes des efforts intérieurs

Section 1-1 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -4x \quad d'ou \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M /_C = 0 \Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad d'ou \begin{cases} M_z(x=0) = 60 \text{ kN.m} \\ M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \end{cases}$$

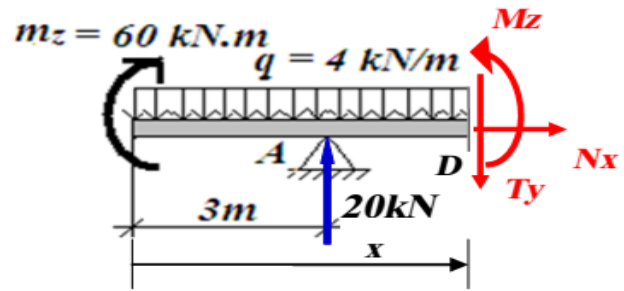


Section 2-2 $3 \leq x \leq 6m$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 20 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_y(x=3) = +8 \text{ kN} \\ T_y(x=6) = -4 \text{ kN} \end{cases}$$



$$\sum M/D = 0 \Rightarrow M_z = 60 + 20(x-3) - 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \\ M_z(x=6) = 48 \text{ kN.m} \end{cases}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow x = 5m$$

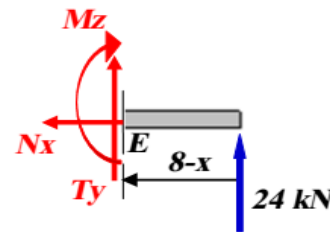
$$M_z^{max} = M_z(x=5m) = 50 \text{ kN.m}$$

Section 3-3 $6 \leq x \leq 8m$

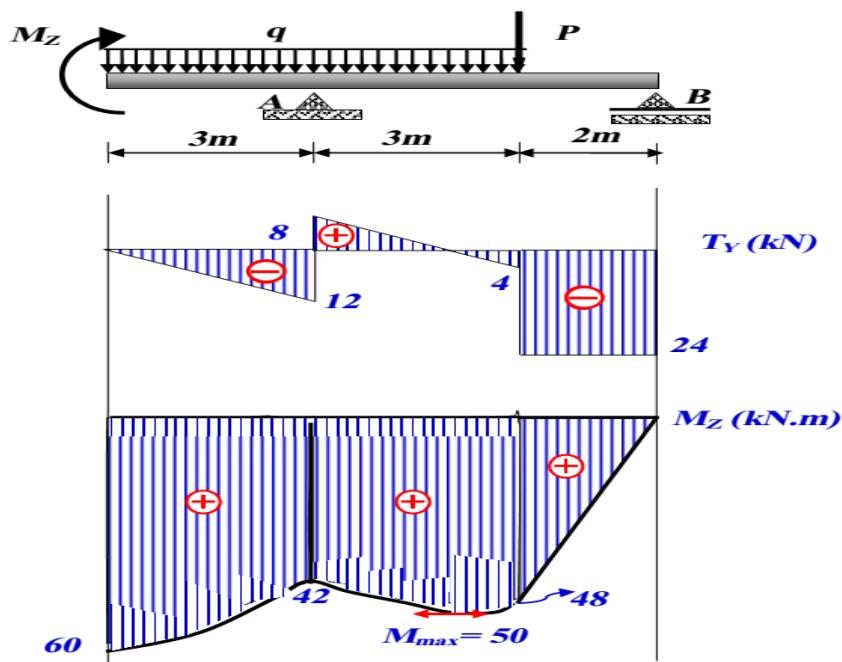
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24 \text{ kN}$$

$$\sum M/E = 0 \Rightarrow M_z = 24(8-x) \text{ d'où } \begin{cases} M_z(x=6) = 48 \text{ kN.m} \\ M_z(x=8) = 0 \end{cases}$$

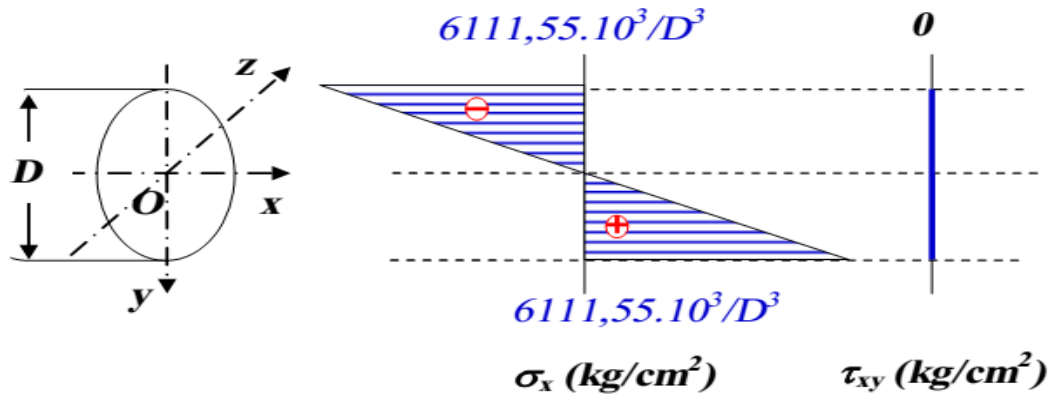


Les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont représentés sur la [figure ci dessous](#)



3- Distribution des contraintes $M_Z^{max} = 60\text{kN.m}; T_Y^{cor} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(y) = \frac{M_Z}{I_Z} y = \frac{60.10^4}{\frac{\pi D^4}{64}} y \\ \tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{Iz}(y)}{I_Z \cdot b(y)} = 0 \end{array} \right.$$



4- Dimensionnement

Le dimensionnement à la condition de résistance se fait selon la condition:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

$$\frac{6111,55 \cdot 10^3}{D^3} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 18,3\text{cm}$$

